

УДК 532.465

ВЛИЯНИЕ ОБРУШЕНИЯ ВЕТРОВЫХ ВОЛН НА СТРУКТУРУ ПРИПОВЕРХНОСТНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО СЛОЯ

В. С. МАДЕРИЧ, И. А. БРОВЧЕНКО

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 20.03.2003

Рассматривается динамика приповерхностного турбулентного слоя океана и влияние на его структуру обрушения ветровых волн. В представленной модели источниками турбулентности являются касательное напряжение ветра и случайные вспышки турбулентности. В отличие от предшествующих моделей, в рассмотрение включен слой обрушения волн, в котором приток энергии турбулентности и скорости диссипации от разрушающихся волн учитывается введением постоянных по глубине слоя, но нестационарных объемных источников, параметризующих эффект проникающих вглубь жидкости бурунов. Применение методов статистического моделирования позволило воспроизвести наблюдаемую пространственно-временную картину турбулентности в приповерхностном слое.

Розглядається динаміка приповерхневого турбулентного шару та вплив на його структуру перекидання вітрових хвиль. В представленій моделі джерелами турбулентності є дотичне напруження вітру та випадкові спалахи турбулентності. На відміну від попередніх моделей, до розгляду включено шар перекидання хвиль, в якому притік енергії турбулентності враховується шляхом введення постійних по глибині, але нестационарних об'ємних джерел, які параметризують ефект бурунів, що проникають вглиб рідини. Застосування методів статистичного моделювання дозволило відтворити спостережувану просторово-часову картину турбулентності в приповерхневому шарі.

The dynamics of near-surface turbulent layer and influence of the breaking wind waves on it's structure is considered. In the presented model the sources of turbulence are the wind stress and the random splashes of turbulence. In contrast to the previous models the wave-breaking layer is considered. Turbulence energy injection in this layer is taken into account by introducing depth constant but non-stationary distributed sources that parameterize the effect of breakers penetrating into the water. Applying the statistic modelling methods allowed to produce the observed space-time turbulence pattern in the near-surface layer.

ВВЕДЕНИЕ

Основными источниками турбулентности в приповерхностном слое моря являются дрейфовые течения, вызванные касательными напряжениями ветра, обрушение поверхностных волн, конвекция при охлаждении поверхности моря [1]. При определенных условиях заметный вклад в процессы перемешивания в этом слое может оказать циркуляция Ленгмюра, вызванная взаимодействием сдвиговых дрейфовых течений со стоковым дрейфом поверхностных волн, а также сдвиг скорости, обусловленный внутренними волнами на нижней границе стратифицированного поверхностного слоя. Процессы обрушения волн играют также важную роль в теплообмене с атмосферой из-за образования брызг, в газообмене через поверхность океана [2], в вовлечении и дисперсии поверхностно-активных веществ, таких как нефть [3].

В верхнем слое океана выделяются:

- Приповерхностный “слой обрушения волн”, где происходит обрушение волн и обмен импульсом, теплом и массой с атмосферой. Распределение характеристик турбулентности в этом слое близко к однородному;

- “Диффузионный слой”, в котором доминирует диффузия турбулентных вихрей из слоя обрушения волн. Энергия турбулентности и скорость диссипации затухают с глубиной быстрее, чем в нижележащем слое постоянных потоков;
- Слой постоянных турбулентных потоков импульса, тепла и соли, где порождение турбулентности за счет сдвига течений локально уравновешивается диссипацией. Энергия турбулентности приблизительно постоянна по глубине слоя, а скорость диссипации затухает обратно пропорционально глубине;
- Экмановский пограничный слой, в котором сила Кориолиса, турбулентная вязкость и стратификация играют главную роль.

