2. Корн Т. Справочник по математике / Т. Корн, Г. Корн. — М. : Наука, 1977. — 832 с.
3. Левитан Б. И. Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. И. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 2. — С. 102–143.
4. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1977. — 736 с.
5. Кириллов А. А. Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Наука, 1979. — 384 с.
6. Владимиров В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 528 с.
7. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.

The new classes of functions-symbols and new classes of pseudo-differential operators, which are built on such characters by direct and inverse Bessel transformation, are defined in the paper. The correct solvability of the Cauchy problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators with initial functions of the spaces such as Sobolev—Schwartz distributions is set.

Key words: *Bessel transformation, spaces of basic functions, spaces of generalized functions, the Cauchy problem, pseudo-Bessel operators.*

Отримано: 14.06.2011

УДК 517.956

В. І. Мироник, канд. фіз.-мат. наук,
І. С. Тупкало, асистент

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКІВ ДВОТОЧКОВОЇ ЗА ЧАСОМ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ СИНГУЛЯРНИХ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

Знайдено умову існування області, в якій розв'язок двоточкової за часом задачі є обмеженою функцією за сукупністю змінних.

Ключові слова: *двоточкова за часом задача, еволюційні рівняння, оператор Бесселя нескінченного порядку, узагальнена функція типу розподілів.*

У праці [1] встановлено коректну розв'язність двоточкової за часом задачі для еволюційного рівняння з оператором Бесселя нескінченного порядку в класі крайових умов типу розподілів. Розв'язок $u(t,x),(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}$, такої задачі при кожному $t\in(0,T)$ є обмеженою функцією змінної x, тобто $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|u(t,x)|\le c(t)$, функція

$c(t)$ неперервно диференційовна на $(0,T)$; поведінка цієї функції в околі точки $t=0$, взагалі кажучи, невідома. Крайову умову розв'язок задовольняє в сенсі узагальнених функцій. Природно виникає питання про дослідження властивостей $c(t)$ в залежності від властивостей граничної узагальненої функції. У статті знайдено умову існування області $\Pi \subset (0,T)\times\mathbb{R}$, в якій справджується нерівність $|u(t,x)|\le c$, де стала $c>0$ не залежить від змінних t та x.

1. Простори основних функцій $S(\mathbb{R}), \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$**.** Простір $S\equiv S(\mathbb{R})$ складається з нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які спадають при $|x|\to+\infty$ разом з усіма своїми похідними швидше за будь-який степінь $|x|^{-1}$, тобто $\varphi\in S$, якщо

$$\forall\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+\ \exists c_{km}=c_{km}(\varphi)>0\ \forall x\in\mathbb{R}:\left|x^k D_x^m\varphi(x)\right|\le c_{km}.$$

Послідовність функцій $\{\varphi_n, n\ge 1\}\subset S$ називається збіжною в S до функції $\varphi\in S$, якщо

$$\forall\{k,m\}\subset\mathbb{Z}_+ : x^k D_x^m\varphi_n \underset{n\to\infty}{\overset{\mathbb{R}}{\rightrightarrows}} x^k D_x^m\varphi.$$

У просторі S визначені, є лінійними і неперервними операції диференціювання та лінійної заміни змінної. Мультиплікатором у просторі S є кожна нескінченно диференційовна функція α, яка зростає на нескінченності разом з усіма своїми похідними не швидше за поліном, тобто

$$\forall m\in\mathbb{Z}_+\ \exists c_m>0\ \exists p_m\in\mathbb{Z}_+\ \forall x\in\mathbb{R}:\left|D_x^m\alpha(x)\right|\le c_m\left(1+|x|\right)^{p_m}.$$

В S можна ввести структуру зліченно нормованого простору, якщо покласти

$$\|\varphi\|_p=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\ 0\le m\le p}}\left\{\left(1+|x|\right)^p\left|D_x^m\varphi(x)\right|\right\},\ p\in\mathbb{Z}_+,\varphi\in S.$$

