

Член-корреспондент НАН Украины А. И. Шевченко, А. С. Миненко

Задача Стефана при наличии конвекции

Исследована задача Стефана с учетом конвекции и примесей в жидкой фазе. Доказана теорема существования. Построено приближенное решение задачи с использованием метода малого параметра. Получена сходимость приближенного решения к точному решению в метрике $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$.

1. Изучается задача, моделирующая процесс кристаллизации вещества, с учетом конвективного переноса тепла. При этом задача содержит две свободные границы. Впервые при исследовании данного класса задач используется метод малого параметра. В работе построено приближенное решение задачи и исследована его сходимость.

Будем обозначать через Ω_t^\pm область, занятую жидкой (твердой) фазой в момент времени t . При этом Ω_0 — заданная область в \mathbb{R}^3 , граница которой состоит из двух замкнутых связанных поверхностей Γ_0^+ и Γ_0^- , не имеющих самопересечений, где Γ_0 — гладкая замкнутая поверхность, лежащая внутри Ω_0 , такая, что Γ_0^- лежит внутри ограниченной области, границей которой является Γ_0 . Требуется определить области Ω_t^+ и Ω_t^- (т. е. границы Γ_t^+ и Γ_t^-), вектор скорости $\vec{V}(x, t) = (V_1(x, t), V_2(x, t), V_3(x, t))$, давление $p(x, t)$, концентрации примеси $c(x, t)$, температуру жидкой $u^+(x, t)$ и твердой $u^-(x, t)$ фаз по следующим условиям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u^+(x, t)}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) u^+(x, t) - a_+^2 \nabla^2 u^+(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^+, \\ \frac{\partial u^-(x, t)}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u^-(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^-, \\ \frac{\partial \vec{V}(x, t)}{\partial t} + (\vec{V} \nabla) \vec{V}(x, t) + \nabla p(x, t) &= \nu \nabla^2 \vec{V}(x, t) + \vec{f}(u^+, c), & (x, t) \in D_T^+, \\ \nabla \vec{V}(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^+, \quad \nabla \vec{V}(x, 0) = \vec{C}(x); \\ T(\vec{V}, p) \vec{n} &= -q(x, t) \vec{n}, & (x, t) \in \Gamma_t^+; \quad V_n = -\left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+}\right) W_n; \\ V_\tau &= 0, & (x, t) \in \Gamma_t, \quad u^\pm(x, t) = B^\pm(x, t), & (x, t) \in \Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^-; \\ u^\pm(x, 0) &= A^\pm(x); \quad u^+ = u^- = T^* - \varepsilon c, & k_- \frac{\partial u^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u^+}{\partial n} = \chi p^+ W_n, & (x, t) \in \Gamma_t, \\ \frac{\partial c}{\partial t}(x, t) + (\vec{V} \nabla) c(x, t) - \gamma \nabla^2 c(x, t) &= 0, & (x, t) \in D_T^+; \\ c(x, 0) &= g_0(x), \quad c(x, t) = g(x, t), & (x, t) \in \Gamma_t^+, \quad -\alpha \frac{\partial c}{\partial n} = \beta c W_n, & (x, t) \in \Gamma_t. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, x_3)$; $D_T^\pm = \{(x, t) : x \in \Omega_t^\pm, t(0, T)\}$, Ω_t^\pm — области жидкой и твердой фаз соответственно, $\partial\Omega^+ = \Gamma_t \cup \Gamma_t^+$, $\partial\Omega^- = \Gamma_0^- \cup \Gamma_t$; \vec{n} — нормаль к Γ_t , направленная

в сторону Ω_t^+ ; $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$; $T(\vec{V}, p)$ — тензор напряжений с элементами $T_{ij} = -\delta_{ij}p + \nu(\partial V_i/\partial x_j + \partial V_j/\partial x_i)$; V_n и V_τ — нормальная и тангенциальная составляющие \vec{V} ; W_n — скорость движения фронта кристаллизации в направлении нормали \vec{n} ; T^* , ν , ε , χ , ρ^+ , ρ^- , α , β , γ , k_+ , k_- — известные положительные постоянные. Отметим также, что если $\Phi(x, t) = u^\pm(x, t) + \varepsilon c(x, t) - T^* = 0$ — уравнение поверхности Γ_t , то $W_n = -\Phi_t/|\nabla\Phi|$.