Натурные исследования [4–8] показали, что обрушение поверхностных волн приводит к интенсивной, но спорадической генерации турбулентных областей со значениями скорости диссипации на порядок больше тех, что дает генерация турбулентности сдвиговыми течениями. На рис. 1 представлена приведенная в работе [5] запись измеренной на глубине 1 м скорости диссипации ϵ в

експерименте, проводившемся в оз. Онтарио при ветре 12 м/с. Как следует из рисунка, временная перемежаемость обрушения волн приводит к тому, что ϵ во вспышках турбулентности более, чем на порядок превосходит среднее значение скорости диссипации ϵ^{av} . Как отмечено в [9], неучитывание перемежаемости потока энергии турбулентности от обрушающихся волн может привести к значительным погрешностям при расчетах статистических характеристик турбулентности в приповерхностном слое океана. Кроме того, очевидно, что образование брызг, газообмен и вовлечение поверхностно-активных веществ с поверхности в основном происходят в относительно редких, но мощных актах обрушения поверхностных волн, и знания средних характеристик поля волнения и поверхностной турбулентности недостаточно для правильного описания этих процессов.

Почти во всех предыдущих работах по моделированию турбулентности, генерируемой обрушающимися волнами [10–16], за исключением [10], моделировались стационарные слои, образованные потоками энергии турбулентности с поверхности. В настоящей работе рассматривается динамика приповерхностного слоя в однородном океане, турбулентность в котором поддерживается как за счет сдвига течений в слое постоянных напряжений, так и за счет случайных вспышек турбулентности в слое обрушения волн. В отличие от предшествующих моделей, в рассмотрение включен слой обрушения волн. В нем приток энергии турбулентности и скорости диссипации от разрушающихся волн, в соответствии с наблюдениями, учитывается введением постоянных по глубине слоя, но нестационарных объемных источников, параметризующих эффект проникающих вглубь жидкости бурунов.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим одномерную задачу в слое от невозмущенной поверхности моря при $z = 0$ до $z \rightarrow -\infty$. Ось z направлена вверх. Ограничимся описанием динамики трех верхних слоев. В соответствии с наблюдениями полагаем, что в слое обрушения волн $0 \leq -z \leq z_s$ потоки энергии турбулентности q_k и скорости диссипации q_ϵ равномерно распределены по глубине слоя z_s . Процесс опрокидывания приводит также к передаче импульса от волн, но здесь этот эффект не учитывается. Уравнение движения для дрейфовой составляющей скорости $u(z, t)$ по направлению ветра имеет вид

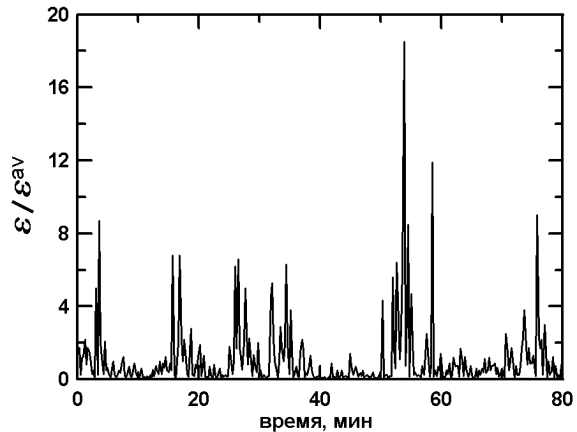


Рис. 1. Временная изменчивость измеренной [5] скорости диссипации

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Коэффициент турбулентной вязкости ν_t и скорость диссипации энергии турбулентности ϵ выражаются через энергию k и масштаб l турбулентности:

$$\nu_t = c_\mu^{1/4} \sqrt{k} l, \quad \epsilon = c_\mu^{3/4} \frac{k^{3/2}}{l}, \quad (2)$$

где c_μ — постоянная. Уравнение (1) дополняется $k - \epsilon$ моделью турбулентности:

$$\frac{\partial k}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \nu_t \frac{\partial k}{\partial z} = \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \epsilon + \Lambda(z) q_k, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} \nu_t \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = \left[c_{\epsilon 1} \nu_t \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - c_{\epsilon 2} \epsilon \right] \frac{\epsilon}{k} + \Lambda(z) q_\epsilon. \quad (4)$$

Здесь $\Lambda(z) = 1$ при $0 \leq -z \leq z_s$ и $\Lambda(z) = 0$ при $z_s < -z$. Стандартными значениями постоянных $k - \epsilon$ модели [21] являются:

$$(c_\mu, \sigma_k, \sigma_\epsilon, c_{\epsilon 1}, c_{\epsilon 2}) = (0.09; 1.0; 1.3; 1.44; 1.92). \quad (5)$$

