Формули (19), (20) та (37) складають математичний апарат для розв'язування відповідних стаціонарних й нестаціонарних задач математичної фізики.

**Список використаних джерел:**


1. Уфлянд Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. — Л., 1976. — С. 93–106.
2. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
3. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
4. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
5. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Наука, 1969. — Т. 3. — 656 с.


The method of delta-like sequence (Dirichlet kernel) inculcates the hybrid integral transformation generated on the segment of polar axis with one point of interface by the differential operator of Euler the second order.

**Key words:** *differential operator of Euler, integral transformation, Dirichlet kernel, gravimetric function, spectral function, spectral density, integral image, basic identity.*

Отримано: 16.03.2012

УДК 517.927

**В. Б. Поселюжна,** канд. фіз.-мат. наук,
**Л. М. Семчишин,** канд. фіз.-мат. наук

Чортківський інститут підприємництва і бізнесу Тернопільського національного економічного університету, м. Чортків

# РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ КЛАСІВ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕСТАЦІОНАРНИМ КОЛОКАЦІЙНО-ІТЕРАТИВНИМ МЕТОДОМ

У статті досліджується питання збіжності нестаціонарного колокаційно-ітеративного методу розв'язування інтегральних рівнянь Фредгольма. Встановлено умови збіжності методу.

**Ключові слова**: *інтегральне рівняння, колокаційно-ітеративний метод, збіжність методу.*

**Вступ.** При математичному моделюванні фізичних, хімічних, біологічних, економічних процесів виникають різноманітні задачі для диференціальних, інтегральних, інтегро-диференціальних рівнянь та їх систем. Лише незначну кількість таких задач можна розв'язати точно. Тому актуальним є створення і обґрунтування до таких задач різноманітних наближених методів.

Серед великої кількості наближених методів найбільш часто застосовуються ітераційні та прямі методи, серед яких слід виділити методи проекційно-ітеративного типу, загальна теорія яких створена А. Ю. Лучкою. Колокаційно-ітеративний метод, який виник на основі звичайного методу послідовних наближень і методу колокації, значно розширює область застосування ітераційних методів та в порівнянні з методом колокації збігається швидше.

У роботах [1—3] досліджувалося питання застосування колокаційно-ітеративного методу для розв'язування інтегральних рівнянь. В даній роботі запропоновано обґрунтування нестаціонарного колокаційно-ітеративного методу стосовно інтегральних рівнянь.

**Постановка проблеми.** Розглянемо інтегральне рівняння вигляду

$$u(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)u(s)ds, \tag{1}$$

в якому $f(t)$ — задана, неперервна на відрізку $[a,b]$ функція, ядро $K(t,s)$ — неперервна функція в квадраті $\{a \le t, s \le b\}$, $u(t)$ — шукана функція.

Застосуємо до інтегрального рівняння (1) нестаціонарний колокаційно-ітеративний метод.

Суть методу полягає в тому, що наближені розв'язки рівняння (1), згідно даного методу, будуються на основі співвідношення

$$u_k(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s)\left(\vartheta_{k-1}(s) + \omega_k(s)\right)ds, \tag{2}$$

в якому функція $\vartheta_{k-1}(t)$ та функція $\omega_k(t)$ в кожній ітерації шукається у вигляді

$$\vartheta_{k-1}(t) = \sum_{j=0}^{n_{k-1}} c^{k-1}_j \varphi_j(t), \tag{3}$$

$$\omega_k(t) = \sum_{j=0}^{n} a_j^k \varphi_j(t). \tag{4}$$

У співвідношеннях (3), (4) $\{\varphi_j(t)\}$, $j = \overline{0,n}$ — задана система лінійно-незалежних, неперервних на відрізку $[a,b]$ функцій, зокрема система алгебраїчних або тригонометричних поліномів, або В-сплайнів.