Очевидно, що $\|\varphi\|_0\le\|\varphi\|_1\le\ldots\le\|\varphi\|_p\le\ldots$. Символом $S_p\equiv S_p(\mathbb{R})$ позначимо поповнення простору S за p-ою нормою; при цьому $S_0\supset S_1\supset\ldots$, вкладення $S_{p+1}\subset S_p$, $p\in\mathbb{Z}_+$ є неперервними і компактними. Отже, $S=\lim\limits_{p\to\infty} prS_p$. Збіжність в отриманому зліченно нормованому просторі співпадає з раніше введеною збіжністю в S. Простір S є повним [2].

Символом $\overset{\circ}{S} \equiv \overset{\circ}{S}(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупність усіх парних функцій з простру S. Оскільки $\overset{\circ}{S}$ утворює підпростір S, то в $\overset{\circ}{S}$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором, а його елементи — основними функціями. У просторі $\overset{\circ}{S}$ визначені і є неперервними оператор Бесселя $B_\nu = d^2/dx^2 + (2\nu+1)x^{-1}d/dx, \nu > -1/2$, оператор узагальненого зсуву аргументу T_x^ξ, який відповідає оператору Бесселя [3]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi\left(\sqrt{x^2+\xi^2-2x\xi\cos\omega}\right)\sin^{2\nu}\omega d\omega,\ \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/\left(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2)\right),\ \nu > -1/2$, а також пряме та обернене перетворення Бесселя $F_{B_\nu}, F_{B_\nu}^{-1}$ [3]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_{B_\nu}[\varphi](\sigma) := \int_0^\infty \varphi(x)\, j_\nu(\sigma x)\, x^{2\nu+1}dx,\ \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

$$\varphi(x) \equiv F_{B_\nu}^{-1}[\psi](x) = c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma)\, j_\nu(\sigma x)\, \sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

де $c_\nu = \left(2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)\right)^{-1}, \nu > -1/2,\ j_\nu$ — нормована функція Бесселя, при цьому $F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{S}\right] = \overset{\circ}{S}$. Оскільки до основних функцій з простору $\overset{\circ}{S}$ можна скільки завгодно разів застосовувати оператор Бесселя, то простір $\overset{\circ}{S}$ можна означити ще й так [4]:

$$\overset{\circ}{S} = \left\{\varphi \in S : \varphi(x) = \varphi(-x), x \in \mathbb{R} \mid \forall\{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+\ \ \exists c_{km} > 0\right.$$
$$\left.\forall x \in \mathbb{R} : \left(1+x^2\right)^k \left|B^m \varphi(x)\right| \le c_{km}\right\}.$$

Зазначимо також, що операція узагальненого зсуву аргументу диференційовна (навіть нескінченно диференційовна) в просторі $\overset{\circ}{S}$ в тому розумінні, що граничні співвідношення вигляду

$$\frac{1}{\Delta\xi}\left(T_x^{\xi+\Delta\xi}\varphi(x) - T_x^\xi \varphi(x)\right) \to \frac{\partial}{\partial\xi}T_x^\xi \varphi(x),\ \Delta\xi \to 0,$$

справджуються для кожної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}$ у сенсі збіжності за топологією цього простору.

2. Простори типу W та $\overset{\circ}{W}$. Розглянемо функцію ω: $[0,\infty)\to[0,\infty)$, яка є неперервною і зростаючою, причому $\omega(0)=0$. Для $x\geq 0$ покладемо $\Omega(x)=\int\limits_0^x \omega(\xi)d\xi$. Маємо, що $\Omega(0)=0$, Ω — диференційовна, зростаюча на $[0,\infty)$ функція. Крім того (див. [5]), функція Ω володіє наступними властивостями:

а) $\Omega(x_1)+\Omega(x_2)\leq\Omega(x_1+x_2)$, $\forall\{x_1,x_2\}\subset[0,\infty)$;

б) $\forall\alpha\geq 1\ \forall x\in[0,\infty)$: $\Omega(\alpha x)\geq\alpha\Omega(x)$;

в) $\forall\alpha\in(0,1)\ \forall x\in[0,\infty)$: $\Omega(\alpha x)\leq\alpha\Omega(x)$.