Толщина слоя обрушения z_s пропорциональна высоте значительных волн H_s ($z_s/H_s \approx 0.5$). Граничные условия при $z = 0$ имеют вид:

$$\nu_t \frac{\partial u}{\partial z} = u_*^2, \quad (6)$$

$$\frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} = 0, \quad \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -c_\mu^{3/4} \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon \kappa} \frac{k^{3/2}}{(z_s - z)^2}, \quad (7)$$

где κ — постоянная Кармана. На достаточно больших глубинах характеристики турбулентного пограничного слоя соответствуют закономерностям

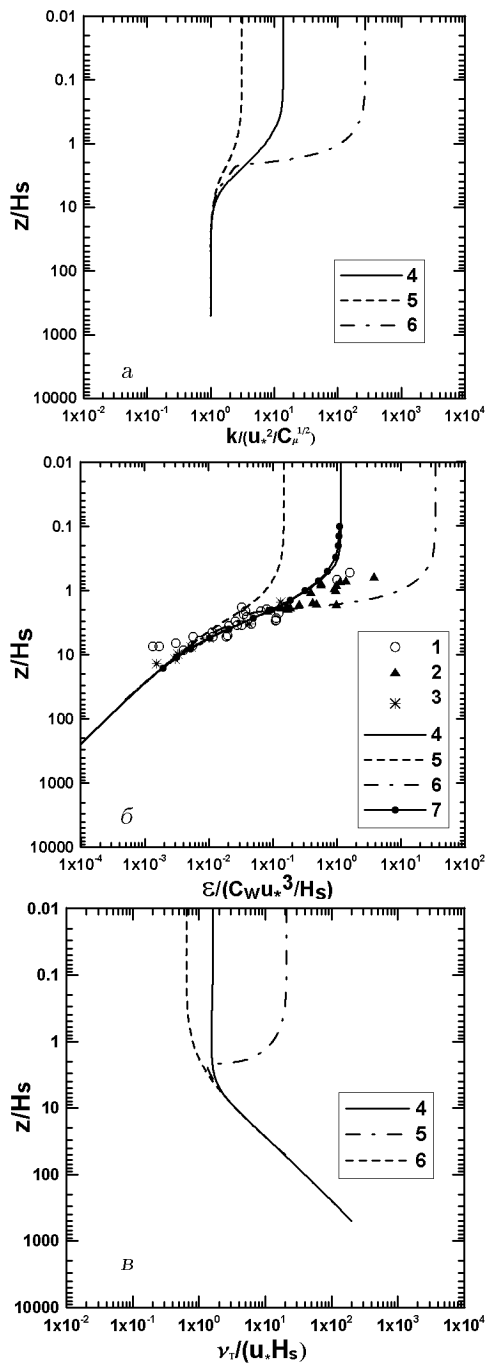


Рис. 2. Стационарное вертикальное распределение энергии турбулентности (а), скорости диссипации (б) и коэффициента турбулентности (в).

Измерения: [6] - 1; [7] - 2; [8] - 3. Расчеты: стационарное решение - 4; нестационарное решение - 5,6; осредненное по времени решение - 7

слоя постоянных потоков. При $z \rightarrow -\infty$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{-z}{z_s}, \quad k = \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \epsilon = \frac{u_*^3}{-\kappa z}, \quad l = -\kappa z, \quad (8)$$

где κ – постоянная Кармана. Уравнения $k - \epsilon$ мо-

дели удовлетворяют асимптотикам (8) при

$$\kappa^2 = \sigma_\epsilon \sqrt{c_\mu} (c_{2\epsilon} - c_{1\epsilon}). \quad (9)$$