Невідомі коефіцієнти $c_j^{k-1}, j=\overline{0,n_{k-1}}$, визначаються із умови мінімуму функціоналу

$$F=\int_a^b \left[\vartheta_{k-1}(t)-u_{k-1}(t)\right]^2 dt\,, \qquad (5)$$

а невідомі коефіцієнти $a_j^k$, $j=\overline{0,n}$ визначаються із умови

$$u_k(t_i)-u_{k-1}(t_i)-\omega_k(t_i)=0\,,\ i=\overline{0,n}\,, \qquad (6)$$

де $t_i\in\left[a,b\right]$ — задані точки, які називаються вузлами колокації.

Припускається, що у співвідношенні (3) $n_k>n_0=n$, $n_{k_2}>n_{k_1}$ при $k_1<k_2$, $k=0,1,2,..,n_k$, де $n$ — деяке фіксоване число.

Умова (5) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $c_j^{k-1}, j=\overline{0,n_{k-1}}$ виду

$$\sum_{j=0}^{n_{k-1}} B_{ij}c_j^{k-1}=d_i^{k-1},\quad i=\overline{0,n_{k-1}},\ \ k\in N, \qquad (7)$$

$$B_{ij}=\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt, \qquad (8)$$

$$d_i^{k-1}=\int_a^b \varphi_i(t)u_{k-1}(t)dt. \qquad (9)$$

Система рівнянь (7) має розв’язок, причому єдиний, бо визначник системи рівнянь (7) є визначник Грама лінійно-незалежних функцій $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, … $\varphi_{n_{k-1}}(t)$, і тому відмінний від нуля.

На основі запропонованих співвідношень (2)—(4) отримаємо

$$u_k(t)-u_{k-1}(t)=\varepsilon_k(t)+\sum_{j=0}^{n} a_j^k K_j(t)\,, \qquad (10)$$

де

$$\varepsilon_k(t)=f(t)+\int_a^b K(t,s)\vartheta_{k-1}(s)ds-u_{k-1}(t), \qquad (11)$$

$$K_j(t)=\int_a^b K(t,s)\varphi_j(s)ds,\quad j=\overline{0,n}\,. \qquad (12)$$

Рівність (10) при врахуванні (6) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих $a_j^k$, $j=\overline{0,n}$, $k\in N$, виду

$$\sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} a_j^k = b_i^k,\ i = \overline{0,n}, \tag{13}$$

в якій

$$\beta_{ij} = \varphi_j(t_i) - K_j(t_i),\ i, j = \overline{0,n}, \tag{14}$$

$$b_i^k = \varepsilon_k(t_i),\ i = \overline{0,n}. \tag{15}$$

Системи рівнянь (13) та (7) представимо в більш компактному вигляді. А саме, систему алгебраїчних рівнянь (13) запишемо у вигляді

$$\Lambda a_k = b_k, \tag{16}$$

де

$$a_k = \left\{a_0^k, a_1^k, ..., a_n^k\right\}, \tag{17}$$

$$b_k = \left\{b_0^k, b_1^k, ..., b_n^k\right\}, \tag{18}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \beta_{00} & \beta_{01} & ... & \beta_{0n} \\ \beta_{10} & \beta_{11} & ... & \beta_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ \beta_{n0} & \beta_{n1} & ... & \beta_{nn} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

а система (7) відповідно у вигляді

$$\Omega_{k-1} c_{k-1} = d_{k-1}, \tag{20}$$

в якій використано позначення

$$\Omega_{k-1} = \begin{pmatrix} B_{00} & B_{01} & ... & B_{0n_{k-1}} \\ B_{10} & B_{11} & ... & B_{1n_{k-1}} \\ ... & ... & ... & ... \\ B_{n_{k-1}0} & B_{n_{k-1}1} & ... & B_{n_{k-1}n_{k-1}} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

$$c_{k-1} = \left\{c_0^{k-1}, c_1^{k-1}, ..., c_n^{k-1}\right\}, \tag{22}$$

$$d_k = \left\{d_0^{k-1}, d_1^{k-1}, ..., d_n^{k-1}\right\}. \tag{23}$$

Надалі будемо вважати, рівняння (16) має єдиний розв'язок, тоді наближення $u_k(t)$ будуються однозначно.

