УДК 519.21

У. Т. Хімка, асистент

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АСИМПТОТИЧНА НОРМАЛЬНІСТЬ РІЗНИЦЕВОЇ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Отримано достатні умови асимптотичної нормальності неперервної різницевої одновимірної процедури стохастичної оптимізації з врахуванням впливу на функцію регресії, що описується рівномірно ергодичним марковським процесом. Встановлено, що граничним процесом процедури є процес Орнштейна–Уленбека.

Ключові слова: *процедура стохастичної оптимізації, функція регресії, марковський процес, асимптотична нормальність.*

Вступ. Основною характеристикою різницевої процедури стохастичної оптимізації (РПСО), за якою можна оцінити швидкість збіжності процедури до точки екстремуму, є асимптотична нормальність нормованого за часом процесу. Встановленню такої властивості присвячені ряд робіт [1; 2]. Зокрема, в [2] розглянуто дискретну ПСО з адитивною складовою, що описує похибки вимірювання функції регресії та має природу «білого шуму». Слід зауважити, що така складова звужує застосування ПСО на відміну від випадку, коли функція регресії безпосередньо враховує стан зовнішнього середовища [3]. У роботі [3] встановлюється асимптотична нормальність неперервної процедури стохастичної апроксимації методом малого параметру [4] та розв'язком проблеми сингулярного збурення в схемі усереднення [5].

Постановка задачі. Нехай $C(u,x)$, $u \in R$, — функція регресії, що досягає єдиного максимуму в точці u_0, $u_0 \in R$. Компонента x характеризує вплив зовнішніх факторів, які описуються рівномірно ергодичним марковським процесом $x(t)$, $t \ge 0$ у вимірному фазовому просторі станів $(X, \boldsymbol{X})$ [5]. Генератор МП задається співвідношенням:

$$\boldsymbol{Q}\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)\left[\varphi(y) - \varphi(x)\right],$$

де $P(x,B), x \in X, B \in \boldsymbol{X}$ — стохастичне ядро.

Стаціонарний розподіл $\pi(B), B \in \boldsymbol{X}$, МП $x(t), t \ge 0,$ визначається співвідношеннями: $\pi(dx)q(x) = q\rho(dx),\quad q = \int_X \pi(dx)q(x)$, де $\rho(dx)$ — стаціонарний розподіл вкладеного ланцюга Маркова $x(\tau_n), n \ge 0$ [5]. Для генератора $\boldsymbol{Q}$ визначений потенціал $\boldsymbol{R}_0$: $\boldsymbol{R}_0 = \Pi - (\Pi + \boldsymbol{Q})^{-1}$, де

© У. Т. Хімка, 2012

$\Pi\varphi(x) = \int_X \pi(dx)\varphi(x)$ — проектор на підпростір $N_Q = \{\varphi : \boldsymbol{Q}\varphi = 0\}$ нулів оператора $\boldsymbol{Q}$.

Розглянемо неперервну процедуру стохастичної оптимізації пошуку точки u_0 в схемі усереднення, що задається еволюційним диференціальним рівнянням [6]:

$$\frac{du^\varepsilon(t)}{dt} = a(t)\nabla_b C\left(u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon^2)\right), \tag{1}$$

де $\nabla_b C(u,x) = \dfrac{C(u+b(t),x) - C(u-b(t),x)}{2b(t)}$, з нормуючими функціями $b(t) = \dfrac{b}{\sqrt{t}}, b > 0$ та $a(t) = \dfrac{a}{t}, a > 0$.

Асимптотична нормальність РПСО досліджується в умовах експоненційної стійкості усередненої системи

$$\frac{du}{dt} = C'(u), \tag{2}$$

де $C(u) = \int_X \pi(dx)C(u,x)$ — усереднена функція регресії за стаціонарним розподілом $\pi(B)$, $B \in \boldsymbol{X}$.

Нехай виконуються умови збіжності РПСО в схемі усереднення [6] до точки u_0 рівноваги усередненої системи (2).

Нормована РПСО має вигляд

$$v^\varepsilon(t) = \sqrt{t}u^\varepsilon(t)/\varepsilon. \tag{3}$$

Основний результат.

