22. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. – 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
23. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

The method of influence functions and Green's function (key solutions) developed integral image accurate analytical solutions of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problems in multilayered semiconfined (piecewise-homogeneous) spatial regions. To build a major integrated solutions are involved corresponding Fourier transform to Cartesian axes, semi-axles and the segment and the Fourier integral in Cartesian semi-axles with n coupling points.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, matching, integral transformation, main solution.*

Отримано: 07.03.2012

УДК 517.91:532.2

М. П. Ленюк, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА—ЛЄБЄДЄВА)— БЕССЕЛЯ—ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Запроваджено гібридне інтегральне перетворення, породжене на полярній осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (Конторовича—Лєбєдєва)—Бесселя—Фур'є.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, функції Коші, функції впливу, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

Постановка проблеми та її аналіз. Відомо, що дослідження фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1—3]. Одним із ефективних методів побудови інтегрального зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в монографії [4]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП.

Основна частина. Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині $I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, \infty)\}$ гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)} = \theta(r)\theta(R_1 - r) B_{\alpha_1} + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) B_{\nu,\alpha_2} + \theta(r - R_2) B_{\alpha_3}^{*}. \quad (1)$$

У рівності (1) беруть участь: $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда, $B_{\alpha_1} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2$ — диференціальний оператор Конторовича-Лєбєдєва [5]; $B_{\nu,\alpha_2} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r^{-1} \frac{d}{dr} - (\nu^2 - \alpha_2^2) r^{-2}$ — диференціальний оператор Бесселя [6]; $B_{\alpha_3}^{*} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_3 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_3^2$ — диференціальний оператор Ейлера [7]; $2\alpha_j + 1 > 0$, $\nu \ge \alpha_2$, $\lambda \in (0, \infty)$; $j = \overline{1,3}$; $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_3)$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \{g_1(r); g_2(p); g_3(r)\}$ з такими властивостями:

1) вектор функція $f(r) = \{B_{\alpha_1}[g_1(r)]; B_{\nu,\alpha_2}[g_2(r)]; B_{\alpha_3}^{*}[g_3(r)]\}$ неперервна на множині I_2^+;

2) існують такі числа γ_1 та γ_2, що справджуються умови обмеження

$$\lim_{r \to 0} \left[r^{\gamma_1} g_1(r) \right] = 0, \lim_{r \to \infty} \left[r^{\gamma_2} g_3(r) \right] = 0; \quad (2)$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) g_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j_2}^k \right) g_{k+1}(r) \right] = 0; j, k = 1, 2. \quad (3)$$

Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ має дві особливі точки ($r = 0$ та $r = \infty$) і самоспряжений, то його спектр дійсний та неперервний [4]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta \in (0, \infty)$. Йому відповідає комплекснозначна спектральна вектор-функція [4]

$$\begin{aligned} V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r, \beta) = \theta(r)\theta(R_1 - r) V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r, \beta) + \\ + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r, \beta) + \theta(r - R_2) V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r, \beta). \end{aligned} \quad (4)$$

При цьому функції

$$V_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)=V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j1}(r,\beta)+iV_{\nu,\alpha_2;j2}(r,\beta), i=\sqrt{-1}, j=\overline{1,3} \qquad (5)$$

комплекснозначні й задовольняють відповідно диференціальні рівняння

$$\left(B_{\alpha_1}+b_1^2\right)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(r,\beta)=0, r\in(0,R_1), b_1=a_1^{-1}\left(\beta^2+k_1^2\right)^{1/2}, k_1^2\ge 0,$$

$$\left(B_{\nu,\alpha_2}+b_2^2\right)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)=0, r\in(R_1,R_2), b_2=a_2^{-1}\left(\beta^2+k_2^2\right)^{1/2}, k_2^2\ge 0, \qquad (6)$$

$$\left(B^*_{\alpha_3}+b_3^2\right)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)=0, r\in(R_2,\infty), b_3=a_3^{-1}\left(\beta^2+k_3^2\right)^{1/2}, k_3^2\ge 0,$$

умови обмеження (2) та умови спряження (3)

Ми вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти: $\alpha^k_{jm}\ge 0$, $\beta^k_{jm}\ge 0$, $c_{1k}\cdot c_{2k}>0$, $c_{jk}=\alpha^k_{2j}\beta^k_{1j}-\alpha^k_{1j}\beta^k_{2j}$, $j,k=1.2$.