**Умови збіжності методу в просторі** $L_2\left(\left[a,b\right]\right)$**.** Для встановлення достатніх умов збіжності методу, припустимо, що система функцій $\left\{\varphi_j(t)\right\}$, $j = \overline{0,n}$ — фундаментальна, тобто $\varphi_j(t_i) = \delta_{ij}$, де $\delta_{ij}$ — символ Кронекера.

Виконавши нескладні перетворення, можна показати, що побудова функцій $\vartheta_k(t)$ та $\omega_k(t)$ на основі співвідношень (3)-(6) рівносильна обчисленню інтегралів

$$\vartheta_k(t) = \int_a^b P_k(t,s) u_k(s) ds \,, \tag{24}$$

$$\omega_k(t) = \int_a^b S_n(t,s)\big(u_k(s) - u_{k-1}(s)\big) ds \,, \tag{25}$$

де

$$P_k(t,s) = \sum_{i=0}^{n_k} \sum_{j=0}^{n_k} \alpha_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j(s) \,, \tag{26}$$

$$S_n(t,s) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t) \delta(s - t_i) \,, \tag{27}$$

де $\alpha_{i,j}$ — елементи матриці, оберненої до матриці $\Omega_k$, $\delta(s - t_j)$ — дельта-функція Дірака.

Зауважимо, що ядра операторів $P_k$, $S_n$ зв'язані між собою співвідношеннями

$$\int_a^b P_k(t,\tau) S_n(\tau,s) d\tau = S_n(t,s) \,, \tag{28}$$

а оператор

$$P_k \vartheta = \int_a^b P_k(t,s) \vartheta(s) ds \,, \ \forall \vartheta \in L_2\big([a,b]\big) \tag{29}$$

ортогонально проектує простір $L_2\big([a,b]\big)$ на його підпростір.

Нехай рівняння (1) має єдиний розв'язок для кожної функції $f(t)$, тобто

$$u^*(t) = f(t) + \int_a^b K(t,s) u^*(s) ds. \tag{30}$$

На основі співвідношень (30), (2) отримаємо

$$u^*(t) - u_k(t) = \int_a^b K(t,s)\big(u^*(s) - \vartheta_{k-1}(s) - \omega_k(s)\big) ds. \tag{31}$$

Співвідношення (25) для визначення поправки $\omega_k(t)$ запишемо у вигляді

$$\omega_k(t) = \int_a^b K(t,s)\big(u_k(s) - u^*(s) + u^*(s) - u_{k-1}(s)\big) ds = \beta_{k-1}(t) - \beta_k(t) \,, \tag{32}$$

де

$$\beta_k(t) = \int_a^b S_n(t,s)\left(u^*(s) - u_k(s)\right)ds. \qquad (33)$$

Тоді, підставивши співвідношення (32) у (31), отримаємо

$$u^*(t) - u_k(t) = \int_a^b K(t,s)\left(u^*(s) - \vartheta_{k-1}(s) - \beta_{k-1}(s)\right)ds + \int_a^b K(t,s)\beta_k(s)ds. \quad (34)$$

Застосуємо до обох частин співвідношення (34) оператор $S_n$ і врахуємо запропоноване позначення (33), в результаті отримаємо інтегральне рівняння з виродженим ядром.