Теорема 1. Нехай функція регресії $C(u,\cdot) \in C^3(R)$ та виконуються додаткові умови:

$$C1:\ \rho^2 := 2\int_X \pi(dx)C'(0,x)\boldsymbol{R}_0 C'(0,x) > 0;$$

$$C2:\ C_2 := \int_X \pi(dx)C''(0,x) < 0;$$

$$C3:\ b := aC_2 + \frac{1}{2} < 0.$$

Тоді нормована РПСО (3) слабо збігається $v^\varepsilon(t) \to \varsigma(t)$ $\forall\ (t_0,t] \subset (0,T]$ при $\varepsilon \to 0$, $T > 0$, де $\varsigma(t)$, $t \ge 0$, — процес Орнштейна—Уленбека [7] з генератором

$$\boldsymbol{L}\varphi(v) = bv\varphi'(v) + \frac{\sigma^2}{2}\varphi''(v)$$

та дисперсією $\sigma^2 = a^2\rho^2$.

Висновок 1. Граничний процес Орнштейна-Уленбека $\varsigma(t)$ є ергодичним зі стаціонарним нормальним розподілом $N(0,\sigma_0^2)$, $\sigma_0^2 = -\dfrac{\sigma}{2b}$ [7].

Висновок 2. Умова $C1$ визначає дифузійність процесу $\varsigma(t)$, а умова $C3$ - ергодичність.

Побудова граничного генератора.

Лема 1. Нормована РПСО (3) є розв'язком диференціального рівняння:

$$\frac{dv^{\varepsilon}(t)}{dt} = \varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_b C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x) + \frac{1}{2t}v\,. \tag{4}$$

Доведення. Оскільки, $v^{\varepsilon(t)} = \sqrt{t}u^{\varepsilon}(t)/\varepsilon,$ то $u^{\varepsilon}(t) = \varepsilon v^{\varepsilon}(t)t^{-1/2}$. Продиференціюємо останню рівність по t,

$$\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt} = \varepsilon(-\frac{1}{2})t^{-3/2}v^{\varepsilon}(t) + \varepsilon t^{-1/2}\frac{dv^{\varepsilon}(t)}{dt}. \tag{5}$$

Прирівняємо праві частини рівностей (5) та (1),

$$\varepsilon(-\frac{1}{2})t^{-3/2}v^{\varepsilon}(t) + \varepsilon t^{-1/2}\frac{dv^{\varepsilon}(t)}{dt} = \frac{a}{t}\nabla_b C(\varepsilon v^{\varepsilon}(t)/\sqrt{t}, x_t^{\varepsilon}). \tag{6}$$

Виконаємо елементарні перетворення (6),

$$\frac{dv^{\varepsilon}(t)}{dt} = \varepsilon^{-1}\sqrt{t}\left[\frac{a}{t}\nabla_b C(\varepsilon v^{\varepsilon}(t)/\sqrt{t}, x_t^{\varepsilon}) + \frac{1}{2}\varepsilon t^{-3/2}v^{\varepsilon}\right] =$$

$$= \frac{a}{\varepsilon\sqrt{t}}\nabla_b C(\frac{\varepsilon v^{\varepsilon}}{\sqrt{t}}, x_t^{\varepsilon}) + \frac{1}{2t}v^{\varepsilon}.$$

Отже, має місце (4).

Лема 2. Генератор $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ двокомпонентного марковського процесу $v^{\varepsilon}(t), x_t^{\varepsilon} := x(t/\varepsilon^2), t \ge 0,$ на банаховому просторі $\boldsymbol{B}(R, X)$ дійснозначних функцій $\varphi(v,x) \in C^2(R^d, X),$ визначається співвідношенням:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,x) = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(v,x) + \boldsymbol{C}_t(x)\varphi(v,x), \tag{7}$$

де

$$\boldsymbol{C}_t(x)\varphi(v,x) = \left[\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_b C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}}, x) + \frac{1}{2t}v\right]\varphi'(v,x)\,. \tag{8}$$