Оскільки похідна функції Ω при $x\to+\infty$ необмежено зростає, то $\Omega(x)$ при $x\to+\infty$ зростає швидше за довільну лінійну функцію. На проміжок $(-\infty,0]$ функцію Ω продовжимо парним чином. Поруч з функцією ω розглянемо функцію μ: $[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, яка володіє такими ж властивостями, що і функція ω. Для $x\geq 0$ покладемо $M(x)=\int\limits_0^x \mu(\xi)d\xi$, $M(-x)=M(x)$. Функція M аналогічна за своїми властивостями до функції Ω.

За допомогою функцій M та Ω Б. Гуревич [5] ввів простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$, названі ним просторами типу W. Зокрема, символом W_M^Ω позначається сукупність цілих функцій $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, для яких

$$\exists c>0\ \exists a>0\ \exists b>0\ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}: |\varphi(z)|\leq c\exp\{-M(ax)+\Omega(by)\}$$

(сталі c,a,b залежать лише від функції φ). Символом $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ позначимо сукупність усіх цілих парних функцій з простору W_M^Ω. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$, позначимо через $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. Із результатів, отриманих в [6], випливає, що $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})\subset S(\mathbb{R})$. Отже, на функціях з простору $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ визначене перетворення Бесселя, при цьому

$F_{B_\nu}\left[\overset{\circ}{W}{}_M^{\Omega}(\mathbb{R})\right] = \overset{\circ}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, де Ω_1 та M_1 — функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω [7].

3. Простір узагальнених функцій $\left(\overset{\circ}{S}\right)'$. Символом $\left(\overset{\circ}{S}\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями.

Оскільки в основному просторі $\overset{\circ}{S}$ введена топологія проективної границі просторів $\overset{\circ}{S}_p$ ($\overset{\circ}{S}_p$ складається з парних функцій простору S_p), причому вкладення $\overset{\circ}{S}_{p+1} \subset \overset{\circ}{S}_p$, $p \in \mathbb{Z}_+$, неперервні та компактні, то $\left(\overset{\circ}{S}\right)' = \left(\lim\limits_{p\to\infty} pr\, \overset{\circ}{S}_p\right)' = \lim\limits_{p\to\infty} ind \left(\overset{\circ}{S}_p\right)'$. Отже, якщо $f \in \left(\overset{\circ}{S}\right)'$, то $f \in \left(\overset{\circ}{S}_p\right)'$ при деякому $p \in \mathbb{Z}_+$. Найменше з таких p називається порядком f, при цьому $\left|\langle f, \varphi\rangle\right| \le c\|\varphi\|_p$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}$, де $c = \|f\|_p$ — норма функціоналу f у просторі $\left(\overset{\circ}{S}_p\right)'$ (тут $\langle f, \varphi\rangle$ позначає значення функціоналу f на основній функцій φ).

Згортку узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{S}\right)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) = \left\langle f_\xi, T_x^\xi \varphi(x)\right\rangle = \left\langle f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi)\right\rangle, \ \varphi \in \overset{\circ}{S},$$

при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією, оскільки операція узагальненого зсуву аргументу нескінченно диференційовна в просторі $\overset{\circ}{S}$.

Нехай $f \in \left(\overset{\circ}{S}\right)'$. Якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}$, $\forall \varphi \in \overset{\circ}{S}$ і із співвідношення $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}$ випливає, що

$f*\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ за топологією простору $\overset{\circ}{S}$, то функціонал f називається згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}$.

Якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}$, то $F_{B_\nu}[\varphi] \in \overset{\circ}{S}$, тому перетворення Бесселя узагальненої функції $f \in \left(\overset{\circ}{S}\right)'$ визначимо за допомогою співвідношення (див. [4]).

$$\left\langle F_{B_\nu}[f], \varphi \right\rangle = \left\langle f, F_{B_\nu}[\varphi] \right\rangle, \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}. \tag{1}$$

З (1), властивості лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Бесселя випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_{B_\nu}[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{S}$. Якщо узагальнена функція $f \in \left(\overset{\circ}{S}\right)'$ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}$ правильною є формула [4]: $F_{B_\nu}[f*\varphi] = F_{B_\nu}[f] \cdot F_{B_\nu}[\varphi]$, при цьому $F_{B_\nu}[f]$ – мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}$.

4. Основні результати. Розглянемо двоточкову задачу для еволюційного рівняння

$$\partial u(t,x)/\partial t = Bu(t,x),\ (t,x) \in (0,T) \times \mathbb{R}_+ \equiv \Omega_+, \tag{2}$$

де оператор B побудований за символом $A(\sigma)$, який, як функція σ, задовольняє наступні умови: функція $A(\sigma)$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину, $A \in \overset{\circ}{P}{}_M^\Omega$, де символом $\overset{\circ}{P}{}_M^\Omega$ позначено клас цілих парних однозначних функцій $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторах $\overset{\circ}{S}$ та $\overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$ і такими, що $e^\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_M^\Omega$. Якщо розвинення функції A в степеневий ряд має вигляд

$$A(\sigma) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k}\sigma^{2k}, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

то, як випливає з результатів, наведених в [1], у просторі $\overset{\circ}{S}$ визначений і є неперервним оператор

$$B=\sum_{k=0}^{\infty}c_{2k}\left(-B_{\nu}\right)^{k}\equiv F_{B_{\nu}}^{-1}\left[A(\sigma)F_{B_{\nu}}\right],\quad \nu>-1/2,$$

який в [1] названо оператором Бесселя нескінченного порядку.

Двоточкова за часом задача для рівняння (2) у праці [1] ставиться так: знайти функцію $u\in C^{1}\left(\left(0,T\right),\overset{\circ}{S}\right)$, яка задовольняє рівняння (2) та крайову умову

$$\mu_1 u(t,\cdot)|_{t=0}-\mu_2 u(t,\cdot)|_{t=T}=f,\quad f\in\left(\overset{\circ}{S}_{*}\right)' \tag{3}$$

(μ_1,μ_2 — фіксовані параметри, $\mu_1>\mu_2>0$) у тому сенсі, що

$$\mu_1\lim_{t\to+0}u(t,\cdot)-\mu_2\lim_{t\to T-0}u(t,\cdot)=f, \tag{4}$$

де границі розглядаються в просторі $\left(\overset{\circ}{S}\right)'$. В [1] доведено, що задача (2), (3) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $\left(\overset{\circ}{S}_{*}\right)'$, її розв'язок $u(t,x)$ подається у вигляді згортки $(f*\Gamma)(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_{+}$, де

$$\Gamma(t,x)=F_{B_{\nu}}^{-1}\left[\frac{\exp\{tA(\sigma)\}}{\mu_1-\mu_2\exp\{TA(\sigma)\}}\right]=\mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-(k+1)}G(t+kT,x),$$

$$\mu=\mu_1/\mu_2>1,\quad (t,x)\in(0,T]\times\mathbb{R}\equiv\Omega,$$

$G(t,x)$ — фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (2). Відомо [1], що $\Gamma(t,x)$ при кожному $t\in(0,T)$, як функція аргументу x, є елементом простору $\overset{\circ}{S}$; $\Gamma(t,\cdot)$, як абстрактна функція параметра $t\in(0,T)$ із значеннями в просторі $\overset{\circ}{S}$, диференційовна по t, $\Gamma(t,x)$ задовольняє рівняння (2) та граничне співвідношення

$$\mu_1\lim_{t\to+0}\Gamma(t,\cdot)-\mu_2\lim_{t\to T-0}\Gamma(t,\cdot)=\delta,$$

де δ — дельта-функція Дірака, а вказані границі розглядаються в просторі $\left(\overset{\circ}{S}\right)'$. У праці [1] функція Γ називається фундаментальним розв'язком двоточкової задачі (ФРДЗ) (2), (3).