$$\beta_k(t) = g_k(t) + \int_a^b H_n(t,s)\beta_k(s)ds\ , \qquad (35)$$

де

$$g_k(t) = \int_a^b\int_a^b S_n(t,\tau)K(\tau,s)h_{k-1}(s)dsd\tau\ , \qquad (36)$$

$$H_n(t,s) = \sum_{i=0}^{n} \varphi_i(t)K(t_i,s)\ , \qquad (37)$$

$$h_k(t) = u^*(t) - \vartheta_k(t) - \beta_k(t)\,. \qquad (38)$$

Рівняння (35) рівносильне рівнянню

$$\beta_k(t) - \int_a^b K(t,s)\beta_k(s)ds = g_k(t) + \int_a^b \left(H_n(t,s) - K(t,s)\right)\beta_k(s)ds. \quad (39)$$

Як встановлено у випадку, коли одиниця — регулярне значення рівняння (1), система функцій $\left\{\varphi_j(t)\right\}$, $j = \overline{0,n}$ і вузли колокації $\left\{t_j\right\}$, $j = \overline{0,n}$ підібрані таким чином, що

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\int_a^b \left|K(t,s) - H_n(t,s)^2\right| dtds = 0\ , \qquad (40)$$

то рівняння (39) при достатньо великих $n$ однозначно розв'язне, а отже, однозначно розв'язне і рівняння (35), тобто існує така функція $R_n(t,s)$, що

$$\beta_k(t) = \int_a^b R_n(t,s)g_k(s)ds\ . \qquad (41)$$

Причому функція $R_n(t,s)$ володіє властивістю

$$R_n(t,s) = \int_a^b R_n(t,\tau)S_n(\tau,s)d\tau = \int_a^b S_n(t,\tau)R_n(\tau,s)d\tau. \qquad (42)$$

Тоді, підставивши співвідношення (41) у (34), та врахувавши співвідношення (36), (38), (42), остаточно отримаємо

$$u^*(t)-u_k(t)=\int_a^b M_n(t,s)h_{k-1}(s)ds\,, \tag{43}$$

де оператор $M_n(t,s)$ має вигляд

$$M_n(t,s)=K(t,s)+\int_a^b\int_a^b K(t,\tau)R_n(\tau,\eta)K(\eta,s)d\mu d\tau\ . \tag{44}$$

Отримаємо рекурентне співвідношення для $h_k(t)$.

З цією метою підставимо у співвідношення для $h_k(t)$, що виражається формулою (38) у співвідношення (24) та (33), отримаємо

$$h_k(t)=u^*(t)-\int_a^b P_k(t,s)u_k(s)ds-\int_a^b S_n(t,s)\big(u^*(s)-u_k(s)\big)ds. \tag{45}$$

Одержане співвідношення (45) із врахуванням співвідношень (28) та (43) можна представити у вигляді

$$h_k(t)=\int_a^b\big(\delta(t-s)\big)-P_k(t,s)\big)u^*(s)ds+\int_a^b P_k(t,s)(u^*(s)-u_k(s)\big)ds-$$

$$-\int_a^b\int_a^b P_k(t,\tau)S_n(\tau,s)\Big(u^*(s)-u_k(s)\Big)dsd\tau= \tag{46}$$

$$=\int_a^b\big(\delta(t-s)\big)-P_k(t,s)\big)u^*(s)ds+\int_a^b\int_a^b P_k(t,s)L_n(s,\tau)h_{k-1}(\tau)d\tau ds,$$

де оператор $L_n(t,s)$ має вигляд

$$L_n(t,s)=M_n(t,s)-\int_a^b S_n(t,\tau)M_n(\tau,s)d\tau. \tag{47}$$

Припустимо, що для будь-якої функції $\vartheta\in L_2\big([a,b]\big)$ виконуються нерівності

$$\int_a^b\left\{\int_a^b M_n(t,s)\vartheta(s)ds\right\}^2 dt\le {p_n}^2\int_a^b\vartheta^2(s)ds\,, \tag{48}$$

$$\int_a^b\left\{\int_a^b L_n(t,s)\vartheta(s)ds\right\}^2 dt\le {q_n}^2\int_a^b\vartheta^2(s)ds. \tag{49}$$