Эти условия выполняется при наборе постоянных (5) и $\kappa = 0.433$ [21]. Численное решение системы уравнений (1), (3) с граничными условиями (6), (7) проводилось неявным конечно-разностным методом первого порядка по времени и второго по пространству.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Сначала рассмотрим задачу о диффузии бес-сдвиговой турбулентности в покоящейся жидкости от источника на поверхности ($u_* = 0$, $q_k = 0$, $q_\epsilon = 0$). Стационарные решения задачи согласно [11,17] имеют вид:

$$k(z) = k_s \left(1 + \frac{\tilde{z}}{z_0}\right)^n, \quad \epsilon = \epsilon_s \left(1 + \frac{\tilde{z}}{z_0}\right)^m, \quad (10)$$

$$l = \frac{c_\mu^{3/4} k_s^{3/2}}{\epsilon_s} \left(1 + \frac{\tilde{z}}{z_0}\right), \quad (11)$$

$$n = \frac{7 + [49 + 48(\delta - 1)]^{1/2}}{12(1 - \delta)}, \quad m = \frac{3}{2}n - 1, \quad (12)$$

$$z_0 = \sqrt{\frac{3c_\mu}{2\sigma_k}} n \left(\frac{k_s^{3/2}}{\epsilon_s}\right), \quad (13)$$

где $\tilde{z} = -z$; k_s , ϵ_s – соответственно заданные значения энергии турбулентности и скорости диссипации при $\tilde{z} = 0$. Структура слоя определяется комбинацией эмпирических постоянных модели $\delta = \sigma_\epsilon c_{\epsilon 2} / 2\sigma_k$. При $\delta < 1$ и $n > 0$ слой имеет конечную толщину z_0 , а масштаб турбулентности линейно убывает с глубиной (режим А). Турбулентность затухает по степенному закону при $\delta > 1$ и $n < 0$, тогда как масштаб турбулентности линейно растет с расстоянием от источника турбулентности (режим В). При $\delta = 1$ (режим С) решение имеет вид:

$$k(z) = k_s \exp\left(-\sqrt{\frac{2c_\mu}{3\sigma_k}} \frac{\epsilon_s}{k_s^{3/2}} \tilde{z}\right),$$

$$\epsilon(z) = \epsilon_s \exp\left(-\sqrt{\frac{2c_\mu}{3\sigma_k}} \frac{\epsilon_s}{k_s^{3/2}} \tilde{z}\right), \quad (14)$$

а масштаб турбулентности $l = c_\mu^{3/4} k_s^{3/2} / \epsilon_s$ постоянен с глубиной. За последние 25 лет был проведен ряд лабораторных экспериментов (напр. [18 – 20]), в которых турбулентность в однородной