Доведення. Згідно означення породжуючого оператора марковського процесу [5]:

$$\boldsymbol{L}\varphi(v,x)=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\Big[E_{v,x}\varphi\Big(v^{\varepsilon}+\Delta v^{\varepsilon},x_{t+\Delta}^{\varepsilon}\Big)-$$

$$-\varphi(v,x)\,|\,v^{\varepsilon}(t)=v,x_{t+\Delta}^{\varepsilon}=x\Big]=E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x)\big].$$

Для першого доданку має місце розклад

$$E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_{t+\Delta})\big]=E_{v,x}\varphi(v,x_{t+\Delta})+E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x_{t+\Delta})\big].$$

Враховуючи розподіл часу θ_x перебування МП $x(t)\,,t\geq 0,$ в стані x маємо

$$E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_{t+\Delta})\big]=E_{v,x}\varphi(v,x_{t+\Delta})+E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x)-$$

$$-\varphi(v,x)\big]]I(\theta_x>\varepsilon^{-2}\Delta)+E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x_{t+\Delta})\big]I(\theta_x\leq\varepsilon^{-2}\Delta).$$

Для неперервної по v функції $\varphi(v,x)$ отримуємо [5]:

$$E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x_{t+\Delta})\big]I(\theta_x\leq\varepsilon^{-2\Delta})=o(\Delta).$$

Аналогічно:

$$E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x)-\varphi(v,x)\big]I(\theta_x>\varepsilon^{-2\Delta})=E_{v,x}\Bigg[\varphi'(v,x)\Bigg[\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_b C\Bigg(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x\Bigg)+$$

$$+\frac{1}{2t}v\Bigg]\Delta-\varepsilon^{-2}q(x)\varphi'(v,x)\frac{a}{\varepsilon\sqrt{t}}\nabla_b C\Bigg(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x\Bigg)\Delta^2+o(\Delta)\Bigg].$$

Отже, граничний генератор набуде вигляду

$$\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-1}\Big\{E_{v,x}\big[\varphi(v,x_t+\Delta)-\varphi(v,x)\big]+E_{v,x}\big[\varphi(v+\Delta v,x_t+\Delta)-\varphi(v,x_t+\Delta)\big]\Big\}=$$

$$=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(v,x)+\Bigg[\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\nabla_b C\Bigg(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x\Bigg)+\frac{1}{2t}v\Bigg]\varphi'(v,x),$$

оскільки

$$E_{v,x}\big[\varphi(v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x)\big]=E_{v,x}\big[\varphi(v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x)\big]\times$$

$$\times\Big[I(\theta_x>\varepsilon^{-2\Delta})+I(\theta_x\leq\varepsilon^{-2}\Delta\Big]=E_{v,x}\big[\varphi(v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x)\big]\times$$

$$\times\Big[\varepsilon^{-2}q(x)\Delta+o(\Delta)\Big]=\varepsilon^{-2}q(x)E(v,x)\big[\varphi(v,x_{t+\Delta})-\varphi(v,x)\big]\Delta+o(\Delta).$$

Лема 3. Генератор $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi(v,\cdot)\in C^2(R)$ для $C(u,\cdot)\in C^3(R)$, має аналітичне представлення:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi(v,x)=\varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi(v,x)+\varepsilon^{-1}\frac{1}{\sqrt{t}}\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(v,x)+$$
$$+\frac{1}{t}\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi(v,x)+\varepsilon\theta_t^{\varepsilon}\varphi(v), \qquad (9)$$

де

$$\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(v,x)=aC'(0,x)\varphi'(v,x),$$

$$\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi(v,x)=v\left(aC''(0,x)+\frac{1}{2}\right)\varphi'(v,x),$$

а залишковий член

$$\theta_t^{\varepsilon}\varphi(v)=\frac{1}{t\sqrt{t}}\left[\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi_2(v,x)+\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_1(v,x)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_2(v,x)\right].$$

Доведення. Розглянемо функцію $\nabla_b C(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x)$. Оскільки $C(u,\cdot)\in$ $\in C^3(R)$, то її можна розкласти в ряд Тейлора в околі точки нуль:

$$\nabla_b C\left(\frac{\varepsilon v}{\sqrt{t}},x\right)=C'(0,x)+\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}C''(0,x)+o(\varepsilon^2)\,. \qquad (10)$$