**Теорема 1.** Нехай рівняння (1) має єдиний розв’язок для кожної функції $f(t)$, нехай система функцій $\varphi_j(t)$, $j=\overline{0,n}$ та вузли колокації $\left\{t_j\right\}$, $j=\overline{0,n}$ підібрані таким чином, що має місце умова (40) і нехай для $\forall \vartheta \in L_2\left(\left[a,b\right]\right)$

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b \left\{\vartheta(t)-\int_a^b P_k(t,s)\vartheta(s)ds\right\}^2 dt = 0 . \tag{50}$$

Тоді існує такий номер $n_0$, що при всіх фіксованих $n \geq n_0$ послідовність $\left\{u_k(t)\right\}$, побудована згідно колокаційно-ітеративного методу (2)—(6) збігаються в середньому до розв'язку $u^*(t)$, тобто

$$\lim_{k\to\infty}\left\|u^*-u_k\right\|^2 = 0 . \tag{51}$$

**Доведення.** На основі співвідношень (43), (46), та того факту, що в $L_2\left(\left[a,b\right]\right)$ норма оператора $\left\|P_k\right\|=1$, отримаємо оцінки

$$\left\|u^*-u_k\right\|^2 \leq p_n{}^2\left\|h_{k-1}\right\|^2 , \tag{52}$$

$$\left\|h_k\right\|^2 \leq \left\|e_k\right\|^2 + q_n{}^2\left\|h_{k-1}\right\|^2 , \tag{53}$$

в яких використано позначення

$$e_k(t) = u^*(t) - \int_a^b P_k(t,s)u^*(s)ds . \tag{54}$$

Оскільки

$$\left\|h_{k-1}\right\|^2 \leq \left\|e_{k-1}\right\|^2 + q_n{}^2\left\|h_{k-2}\right\|^2 ,$$

$$\left\|h_{k-2}\right\|^2 \leq \left\|e_{k-3}\right\|^2 + q_n{}^2\left\|h_{k-3}\right\|^2 ,$$

то продовжуючи цей процес далі, отримаємо

$$\left\|h_k\right\|^2 \leq \left\|e_k\right\|^2 + q_n{}^2\left\|e_{k-1}\right\|^2 + \ldots + q_n{}^{2k-2}\left\|e_1\right\|^2 + q_n{}^{2k}\left\|h_0\right\|^2 .$$

Замінюючи в останній нерівності індекс $k$ на $k-1$, та підставляючи результат в (52), отримаємо

$$\left\|u^*-u_k\right\|^2 \leq p_n{}^2\left(\left\|e_{k-1}\right\|^2 + q_n{}^2\left\|e_{k-2}\right\|^2 + \ldots + q_n{}^{2k-4}\left\|e_1\right\|^2 + q_n{}^{2k-2}\left\|h_0\right\|^2\right). \tag{55}$$

Звідси випливає, що завжди можна вибрати такий номер $n$, для якого $q_n < 1$, і тим самим забезпечити збіжність ряду

$$1 + q_n + q_n{}^2 + \ldots + q_n{}^k + \ldots . \tag{56}$$

Оскільки ряд (56) збігається, і має місце умова (50) теореми, то перейшовши до границі в (55) з урахуванням леми 3.1 [3], отримаємо

$$\lim_{k\to\infty}\left\|u^*-u_k\right\|^2 = 0 .$$

**Теорема 2.** Якщо $q_n < 1$, то справедлива оцінка

$$\int_a^b \left|u^*(t) - u_k(t)\right|^2 dt \le p_n{}^2 \sum_{i=1}^{k-1} q_n{}^{2i-2} \int_a^b e^2_{k-i}(t)dt + p_n{}^2 q_n^{2k-2} \int_a^b h_0{}^2(t)dt, \quad (57)$$