В дальнейшем удобно условие Стефана представить в следующем виде:

$$L(u^+, u^-, \Gamma_t, \varepsilon) = k_-^2 |\nabla u^-|^2 - k_+^2 |\nabla u^+|^2 + \varepsilon(k_-^2 + k_- k_+) (\nabla u^-, \nabla c) - \\ - \varepsilon(k_-^2 + k_- k_+) (\nabla u^+, \nabla c) + \chi \rho^+ (k_- u_t^- + k_+ u_t^+) + \chi \rho^- \varepsilon (k_+ + k_-) c_t = 0,$$

$$(x, t) \in \Gamma_t.$$

В работе предполагается, что $A(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$, $\vec{C}(x) \in H^{2+\alpha}(\Omega_0^+)$, $B^\pm(x, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_t^+ \cup \Gamma_0^- \times [0, T])$, $\vec{f}(u^+, c) \in C^1(\mathbb{R}^2)$, $g(x, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_t^+ \times [0, T])$, $g_0(x) \in H^{4+\alpha}(\overline{\Omega_0^+})$. При этом $g(x, t)$ и $g_{x_i}(x, t)$ должны быть функциями класса $H^{1+\alpha, (1+\alpha)/2}(\mathbb{R}^3 \times [0, T])$. Считается также, что выполнены условия согласования до первого порядка включительно, которые формулируются аналогично [1, с. 268, с. 363].

2. Будем искать свободные границы Γ_t и Γ_t^+ в следующем виде: $\Gamma_t = \{x = x(\omega) + \vec{n}(\omega)\rho(\omega, t)\}$, $\Gamma_t^+ = \{x = x(\theta) + \eta(\theta, t)\vec{n}(\theta)\}$, где $\omega = (\omega_1, \omega_2)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $x(\omega) \in \Gamma_0$, $x(\theta) \in \Gamma_0^+$, $\rho(\omega, t)$ и $\eta(\theta, t)$ — некоторые функции соответственно классов $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0 \times [0, T])$ и $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_0^+ \times [0, T])$, $\rho(\omega, 0) = 0$ и $\eta(\theta, 0) = 0$. Введем также обозначения $Q_T^\pm = \Omega_0 \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^- = \Gamma_0^- \times [0, T]$, $\Gamma_{0T}^+ = \Gamma_0^+ \times [0, T]$, $\Gamma_{0T} = \Gamma_0 \times [0, T]$.

Далее, для достаточно малых чисел ε будем искать решение задачи (1) в виде следующих разложений:

$$u^\pm(x, t; \varepsilon) = u_0^\pm(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k u_k^\pm(x, t), \quad p(x, t; \varepsilon) = p_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x, t), \\ V_i(x, t; \varepsilon) = V_{i0}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k V_{ik}(x, t), \quad c(x, t) = c_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k c_k(x, t), \quad i = 1, 2, 3; \quad (2) \\ \rho(\omega, t; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \rho_k(\omega, t), \quad \eta(\theta, t; \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \eta_k(\theta, t).$$

В работах [2–7] изучены нулевые и первые приближения задачи (1) для малых чисел ε . При этом установлено, что $u_0^\pm(x) = A^\pm(x)$, $\vec{V}_0(x) = \vec{C}(x)$, $c_0(x) = g_0(x)$, $\rho_1(\omega, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T}^-)$, $\eta_1(\theta, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T}^+)$, $u_1(x, t; \rho, \eta) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{Q_T^\pm})$, $c_1(x, t; \rho, \eta) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{Q_T^\pm})$, причем $\rho_1(\omega, t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_1 :

$$M_1 \rho_1 = \frac{1}{\chi p^+} \int_0^t \left(k_- \frac{\partial u_1^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_1^+}{\partial n} + f_1(x, t) \right) dt, \quad x(\omega) \in \Gamma_{0T}.$$