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича—Лєбєдєва $\left(B_{\alpha_1}+b_1^2\right)v=0$ складають функції $v_1=C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ та $v_2=D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_2}+b_2^2\right)v=0$ складають функції $J_{\nu,\alpha_2}(b_2r)$ та $N_{\nu,\alpha_2}(b_2r)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B^*_{\alpha_3}+b_3^2\right)v=0$ складають функції $v_1=r^{-\alpha_3}\cos(b_3\ln r)$ та $v_2=r^{-\alpha_3}\sin(b_3r)$ [7].

Якщо в силу лінійності задачі (6), (2), (3) покласти

$$\begin{gathered}
V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(r,\beta)=A_1C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)+B_1D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)+\\
+i\left(C_1C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)+D_1D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\right),\\
V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)=A_2J_{\nu,\alpha_2}(b_2r)+B_2N_{\nu,\alpha_2}(b_2r)+\\
+i\left(C_2J_{\nu,\alpha_2}(b_2r)+D_2N_{\nu,\alpha_2}(b_2r)\right),\\
V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)=A_3r^{-\alpha_3}\cos(b_3\ln r)+B_3r^{-\alpha_3}\sin(b_3\ln r)+\\
+i\left(C_3r^{-\alpha_3}\cos(b_3\ln r)+D_3r^{-\alpha_3}\sin(b_3\ln r)\right),
\end{gathered} \qquad (7)$$

то умови спряження (3) дадуть стосовно 12-ти величин $A_j,B_j,C_j,D_j,\left(j=\overline{1,3}\right)$ алгебраїчну систему з 8-ми рівнянь. Не вистачає хоча б ще три рівняння. Та умов, на жаль, для їх одержання немає.

Отже, безпосередньо знайти ці величини ми не в змозі. Залучимо метод дельта-подібної послідовності — ядро Коші як фундаментальну матрицю розв’язків задачі Коші для параболічної системи рівнянь теплопровідності, породженої ГДО $M^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}$, визначеного рівністю (1).

Побудуємо обмежений в області $D_2^+ = \left\{\left(t,r\right): t\in\left(0,\infty\right); r\in I_2^+\right\}$ розв’язок сепаратної системи диференціальних рівнянь параболічного типу [8]

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u_1}{\partial t} + \gamma_1^2 u_2\left(t,r\right) - a_1^2 B_{\alpha_1}\left[u_1\right] = 0, r\in\left(0,R_1\right),\\
\frac{\partial u_2}{\partial t} + \gamma_2^2 u_2\left(t,r\right) - a_2^2 B_{\nu,\alpha_2}\left[u_2\right] = 0, r\in\left(R_1,R_2\right),\\
\frac{\partial u_3}{\partial t} + \gamma_3^2 u_3\left(t,r\right) - a_3^2 B^*_{\alpha_3}\left[u_3\right] = 0, r\in\left(R_2,\infty\right)
\end{gathered}
\tag{8}
$$

з початковими умовами

$$
u_j\left(t,r\right)\Big|_{t=0} = g_j\left(r\right), r\in\left(R_{j-1},Rj\right), j=\overline{1,3}, R_0=0, R_3=\infty \tag{9}
$$

та умовами спряження

$$
\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^k\right)u_k\left(t,r\right)-\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\left(t_1,r\right)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0; j,k=1,2 \tag{10}
$$

у припущенні, що вектор-функція $u\left(t,r\right)=\left\{u_1\left(t,r\right);u_2\left(t,r\right);u_3\left(t,r\right)\right\}$ є оригіналом за Лапласом стосовно змінної t [9].

У зображенні за Лапласом отримуємо крайову задачу: побудувати обмежений на множині I_2^+ розв’язок сепаратної системи звичайних диференціальних рівнянь Конторовича—Лєбєдєва, Бесселя та Ейлера для модифікованих функцій:

$$
\begin{gathered}
\left(B_{\alpha_1}-q_1^2\right)u_1^*\left(p,r\right) = -a_1^{-2}g\left(r\right), r\in\left(0,R_1\right),\\
\left(B_{\nu,\alpha_2}-q_2^2\right)u_2^*\left(p,r\right) = -a_2^{-2}g\left(r\right), r\in\left(R_1,R_2\right),\\
\left(B^*_{\alpha_3}-q_3^2\right)u_3^*\left(p,r\right) = -a_3^{-2}g\left(r\right), r\in\left(R_2,\infty\right)
\end{gathered}
\tag{11}
$$

за умовами спряження

$$
\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+B_{j1}^k\right)u_k^*\left(p,r\right)-\left(\alpha_{j1}^k\frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k\right)u_{k+1}^*\left(p,r\right)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0, j,k=1,2 \tag{12}
$$