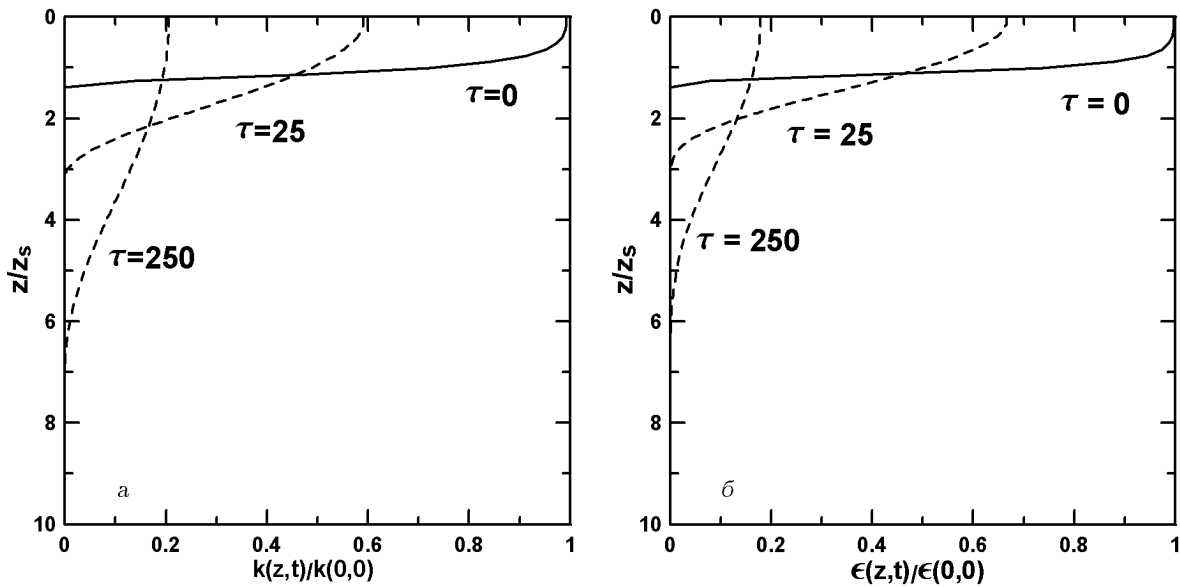


Рис. 3. Рассчитанное вертикальное распределение энергии турбулентности k (а) и скорости диссипации ϵ (б) во вспышке турбулентности в различные моменты времени $\tau = 0; 25; 250$ ($\tau = t \cdot k(0, 0)/\epsilon(0, 0)$)

жидкости генерировалась колеблющимися решетками. Их результаты однозначно свидетельствуют о том, что физически реализуется только режим B с асимптотически затухающими пульсациями скорости и линейно растущим масштабам турбулентности. Энергия турбулентности затухает приблизительно как $k \sim z^{-2}$, а $\epsilon \sim z^{-4}$ и $\nu_t \sim z^0$. Показатель затухания $n = -2$ соответствует $\delta = 1.67$, тогда как для стандартного набора постоянных (5) $\delta = 1.248$ и $n \approx -5$. Для того, чтобы согласовать обе асимптотики, в [14] было предложено аппроксимировать σ_ϵ линейной функцией отношения порождения к диссипации турбулентности $\Phi = \nu_t(\partial u/\partial z)^2/\epsilon$:

$$\sigma_\epsilon = \sigma_{0\epsilon}\Phi + \sigma_{1\epsilon}(1 - \Phi), \quad (15)$$

где $\sigma_{0\epsilon} = 1.3$ – значение для сдвиговых течений и $\sigma_{1\epsilon} = 1.73$ – значение для бессдвиговой турбулентности.

Сопоставим теперь результаты модельных расчетов с данными натуральных измерений [6–8]. Для полностью развитого волнения поток энергии за счет обрушения волн может быть оценен как

$$q_k = c_{1w} u_*^3 / z_s, \quad (16)$$

где $c_{1w} \approx 100$ [13]. Используя решение (10), нетрудно показать, что соответствующее постоянное по глубине значение энергии турбулентности в слое обрушения волн

$$k_s = \left(\frac{3}{2} c_{1w}^2 \sigma_k \sqrt{c_\mu} \right)^{1/3} \frac{u_*^2}{\sqrt{c_\mu}} \quad (17)$$

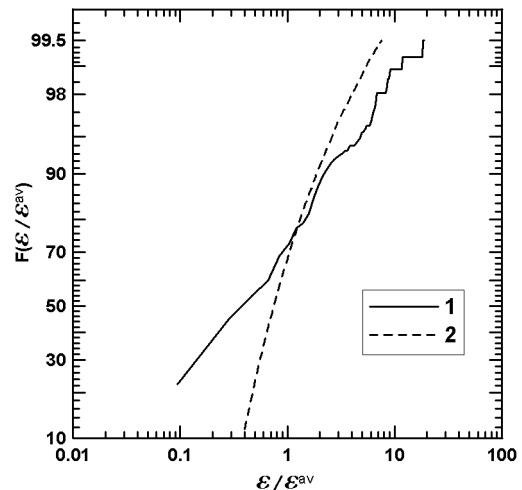


Рис. 4. Функция распределения ϵ/ϵ^{av} . Кривая 1 построена по измерениям [5] на рис. 1. Кривая 2 – расчет методом Монте-Карло для логарифмически нормального распределения потока энергии турбулентности

примерно в 17 раз больше значения турбулентности, порождаемой сдвиговым потоком (8). Так как $l_s = c_{2w} H_s$, то, используя соотношение $l_s = C_\mu^{3/4} k_s^{3/2} / \epsilon_s$ а также уравнения (10), (13), находим, что

$$q_\epsilon = \sqrt{\frac{2C_\mu^{5/2} \sigma_k m k_s^2}{3\sigma_\epsilon^2 n l_s z_s}}. \quad (18)$$

Здесь постоянная $c_{2w} \approx 0.2 - 0.6$.