3. Имеют место следующие формулы:

$$\begin{aligned}
u_x|_{\Gamma_t} &= u_{0x} + \varepsilon \left(\alpha_1 f_1 + \beta_1 u_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \varepsilon^2 \left(\alpha_2 f_2 + \beta_2 u_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) + \dots + \\
&+ \varepsilon^k \left(\alpha_k f_k + \beta_k u_k + \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) + o(\varepsilon^k), \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}; \\
W_n|_{\Gamma_t} &= - \left(\frac{u_{1t}}{|\nabla u_0|} + F_1 \right) \varepsilon - \left(\frac{u_{2t}}{|\nabla u_0|} + F_2 \right) \varepsilon^2 - \dots - \left(\frac{u_{kt}}{|\nabla u_0|} + F_k \right) + o(\varepsilon^k) = 0, \\
(x, t) &\in \Gamma_{0T}, \\
L(u^+, u^-, \Gamma_t, \Gamma_t^+, \varepsilon)|_{\Gamma_t} &= [k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2] + \varepsilon [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_1^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_1^+) + \\
&+ \Phi_1 + \chi \rho^+ (k_- u_{1t}^- + k_+ u_{1t}^+)] + \dots + \varepsilon^k [2k_-^2 (\nabla u_0^-, \nabla u_k^-) - 2k_+^2 (\nabla u_0^+, \nabla u_k^+) + \\
&+ \Phi_k + \chi \rho^+ (k_- u_{kt}^- + k_+ u_{kt}^+)] + o(\varepsilon^k) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T},
\end{aligned}$$

где $\alpha_k(x, t)$, $\beta_k(x, t)$, $f_k(x, t)$, $F_k(x, t)$ и $\Phi_k(x, t)$ — известные функции. Из последней формулы следует, что

$$\begin{aligned}
k_-^2 |\nabla u_0^-|^2 - k_+^2 |\nabla u_0^+|^2 &= 0, \quad x \in \Gamma_0, \\
k_- \frac{\partial u_k^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_k^+}{\partial n} + \Phi_k &= \chi \rho^+ \frac{\partial \rho_k}{\partial t}, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}.
\end{aligned}$$

4. Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
M_1(\vec{\xi}_i, \vec{\zeta}_j) &= (\vec{\xi}_0 \nabla) \vec{\zeta}_k + (\vec{\xi}_1 \nabla) \vec{\zeta}_{k-1} + \dots + (\vec{\xi}_k \nabla) \vec{\zeta}_0, \\
M_2(\vec{\xi}_i, \zeta_j) &= (\vec{\xi}_0 \nabla) \zeta_k + (\vec{\xi}_1 \nabla) \zeta_{k-1} + \dots + (\vec{\xi}_k \nabla) \zeta_0, \\
N(\vec{V}_i, p_j) \vec{n} &= T(\vec{V}_0, p_k) \vec{n} + T(\vec{V}_1, p_{k-1}) \vec{n} + \dots + T(\vec{V}_k, p_0) \vec{n}.
\end{aligned}$$

Затем рассмотрим k -е приближение $(\vec{V}_k, u_k^\pm, p_k, \rho_k, \eta_k, c_k)$ задачи (1) для малых чисел ε . Имеем:

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial \vec{V}_k}{\partial t} + M_1(\vec{V}_i, \vec{V}_j) + \nabla p_k &= \nu \nabla^2 \vec{V}_k + \frac{1}{k!} d^2 f(u_k^+, c_k), \quad (x, t) \in Q_T^+, \\
\nabla \vec{V}_k &= 0, \quad (x, t) \in Q_T^+; \quad N(\vec{V}_i, p_j) \vec{n} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}^+, \\
\vec{V}_k(x, 0) &= 0, \quad V_{kn} = \left(1 - \frac{\rho^-}{\rho^+} \right) \left[\frac{u_{kt}^+}{|\nabla u_0^+|} + F_k(x, t) \right], \quad V_{k\tau} = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0,T},
\end{aligned} \right. \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
\frac{\partial u_k^+}{\partial t} + M_2(\vec{V}_i, u_k^+) &= a_+^2 \nabla^2 u_k^+, \quad (x, t) \in Q_T^+, \\
\frac{\partial u_k^-}{\partial t} - a_-^2 \nabla^2 u_k^- &= 0, \quad (x, t) \in Q_T^-, \\
u_k^\pm(x, 0) &= 0, \quad u_k^\pm(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}^- \cup \Gamma_{0T}^+, \quad u_k^+ = u_k^-, \\
|\nabla u_0^\pm(x(\omega))| \rho_k(\omega, t) &+ u_k(x(\omega), t) + f_k(x(\omega), t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T},
\end{aligned} \right. \quad (4)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial c_k}{\partial t} + M_2(\vec{V}_i, c_j) - \gamma \nabla^2 c_k = 0, \quad (x, t) \in Q_T^+, \quad c(x, 0) = 0, \quad c_k(x, t) = 0, \\ (x, t) \in \Gamma_{0T}^+; \quad -\alpha \frac{\partial c_k}{\partial n} - \alpha \beta_k c_k = c_0(x) \frac{u_{kt}^+}{|\nabla u_0^+|} + F_k, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}, \\ \frac{\partial c_0}{\partial n} \eta_k(\theta, t) + c_k(x(\theta), t) + g_k(x(\theta), t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma_{0T}^+, \end{array} \right. \quad (5)$$

где $F_k(x, t)$, $f_k(x, t)$ и $F_k^*(x, t)$ — известные функции.

Зададим теперь $\vec{V} = \vec{V}_1(x, t)$. Затем решим задачу (4), (5) и найдем u_1^\pm , c_1 , ρ_1 , η_1 . После этого решим задачу (3), являющуюся начально-краевой задачей для системы Навье–Стокса. Затем, используя новое значение $\vec{V}_2(x, t)$, снова решаем задачу (4) и (5) и т. д. Следовательно, получим процесс последовательных приближений \vec{V}_k , u_k^\pm , c_k , ρ_k , η_k . Доказательство сходимости этого процесса аналогично приведенному в [8], причем при заданном $\rho_k(\omega, t) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T})$ найдем функции $u_k^\pm(x, t, \rho_k) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{Q_T^\pm})$, $c_k(x, t, \rho_k) \in H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\overline{Q_T^\pm})$ как единственное решение задачи (4), (5), а $\rho_k(\omega, t)$ находим как неподвижную точку сжимающегося оператора M_k :

$$M_k \rho_k = \frac{1}{\chi \rho^+} \int_0^t \left(k_- \frac{\partial u_k^-}{\partial n} - k_+ \frac{\partial u_k^+}{\partial n} + f_k(x, t) \right) dt, \quad (x(\omega), t) \in \Gamma_{0T}.$$

Справедливы следующие утверждения.

Лемма 1. Пусть выполнены условия

$$|\nabla A^+(x(\omega))| = \frac{\partial g_0}{\partial n}, \quad x \in \Gamma_0; \quad \frac{c(k_- + k_+)}{\chi \rho^+} < 1,$$

где c — некоторая постоянная [1, с. 364] и пусть

$$\nabla^2 A^+(x) = 0, \quad x \in \Omega_0^\pm, \quad A^\pm(x)|_{x \in \Gamma_0^+ \cup \Gamma_0^-} = B^\pm(x, 0), \quad A^\pm(x)|_{\Gamma_0} = 0,$$

$$\vec{C}(x) = 0, \quad x \in \overline{\Omega_0^\pm}, \quad k_- |\nabla A^-(x)|_{\Gamma_0} = k_+ |\nabla A^+(x)|_{\Gamma_0}, \quad |\nabla A^\pm(x)|_{\Gamma_0} \geq \tilde{\varepsilon} > 0,$$

где $\tilde{\varepsilon}$ — некоторая положительная постоянная. Тогда оператор M_k , действующий из $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T})$ в $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}(\Gamma_{0T})$, имеет там неподвижную точку.