Підставимо (10) у (8) та проведемо деякі елементарні перетворення

$$\boldsymbol{C}_t(x)\varphi(v,x)=\left[\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}\left[C'(0,x)+\varepsilon\frac{v}{\sqrt{t}}C''(0,x)\right]+\frac{1}{2t}v\right]\varphi'(v,x)+o(\varepsilon^2)=$$

$$=\left[\varepsilon^{-1}\frac{a}{\sqrt{t}}C'(0,x)+\frac{av}{\sqrt{t}}C''(0,x)+\frac{1}{2t}v\right]\varphi'(v,x)+o(\varepsilon^2).$$

Тоді, генератор (7) з врахуванням останнього і позначень операторів $\boldsymbol{Q}_1(x)$, $\boldsymbol{Q}_2(x)$ та залишкового члена

$$\theta_t^{\varepsilon}\varphi(v)=\frac{1}{t\sqrt{t}}\left[\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi_2(v,x)+\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_1(v,x)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_2(v,x)\right]+o(\varepsilon^2)$$

набуде вигляду (9).

Розглянемо тест-функції виду

$$\varphi^{\varepsilon}(v,x)=\varphi(v)+\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\varphi_1(v,x)+\frac{\varepsilon^2}{t}\varphi_2(v,x)\,,\ \varphi(v)\in C^3(R)\,.$$

Лема 4. Розв'язок проблеми сингулярного збурення [5] для генератора $\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}$ на тест-функціях $\varphi^{\varepsilon}(v,x)$ має вигляд:

$$\boldsymbol{L}_t^{\varepsilon}\varphi^{\varepsilon}(v,x)=\frac{1}{t}\boldsymbol{L}_t\varphi(v)+\varepsilon\theta_t^{\varepsilon}(x)\varphi(v),$$

де $\boldsymbol{L}_t$ — граничний генератор вигляду:

$$\boldsymbol{L}_t\varphi(v)=v(aC_2+\frac{1}{2})\varphi'(v)+\frac{a^2\rho^2}{2}\varphi''(v)\,,$$

$$C_2=\int_X\pi(dx)C''(0,x)\,,\ \rho^2=2\int_X\pi(dx)C'(0,x)\boldsymbol{R}_0C'(0,x)\,,$$

а залишковий член обмежений: $\left\|\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v)\right\| \le M < \infty$.

Доведення. Розглянемо дію зрізаного генератора

$$\widehat{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q} + \frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{t}}\boldsymbol{Q}_1(x) + \frac{1}{t}\boldsymbol{Q}_2(x)$$

на тест-функціях $\varphi^\varepsilon(v,x)$.

Отже, отримаємо:

$$\widehat{\boldsymbol{L}}_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon = \varepsilon^{-2}\boldsymbol{Q}\varphi + \frac{\varepsilon^{-1}}{\sqrt{t}}\left[\boldsymbol{Q}\varphi_1 + \boldsymbol{Q}_1(x)\varphi\right] + \frac{1}{t}\left[\boldsymbol{Q}\varphi_2 + \boldsymbol{Q}_1(x)\varphi_1 + \boldsymbol{Q}_2(x)\varphi\right] + \\ + \frac{\varepsilon}{t\sqrt{t}}\left[\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi_2 + \boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\boldsymbol{Q}_2(x)\varphi_2\right]. \tag{11}$$

Оскільки оператор $\boldsymbol{Q}$ діє тільки по змінній x, то для першого доданку в (11) маємо $\boldsymbol{Q}\varphi \equiv 0$.

Використаємо умову балансу $\int\limits_{\boldsymbol{X}} \pi(dx)\boldsymbol{Q}_1(x) = 0$, оскільки $\int\limits_{\boldsymbol{X}} \pi(dx)C'(0,x) = C'(0) = 0$, та додаткову умову $\Pi\varphi_1 = 0$. Тоді для другого доданку в (11) маємо: $\boldsymbol{Q}\varphi_1 + \boldsymbol{Q}_1(x)\varphi = 0$. Звідси, отримаємо вигляд функції $\varphi_1(v,x)$:

$$\varphi_1(v,x) = \boldsymbol{R}_0\boldsymbol{Q}_1(x)\varphi(v) = a\boldsymbol{R}_0C'(0,x)\varphi'(v).$$

Використаємо другу умову розв'язності проблеми сингулярного збурення [4] та додаткову умову $\Pi\varphi = 0$.