яка характеризує швидкість збіжності методу, та конструктивна оцінка

$$\left\{\int_a^b \left|u^*(t) - u_k(t)\right|^2 dt\right\}^{1/2} \le \frac{p_n}{1-q_n}\left\{\int_a^b \Delta_k{}^2(t)\right\}^{1/2}, \quad (58)$$

$$\Delta_k(t) = u_k(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \omega_k(t). \quad (59)$$

**Доведення.** Оцінка (57) випливає із оцінки (55). Переконаємося в справедливості оцінки (58).

З цією метою розглянемо співвідношень (38), яке із врахуванням співвідношень (43) та (32), перетворимо таким чином

$$h_{k-1}(t) = u^*(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \beta_{k-1}(t) = {}^*(t) - u_k(t) + u_k(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \beta_{k-1}(t) =$$

$$= \int_a^b M_n(t,s)h_{k-1}(s)ds + u_k(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \omega_k(t) - \beta_k(t).$$

Дальше скористаємося співвідношеннями (33), (43) та співвідношенням (47), отримаємо

$$h_{k-1}(t) = \int_a^b M_n(t,s)h_{k-1}(s)ds + u_k(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \omega_k(t) -$$

$$-\int_a^b S_n(t,s)\left(u^*(s) - u_k(s)\right)ds = u_k(t) - \vartheta_{k-1}(t) - \omega_k(t) = \int_a^b M_n(t,s)h_{k-1}(s)ds -$$

$$-\int_a^b\int_a^b S_n(t,\tau)M_n(\tau,s)h_{k-1}(s)dsd\tau = \Delta_k(t) + \int_a^b L_n(t,s)h_{k-1}(s)ds.$$

Тоді

$$\left\|h_{k-1}\right\| \le \left\|\Delta_k\right\| + q_n\left\|h_{k-1}\right\|,$$

або

$$\left\|h_{k-1}\right\| \le \frac{1}{1-q_n}\left\|\Delta_k\right\|. \quad (60)$$

На основі співвідношень (43) та (60) остаточно отримаємо

$$\left\{\int_a^b \left|u^*(t) - u_k(t)\right|^2 dt\right\}^{1/2} \le \frac{p_n}{1-q_n}\left\{\int_a^b \Delta_k{}^2(t)\right\}^{1/2}$$

**Теорема доведена.**

**Список використаних джерел:**

1. Луцев Е. М. Об одном варианте проекционно-итеративного метода / Е. М. Луцев // Приближенные и качественные методы теории дифференциально-функциональных уравнений. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1983. — С. 54–63.
2. Луцев Е. М. Коллокационно-итератвный метод решения линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода / Е. М. Луцев // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. — К. : Наук. думка, 1989. — С. 132–138.
3. Лучка А. Ю. Прекционно-итеративные методы / А. Ю. Лучка. — К. : Наук. думка, 1993. — 288 с.

The questions of the convergence non stationary collocation-iterative method of Fredholm integral equations solutions are considered in this article. The conditions of the method convergence are found here

**Key words:** *integral equations, collocation- iterative method, convergence method.*

Отримано: 12.03.2012

УДК 517.5

**В. А. Сорич,** канд. фіз.-мат. наук, доцент,
**Н. М. Сорич,** канд. фіз.-мат. наук, доцент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## СУМІСНЕ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ $\overline{\psi}$ -ІНТЕГРАЛІВ СУМАМИ ФЕЙЄРА

Одержано асимптотичні рівності для величини, яка характеризує сумісне наближення класів $\overline{\psi}$-інтегралів сумами Фейєра в рівномірній метриці.

**Ключові слова**: *сумісне наближення, суми Фейєра, класи $\overline{\psi}$ -інтегралів*

**Вступ.** Відомо, що метод підсумовування тригонометричних рядів за допомогою середніх арифметичних частинних сум ряду є насиченим, причому класом насичення є клас $W_1^1$. У цій роботі розглядається сумісне наближення сумами Фейєра класів $\overline{\psi}$-інтегралів, які включаються в клас насичення, в рівномірній метриці.