Лемма 2. В качестве k -го приближения задачи (1) можно взять решение $u_k^\pm(x, t)$, $c_k(x, t)$, $\vec{V}_k(x, t)$, $\rho_k(\omega, t)$, $\eta_k(\theta, t)$ задачи (4), (5).

Теорема. Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда приближения $V_k(x, t)$, $u_k^\pm(x, t)$, $c_k(x, t)$, $\rho_k(\omega, t)$, $\eta_k(\theta, t)$ сходятся к функциям $V(x, t)$, $u^\pm(x, t)$, $c(x, t)$, $\rho(\omega, t)$, $\eta_k(\theta, t)$ — класса $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$, являющимся решением задачи (1).

Лемма 3. Пусть $\frac{\partial g_0(x)}{\partial n} \neq 0$ на Γ_0^+ . Тогда при малых числах ε и достаточно малых значениях t справедливы формулы:

$$\Gamma_t^+ : x = x(0) - \vec{n} \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \frac{c_i(x(\theta), t) + g_i(x(\theta), t)}{\frac{\partial c_0}{\partial n}} + o(\varepsilon^k), \quad x \in \Gamma_0^+,$$

$$\Gamma_t : x = x(\omega) - \vec{n} \sum_{i=1}^k \varepsilon^i \frac{u_i(x(\omega), t) + f_i(x(\omega), t)}{|\nabla u_0^\pm(x(\omega))|} + o(\varepsilon^k), \quad x \in \Gamma_0.$$

Замечание. Доказанная теорема фактически устанавливает существование решения задачи (1) в классе функций $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$.

1. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 756 с.
2. *Миненко А. С.* Вариационные задачи со свободной границей. – Киев: Наук. думка, 2005. – 341 с.
3. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Приближенный анализ многомерной конвективной задачи Стефана // Доп. НАН України. – 2010. – № 4. – С. 30–34.
4. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Приближенный анализ стационарной конвективной задачи Стефана // Там само. – 2010. – № 5. – С. 36–40.
5. *Шевченко А. И., Миненко А. С.* Приближенный анализ пространственной конвективной задачи Стефана // Там само. – 2010. – № 10. – С. 29–33.
6. *Миненко А. С.* Исследование одной конвективной задачи Стефана методом Ритца // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, № 11. – С. 1546–1556.
7. *Миненко А. С.* О минимизации одного интегрального функционала методом Ритца // Там же. – 2006. – **58**, № 10. – С. 1385–1394.
8. *Солонников В. А.* Разрешимость задачи о движении вязкой несжимаемой жидкости, ограниченной свободной поверхностью // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **41**, № 6. – С. 1388–1424.

Государственный университет информатики
и искусственного интеллекта, Донецк

Поступило в редакцию 28.02.2011

Член-корреспондент НАН України **А. І. Шевченко, О. С. Міненко**

Задача Стефана за наявності конвекції

Досліджено задачу Стефана з урахуванням конвекції та домішок у рідині. Доведено теорему розв'язності. Побудовано наближений розв'язок задачі з використанням методу малого параметра. Одержано збіжність наближеного розв'язку до точного розв'язку в метриці $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$.

Corresponding Member of the NAS of Ukraine **A. I. Shevchenko, A. S. Minenko**

The Stefan problem with convection

The Stefan convection problem in the liquid phase is investigated. We prove the theorem of solvability. The approximate solution is constructed using the method of small parameter. The convergence of the approximate solution to the exact one in the metric $H^{2+\alpha, (2+\alpha)/2}$ is proved.