Теорема. Нехай $u(t,x)$ — розв'язок задачі (2), (3), $f=0$ на інтервалі $(-a,a)\subset\mathbb{R}$ (тобто $\langle f,\varphi\rangle=0, \forall\varphi\in\overset{\circ}{S}:\operatorname{supp}\varphi\subset(-a,a)$), $[-b,b]\subset(-a,a)$ — довільно фіксований відрізок, $\Pi:=(0,T)\times[-b,b]$. Тоді $\exists L>0: \sup\limits_{(t,x)\in\Pi}|u(t,x)|\le L$.

Доведення. Нехай $[-c,c]\subset\mathbb{R}$ такий відрізок, що $[-b,b]\subset\subset[-c,c]\subset(-a,a)$. Побудуємо функцію $\gamma\in\overset{\circ}{S}$, яка володіє властивостями: $\gamma=1$ на $[-c,c]$, $0\le\gamma(\xi)\le 1$, $\forall\xi\in(-a,a)$, $\operatorname{supp}\gamma\subset(-a,a)$ (така функція існує, бо простір $\overset{\circ}{S}$ містить фінітні парні функції). Оскільки при кожному $t\in(0,T)$ і $x\in\mathbb{R}$ функції $\gamma(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\xi)$, $(1-\gamma(\xi))\times T_\xi^x\Gamma(t,\xi)$, як функції ξ, є елементами простору $\overset{\circ}{S}$, то правильною є рівність

$$u(t,\xi)=\left\langle f_\xi,\gamma(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\xi)\right\rangle+\left\langle f_\xi,\nu(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\xi)\right\rangle,$$

де $\nu=1-\gamma$. Урахувавши те, що $f=0$ на інтервалі $(-a,a)\subset\mathbb{R}$, а $\operatorname{supp}\left(\gamma(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\xi)\right)\subset(-a,a)$, з останнього співвідношення дістаємо, що $u(t,x)=\left\langle f_\xi,\nu(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\xi)\right\rangle$. Оскільки кожна узагальнена функція $f\in\left(\overset{\circ}{S}\right)'$ має скінченний порядок, то

$$|u(t,x)|\le\|f\|_p\cdot\left\|\Phi_{t,x}\right\|_p,$$

де $\Phi_{t,x}(\xi)=\nu(\xi)T_\xi^x\Gamma(t,\xi)$, $\|f\|_p$ — норма функціоналу f. Отже, для доведення того, що $\sup\limits_{(t,x)\in\Pi}|u(t,x)|\le L$, досить встановити, що сукупність функцій $\Phi_{t,x}$ обмежена за нормою простору S_p, тобто $\left\|\Phi_{t,x}\right\|_p\le c_p$, де стала c_p не залежить від параметрів t і x, які змінюються вказаним способом. Оскільки $\Phi_{t,x}(\xi)=0$ для $\xi\in[-c,c]$, то оцінку $\left\|\Phi_{t,x}\right\|_p\le c_p$ досить встановити для $\xi\in\mathbb{R}\setminus[-c,c]$.