Система уравнений (1) – (3) с граничными условиями (6), (7) решалась на установление. На

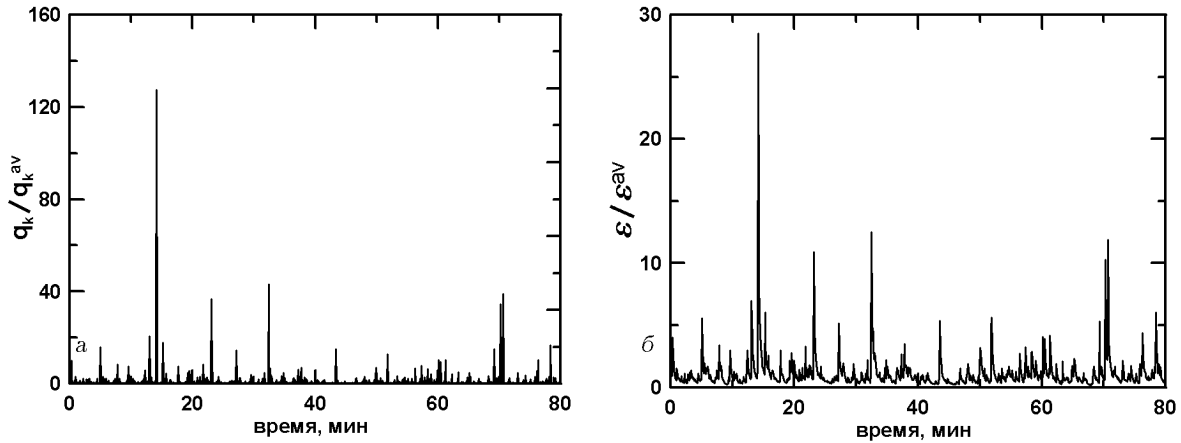


Рис. 5. Рассчитанное методом Монте-Карло распределение во времени потока энергии турбулентности q_k в слое обрушения волн (а) и соответствующей скорости диссипации ϵ (б) у поверхности моря

рис. 2 рассчитанные вертикальные профили скорости диссипации сопоставлены с результатами измерений. Как следует из рис. 2 средний поток энергии от обрушения волн существенно усиливает интенсивность турбулентности в приповерхностном слое. Этот слой имеет толщину порядка $10H_s$. Результаты расчетов неплохо согласуются с данными измерений скорости диссипации по глубине [6–8].

3. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сначала эволюцию отдельной вспышки турбулентности, возникшей у поверхности покоящейся жидкости. Соответствующее аналитическое автомодельное решение было получено в [10] при $\sigma_\epsilon = \sigma_k$:

$$k = \frac{\sigma_k(2c_{2\epsilon} - 3)}{6C_\mu M^2 K^2} \left(\frac{c_{2\epsilon} - 1}{M} t \right)^{-\frac{2c_{2\epsilon}}{3(c_{2\epsilon} - 1)}} (1 - \eta^2), \quad (19)$$

$$\epsilon = \frac{\sigma_\epsilon(2c_{2\epsilon} - 3)}{6C_\mu M^3 K^2} \left(\frac{c_{2\epsilon} - 1}{M} t \right)^{-\frac{5c_{2\epsilon} - 3}{3(c_{2\epsilon} - 1)}} (1 - \eta^2), \quad (20)$$

при $0 \leq \eta \leq 1$

$$k = \epsilon = 0 \text{ при } \eta \geq 1, \quad (21)$$

$$\eta = K \left(\frac{c_{2\epsilon} - 1}{M} t \right)^{-\frac{2c_{2\epsilon} - 3}{3(c_{2\epsilon} - 1)}} z. \quad (22)$$

Это решение описывает автомодельное распространение турбулентного слоя конечной толщины. Скорость распространения слоя и скорость затухания турбулентности зависят от постоянной модели турбулентности $c_{2\epsilon}$. Постоянные решения ввиду отсутствия законов сохранения определить

в рамках автомодельной задачи нельзя [10]. При $c_{2\epsilon} = 1.92$ $l \sim t^{0.3}$, $k \sim t^{-1.4}$ $\epsilon \sim t^{-2.4}$. Турбулентность в слое затухает быстрее, чем однородная и изотропная турбулентность. При достаточно редких вспышках турбулентность в приповерхностном слое в отсутствии сдвига течений может вырождаться. Как показали расчеты неавтомодельной задачи, степенные показатели решения слабо зависят от отношения σ_ϵ/σ_k . Несколько отличается, как видно на рис. 3, форма профилей энергии турбулентности и скорости диссипации.