Для третього доданку маємо

$$\boldsymbol{Q}\varphi_2(v,x) + \boldsymbol{L}_t(x) = \boldsymbol{L}_t(x), \tag{12}$$

де $\boldsymbol{L}_t(x) = \boldsymbol{Q}_{\boldsymbol{1}}(x)\varphi_1(v,x) + \boldsymbol{Q}_2(x)\varphi(v)$, а $\boldsymbol{L}_t = \Pi\boldsymbol{L}_t(x)$.

З (12) отримуємо представлення для $\varphi_2(v,x)$

$$\varphi_2(v,x) = \boldsymbol{R}_0\tilde{\boldsymbol{L}}_t\varphi(v), \text{ де } \tilde{\boldsymbol{L}}_t = \boldsymbol{L}_t(x) - \boldsymbol{L}_t.$$

З представлення $\varphi_1(v,x)$, $\boldsymbol{Q}_1(x)$ та $\boldsymbol{Q}_2(x)$ маємо

$$\boldsymbol{L}_t(x)\varphi(v) = a^2C'(0,x)\boldsymbol{R}_0C'(0,x)\varphi_v''(v) + v(aC''(0,x) + \frac{1}{2}]\varphi_v'(v).$$

З останнього та представлення $\varphi_2(v,x)$ отримуємо твердження Леми 4.

Доведення теореми.

Використовуючи твердження — Леми 4 легко перевірити виконання умов Модельної граничної теореми [5], тобто має місце слабка збіжність $v^\varepsilon(t) \to \varsigma(t)$, при $\varepsilon \to 0$.

Висновки. Встановлено асимптотичну нормальність нормованої процедури стохастичної оптимізації з марковськими збуреннями в схемі усереднення методом малого параметра на скінченному інтервалі спостереження вихідної процедури стохастичної оптимізації. На відміну від класичного випадку нормування по часу $\sqrt{t}$, для асимптотичного аналізу запропоновано нормування за малим параметром ε^{-2}, що дозволило побудувати граничний генератор. Отримані результати дозволяють розглянути асимптотичну нормальність РПСО і при інших нормуваннях як за часом, так і за малим параметром. Особливо важливим тут є отримання умов асимптотично малої дифузії РПСО [8].

Список використаних джерел:

1. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
2. Ljung L. Stochastic Approximation and Optimization of Random Systems / L. Ljung, G. Pflug, H. Walk // Birkhauser Verlag Basel. — 1992. — 115 p.
3. Чабанюк Я. М. Асимптотична нормальність для неперервної процедури стохастичної апроксимації в марковському середовищі / Я. М. Чабанюк // Доп. НАН України. — 2005. — № 11. — С. 29–34.
4. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk // Kluwer. — Dordrecht, 1999. — 185 p.
5. Koroliuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Koroliuk, N. Limnios // World Scientific Publishing. — 2005. — 330 p.
6. Khimka U. T. Stochastic Optimization Procedure Convergence with Markov Switching in the Average Scheme / U. T. Khimka, Ya. M. Chabanyuk // Математичні студії. — 2010. — Vol. 34, № 3. — С. 126–134.
7. Гардинер К. В. Стохастические методы в естественных науках / К. В. Гардинер. — Мир, 1986. — 527 с.
8. Feng J. Large Deviation for Stochastic Processes / J. Feng, T. G. Kurtz // AMS, RI. — 2006. — 404 p.

Sufficient conditions for asymptotic normality of continuous difference of one-dimensional stochastic optimization procedure taking into account the impact on the regression function that describes the uniform ergodic Markov process. Established that the limit process procedure is Ornstein-Uhlenbeck process.

Key words: *stochastic optimization procedure, function regression, Markov process, asymptotic normality.*

Отримано: 20.03.2012