Функція $\gamma\in S=\bigcap\limits_{j=0}^{\infty}S_j$, тобто $\gamma\in S_p$, причому

$$\left|D_\xi^m \gamma(\xi)\right| \le \frac{b_p}{\left(1+|\xi|\right)^p}, \quad 0 \le m \le p, \quad b_p = \|\gamma\|_p, \ \xi \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Тоді, урахувавши формулу диференціювання добутку двох функцій, знайдемо, що

$$\left(1+|\xi|\right)^p \left|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)\right| = \left(1+|\xi|\right)^p \left|D_\xi^m \nu(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\right| =$$

$$= \left(1+|\xi|\right)^p \left|D_\xi^m \left(T_\xi^x \Gamma(t,\xi) - \gamma(\xi) T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\right)\right| \le$$

$$\le \left(1+|\xi|\right)^p \left|D_\xi^m T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\right| + \left(1+|\xi|\right)^p \sum_{l=0}^{m} C_m^l \left|D_\xi^l T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\right| \cdot \left|D_\xi^{m-l} \gamma(\xi)\right|.$$

Нагадаємо, що

$$\Gamma(t,\xi) = \mu_2^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \mu^{-(k+1)} G(t+kT,\xi), \quad \mu = \mu_1 / \mu_2 > 1,$$

де $G(t,\xi)$ — фундаментальний розв’язок задачі Коші для рівняння (2). Із результатів, наведених в [8], випливає, що $G(t,\cdot) \in W_{M_1}^{\Omega_1}$ при кожному $t \in (0,T)$, де M_1 — функція, двоїста за Юнгом до Ω, Ω_1 — функція, двоїста за Юнгом до M; при цьому справджуються оцінки:

$$\left|D_\xi^n T_\xi^x G(t,\xi)\right| \le c b_2^n \rho_n^{-n}(t) n! t^{-(n+\tilde{\omega}_0)} \exp\left\{-t M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1 t}\right)\right\}, \tag{6}$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \ \tilde{\omega}_0 = (\omega_0 + 3/2)/\alpha,$$

де $\omega_0 = \nu$, якщо $0 < T \le 1$ і $\omega_0 = 0$, якщо $T > 1$, $\alpha > \omega_0 + 3/2$, α — фіксоване, $\rho_n(t)$ — розв’язок рівняння $x\omega_1(x) = n/t, n \in \mathbb{Z}_+$, ω_1 — функція, за якою будується функція Ω_1; $c, b_1, b_2 > 0$ — деякі сталі.

Нехай $a_0 = c - b > 0$. Тоді для $x \in [-b,b]$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-c,c]$ справджується нерівність $|x-\xi| \ge a_0$. Скориставшись тим, що $M_1(y) \ge y^\mu, y \in [0,\infty)$, де $\mu = (2\nu+2)/(2\nu+2-\lambda), 0 < \lambda < 1$ (див. [8]), знайдемо, що

$$(t+kT)^{-(l+\tilde{\omega}_0)} \exp\left\{-(t+kT) M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1(t+kT)}\right)\right\} \le$$

$$\le (t+kT)^{-(l+\tilde{\omega}_0)} \exp\left\{-(t+kT)\left(\frac{|x-\xi|}{b_1(t+kT)}\right)^\mu\right\} \le$$

$$\le \left(t+kT\right)^{-\left(l+\tilde{\omega}_0\right)} \exp\left\{-\left(\frac{a_0}{b_1}\right)^{\mu}\left(t+kT\right)^{-\beta_0}\right\} \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha_0}{\delta_0\beta_0}\right)^{\frac{\alpha_0}{\beta_0}} \le B_0, \quad k\in\mathbb{Z}_+, l: 0\le l\le m,$$

де $\alpha_0 = l+\tilde{\omega}_0$, $\beta_0 = \lambda/\left(2\nu+2-\lambda\right)$, $\delta_0 = a_0/b_1$, $B_0 = B_0\left(m\right)$.