Как уже отмечалось выше, поток энергии турбулентности от разрушающихся волн носит случайный и перемежающийся характер, что обуславливает необходимость использования статистических методов для моделирования турбулентности. Чтобы оценить характер распределения турбулентности в приповерхностном слое, график на рис. 1 был оцифрован и построена функция распределения скорости диссипации. Как видно на рис. 4, это распределение оказалось приближенно логнормальным, что отмечено в [5]. Статистическая оценка дала приближенные значения параметров распределения: $\mu \approx -0.75$; $\sigma \approx 1.3$, при этом математическое ожидание $M = \epsilon^{(\mu + \sigma^2/2)} \approx 1$, а дисперсия $D = M^2(e^{\sigma^2} - 1) \approx 5.3$. Скорость диссипации определена по спектрам скорости, для расчета которых использовались усреднение по интервалам в 15 с. Поэтому логнормальность не характеризует собственную высокочастотную перемежаемость турбулентности при каскадном переносе по спектру при больших числах Рейнольдса. Ее можно связать с множественностью масштабов обрушения волн в развитом спектре волнения. В расчетах случайная изменчивость потоков энергии турбулентности модели-

ровалась с помощью метода Монте-Карло. Распределение вероятности Λ было логнормальным с математическим ожиданием $M(\Lambda) = 1$ и дисперсией $D(\Lambda) = 20$. Приращение времени в расчетах составляло 5 с, что соизмеримо с типичным периодом волн. Пример временной изменчивости q_k приведен на рис. 5, а, а соответствующий график скорости диссипации у поверхности приведен на рис. 5, б. Очевидно качественное подобие между последовательностями на рис. 1 и 5, что подтверждается сходством функций распределения, построенным по измерениям с полученным в результате применения метода Монте-Карло. Осредненные по ряду с $n = 40000$ значения скорости диссипации практически совпадают со стационарными решениями (рис. 2, б). Полученное распределение скорости диссипации оказалось тоже приближенно логарифмически нормальным. Оценка параметров дала, что $M(\epsilon/\epsilon^{av}) \approx 1$ а $D(\epsilon/\epsilon^{av}) \approx 0.5$. Дисперсия полученного распределения оказалась много меньшей дисперсии генерируемого потока. На рис. 2 приведены также профили характеристик турбулентности, соответствующие наибольшим и наименьшим значениям на поверхности, что позволили оценить размах изменчивости турбулентности в приповерхностном слое. Тогда как энергия турбулентности и коэффициент турбулентности изменялись на порядок, скорость диссипации варьировала на два порядка.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Результаты измерений турбулентности в приповерхностном слое океана показывают заметное увеличение интенсивности турбулентности в приповерхностном слое, вызванное обрушением ветровых волн. В то же время, наблюдения свидетельствуют о спорадическом характере значительных всплесков турбулентности, вызванных интрузией больших бурунов. Приведенный в работе анализ временной изменчивости скорости диссипации в приповерхностном слое показал, что распределение диссипации турбулентности подчиняется логнормальному закону, свидетельствующему в пользу множественности масштабов обрушения волн. Предложенная в работе модель приповерхностного турбулентного слоя с выделенным верхним слоем обрушения волн, в котором постулируется наличие распределенных источников турбулентности, описывает трехслойную структуру приповерхностного слоя. Применение методов статистического моделирования позволило воспроизвести наблюдаемую пространственно-

временную картину турбулентности в приповерхностном слое. Разработанный подход позволяет моделировать вовлечение в океан загрязнений с поверхности и перенос газа при обрушении приповерхностных волн.

Настоящая работа выполнена в рамках проекта INTAS 01-0330.

1. Филлипс О.М. Динамика верхнего слоя океана. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 319 р.
2. Kitaigorodskii S. A. On the fluid dynamics theory of turbulent gas transfer across an air-sea interface in the presence of breaking waves // J. Phys. Oceanogr. – 1984. – 14. – P. 960–972.
3. Li M., Garrett C. The relationship between oil droplet size and upper ocean turbulence // Marine Pollution Bulletin. – 1998. – 36. – P. 961–970.
4. Kitaigorodskii S. A., Donelan M. A., Lumley J. L., Terray E. A. Wave-turbulence interactions in the upper ocean. Part II. Statistical characteristics of wave and turbulence components of the random velocity field in the marine surface layer // J. Phys. Oceanogr. – 1983. – 13. – P. 1988–1999.
5. Agarwal Y. C., Terray E. A., Donelan M. A., Hwang P. A., Williams III A. J., Drennan W. M., Kahma K. K., Kitaigorodskii S. A. Enhanced dissipation of kinetic energy beneath surface waves // Nature. – 1992. – 359. – P. 219–220.
6. Anis A. J., Moum J. N. Surface wave-turbulence interactions: scaling $\epsilon(z)$ near the sea surface // J. Phys. Oceanogr. – 1996. – 25. – P. 2025–2045.
7. Terray E. A., Donelan M. A., Agarwal Y. C., Drennan W. M., Kahma K. K., Williams III A. J., Hwang P. A., Kitaigorodskii S. A. Estimates of kinetic energy dissipation under breaking waves // J. Phys. Oceanogr. – 1996. – 26. – P. 792–807.
8. Drennan W. M., Donelan M. A., Terray E. A., Katzaros K. B. Oceanic turbulence dissipation measurements in SWADE // J. Phys. Oceanogr. – 1996. – 26. – P. 808–815.
9. Китайгородский С. А. Влияние опрокидывания ветровых волн на локальное взаимодействие между атмосферой и океаном // Океанология. – 1997. – N 6. – С. 767–774.
10. Мадерич В. С., Железняк М. И. Автомоделное развитие турбулентного слоя в однородной жидкости // Океанология. – 1977. – N 5. – С. 784–790.
11. Железняк М. И. К описанию приповерхностного слоя океана в рамках двухпараметрических моделей турбулентности // Гидромеханика. – 1980. – N 41. – С. 72–78.
12. Craig P. D., Banner M. L. Modeling wave-enhanced turbulence in the ocean surface layer // J. Phys. Oceanogr. – 1994. – 24. – P. 3148–3171.
13. Craig P. D. Velocity profiles and surface roughness under breaking waves // J. Geoph. Res. – 1996. – 101. – P. 1265–1277.
14. Burchard H. Simulating wave-enhanced layer under breaking surface waves with two-equation turbulence models // J. Phys. Oceanogr. – 2001. – 31. – P. 3133–3145.
15. Umlauf L., Burchard H., Hutter K. Extending the $k-\omega$ turbulence model towards oceanic applications // Ocean Modelling. – 2003. – 5. – P. 195–218.

16. *Kantha L. H., Clayson C.A.* On the effect of surface gravity waves on mixing in the oceanic mixed layer // *Ocean Modelling*. – in press.
17. *Железняк М.А., Мадерич* Аналитические и численные решения уравнений турбулентного переноса // *Методы гидрофизических исследований*. – 1987, ИПФ, Горький. – С. 195-221.
18. *Hopfinger E.J., Toly J.-A.* Spatially decaying turbulence and its relation to mixing across density interfaces // *J. Fluid Mech.* – 1976. – **78**. – P. 155-176.
19. *De Silva I.P.D., Fernando H.J.S.* Some aspects of mixing in a stratified turbulent patch // *J. Fluid Mech.* – 1992. – **240**. – P. 601-626.
20. *Cheng N.-S., Cheng A.W.-L.* Measurements of turbulence generated by oscillating grid // *J. Hydr. Eng.* – 2001. – **127**. – P. 2011-208.
21. *Rodi W.* Examples of calculation methods for flow and mixing in stratified fluids // *J. Geophys. Res.* – 1987. – C92. – P. 5305–5328.