Елементи послідовності $\left\{\rho_l\left(t+kT\right), l\ge 1\right\}$ (при фіксованому $k\in\mathbb{Z}_+$) є розв'язками рівнянь

$$\rho_l\left(t+kT\right)\omega_1\left(\rho_l\left(t+kT\right)\right) = \frac{l}{t+kT}, \quad l\ge 1.$$

Отже,

$$\frac{1}{\rho_l^l\left(t+kT\right)} = \frac{\omega_1^l\left(\rho_l\left(t\right)\right)\left(t+kT\right)^l}{l^l} \le \frac{\omega_1^l\left(\rho_l\left(t\right)\right)T^l\left(k+1\right)^l}{l^l}, \quad 0\le l\le m$$

$\left(0^0 := 1\right)$. Оскільки t змінюється на проміжку $\left(0,T\right)$, функції ω_1 та ρ_l є зростаючими, то $\omega_1^l\left(\rho_l\left(t\right)\right)\le B, t\in\left(0,T\right)$, де $B = B\left(m\right)$, $\forall l: 0\le l\le m$. Отже,

$$\frac{1}{\rho_l^l\left(t+kT\right)} \le B_1, \forall t: t\in\left(0,T\right), B_1 = B_1\left(m\right), \forall l: 0\le l\le m, k\in\mathbb{Z}_+.$$

Таким чином, урахувавши (6) та встановлені вище оцінки, знайдемо, що

$$\left|D_\xi^l T_\xi^x \Gamma\left(t,\xi\right)\right| = \mu_2^{-1}\left|\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-\left(k+1\right)} D_\xi^l T_\xi^x G\left(t+kT,\xi\right)\right| \le$$

$$\le \mu_2^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-\left(k+1\right)}\left|D_\xi^l T_\xi^x G\left(t+kT,\xi\right)\right| \le \mu_2^{-1}B_3\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-\left(k+1\right)} \equiv L_1\left(m\right) < \infty,$$

$$B_3 = B_0 B_1 m! b_3, \; b_3 = \max\left\{b_2,\ldots,b_2^m\right\}.$$

Звідси та з нерівностей (5) випливає, що

$$\left(1+\left|\xi\right|\right)^p \sum_{l=0}^{m} C_m^l \left|D_\xi^l T_\xi^x \Gamma\left(t,\xi\right)\right| \cdot \left|D_\xi^{m-l}\gamma\left(\xi\right)\right| \le L_2 < \infty, \quad 0\le m\le p,$$

де $L_2 = L_2\left(p\right) > 0$.

Оскільки $|\xi| \ge c$, то $\left(1+\left|\xi\right|\right)^p \le N\cdot\left|\xi\right|^p$, де $N = \left(\max\left\{1,c\right\}\right)^p$. Тоді

$$\left(1+\left|\xi\right|\right)^p \left|D_\xi^m T_\xi^x \Gamma\left(t,\xi\right)\right| \le N\mu_2^{-1}\left|\xi\right|^p \sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-\left(k+1\right)}\left|D_\xi^m T_\xi^x G\left(t+kT,\xi\right)\right|.$$

Для оцінки останнього виразу скористаємося нерівністю (6), яку запишемо в наступному вигляді:

$$\left|D_\xi^n T_\xi^x G(t,\xi)\right| \le c b_2^m \rho_m^{-m}(t) m! t^{-(m+\tilde{\omega}_0)} \times$$

$$\exp\left\{-\frac{t}{2} M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1 t}\right)\right\} \exp\left\{-\frac{t}{2} M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1 t}\right)\right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+.$$

Урахувавши те, що $M_1(y) \ge \nu_0 y$, $y \in [0,\infty)$, прийдемо до оцінок:

$$|\xi|^p \exp\left\{-\frac{(t+kT)}{2} M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1(t+kT)}\right)\right\} \le \frac{2^p p! |\xi|^p}{(t+kT)^p M_1^p\left(\frac{|x-\xi|}{b_1(t+kT)}\right)} \le$$

$$\le \frac{2^p p! b_1^p (t+kT)^p |\xi|^p}{(t+kT)^p \nu_0^p |x-\xi|^p} = 2^p p! b_1^p \nu_0^{-p} \left(\frac{|\xi|}{|x-\xi|}\right)^p, \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки $x \in [-b,b]$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-c,c]$, то існує стала $M_0 > 0$ така, що $|\xi| / |x-\xi| \le M_0$. Тоді

$$|\xi|^p \exp\left\{-\frac{(t+kT)}{2} M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1(t+kT)}\right)\right\} \le 2^p p! b_1^p \nu_0^{-p} M_0^p \equiv \tilde{M},$$

$$\tilde{M} = \tilde{M}(p) > 0.$$

Вираз

$$\frac{1}{p_m^m(t+kT)} (t+kT)^{-(m+\tilde{\omega}_0)} \exp\left\{-\frac{(t+kT)}{2} M_1\left(\frac{|x-\xi|}{b_1(t+kT)}\right)\right\}$$

оцінюємо аналогічно тому, як це зроблено раніше; при цьому використовуємо нерівність $|x-\xi| \ge a_0$ ($x \in [-b,b]$, $\xi \in \mathbb{R} \setminus [-c,c]$). В результаті одержимо, що

$$(1+|\xi|)^p \left|D_\xi^m T_\xi^x \Gamma(t,\xi)\right| \le \tilde{\tilde{M}},$$

де стала $\tilde{\tilde{M}} > 0$ не залежить від t, x, які змінюються вказаним способом. Із отриманих оцінок випливає, що

$$\left\|\Phi_{t,x}\right\|_p = \sup_{\substack{\xi \in \mathbb{R} \\ 0 \le m \le p}} \left\{(1+|\xi|)^p \left|D_\xi^m \Phi_{t,x}(\xi)\right|\right\} \le c_p,$$

де стала $c_p > 0$ не залежить від t та x.

Теорема доведена.

Зауваження. Твердження теореми залишається вірним, якщо $f = 0$ на довільній відкритій обмеженій множині $Q \subset \mathbb{R}$, яка володіє властивостями: 1) $0 \notin Q$; 2) якщо $x \in Q$, то $-x \in Q$.

Список використаних джерел:

1. Тупкало І. С. Двоточкова задача для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку / І. С. Тупкало // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. — Чернівці : Рута, 2009. — Вип. 454. — С. 116–127.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физиики / В. С. Владимиров. — М. : Наука, 1976. — 527 с.
3. Левитан Б. И. Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье / Б. И. Левитан // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, вып. 2. — С. 102–143.
4. Житомирский Я. И. Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных з дифференциальным оператором Бесселя / Я. И. Житомирский // Матем. сб. — 1955. — Т. 36, № 2. — С. 299–310.
5. Гуревич Б. Л. Некоторые пространства основных и обобщенных функций и проблема Коши для конечно-разностных схем / Б. Л. Гуревич // Докл. АН СССР. — 1954. — Т. 99, № 6. — С. 893–896.
6. Готинчан Т. І. Про нетривіальність та вкладення просторів типу W / Т. І. Готинчан // Науковий вісник Чернівецького університету : зб. наук. праць. Вип. 160. Математика. — Чернівці : Рута, 2003. — С. 39–44.
7. Креxивский В. В. Теоремы единственности решений задачи Коши для уравнений с оператором Бесселя / В. В. Креxивский // Математическое моделирование физических процессов. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1989. — С. 82–86.
8. Городецкий В. В. Задача Коши для эволюционных уравнений с операторами Бесселя бесконечного порядка / В. В. Городецкий, И. С. Тупкало // Дифференц. уравнения. — 2011. — Т. 47, № 3. — С. 335–348.

We found the condition of the existence of a region, where a solution of two-point by time problem is a jointly bounded function.

Key words: *two-point by time problem, evolutional equation, Bessel operator of ifinite order, generalized function of distribution type.*

Отримано: 28.03.2012