У рівностях (11), (12) прийняті позначення:

$$
q_j = a_j^{-1}\left(p+\gamma_j^2\right)^{1/2}, Req_j>0,\ u_j^* = \int\limits_0^\infty u_j\left(t,r\right)\boldsymbol{e}^{-pt}dt; j=\overline{1,3}\,.
$$

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича–Лєбєдєва $\left(B_{\alpha_1} - q_1^2\right)v = 0$ утворюють функції $v_1 = I_{q_1,\alpha_1}\left(\lambda r\right)$ та $K_{q_1,\alpha_1}\left(\lambda r\right)$ [5]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $\left(B_{\nu,\alpha_2} - q_2^2\right) = 0$ утворюють функції $I_{\nu,\alpha_2}\left(q_2 r\right)$ та $K_{\nu,\alpha_2}\left(q_2 r\right)$ [6]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $\left(B^*_{\alpha_3} - q_3^2\right)v = 0$ утворюють функції $r^{-\alpha_3 - q_3}$ та $r^{-\alpha_3 + q_3}$ [7].

Наявність фундаментальної системи розв'язків дозволяє побудувати розв'язок крайової задачі (11), (12) методом функцій Коші [6; 7]:

$$\begin{gathered}
u_1^*\left(p,r\right) = A_1 I_{q_1,\alpha_1}\left(\lambda r\right) + \int_0^{R_1} E_1^*\left(p,r,\rho\right)\overline{g_1}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_1 - 1}d\rho, \\
u_2^*\left(p,r\right) = A_2 I_{\nu,\alpha_2}\left(q_2 r\right) + B_2 K_{\nu,\alpha_2}\left(q_2 r\right) + \int_{R_1}^{R_2} E_2^*\left(p,r,\rho\right)\overline{g_2}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_2 + 1}d\rho, \\
u_3^*\left(p,r\right) = A_3 r^{-\alpha_3 - q_3} + \int_{R_2}^{\infty} E_3^*\left(p,r,\rho\right)\overline{g_3}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_3 - 1}d\rho.
\end{gathered} \tag{13}$$

У рівностях (13) $\overline{g_j} = a_j^{-2} g_j\left(\rho\right), E_j^*\left(p,r,\rho\right)$ — функції Коші [7] :

$$E_1^*\left(p,r,\rho\right) = \frac{\lambda^{2\alpha_1}}{U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1\right)} \times \tag{14}$$
$$\times \begin{cases} I_{q_1,\alpha_1}\left(\lambda r\right)\Psi^{1^*}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1, \lambda\rho\right), 0 < r < \rho < R_1 \\ I_{q_1,\alpha_1}\left(\lambda \rho\right)\Psi^{1^*}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1, \lambda r\right), 0 < \rho < r < R_1 \end{cases},$$

$$E_2^*\left(p,r,\rho\right) = \frac{q_2^{2\alpha_2}}{\Delta_{\nu,\alpha_2;11}\left(q_2 R_1, q_2 R_2\right)} \times \tag{15}$$
$$\times \begin{cases} \Psi^{1^*}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_2 R_1, q_2 r\right)\Psi^{2^*}_{\nu,\alpha_2;11}\left(q_2 R_2, q_2 \rho\right), R_1 < r < \rho < R_2 \\ \Psi^{1^*}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_2 R_1, q_2 \rho\right)\Psi^{2^*}_{\nu,\alpha_2;11}\left(q_2 R_2, q_2 r\right), R_1 < \rho < r < R_2 \end{cases},$$

$$E_3^*\left(p,r,\rho\right) = -\frac{1}{2q_3 Z^{21}_{\alpha_3;12}\left(q_3, R_2\right)} \begin{cases} \rho^{-\alpha_3 - q_3}\Psi^{2^*}_{\alpha_3;12}\left(q_3, r\right), R_2 < r < \rho < \infty \\ r^{-\alpha_3 - q_3}\Psi^{2^*}_{\alpha_3;12}\left(q_3, \rho\right), R_2 < \rho < r < \infty \end{cases}. \tag{16}$$

Умови спряження для визначення величин A_j та B_2 дають неоднорідну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь:

$$U^{11}_{q_1,\alpha_1;j_1}\left(\lambda R_1\right)A_1-U^{11}_{\nu,\alpha_2;j2}\left(q_2R_1\right)A_2-$$
$$-U^{12}_{\nu,\alpha_2;j2}\left(q_2R_1\right)B_2=\delta_{j2}G^*_{12},\ j=1,2; \tag{17}$$
$$U^{21}_{\nu,\alpha_2;j1}\left(q_2R_2\right)A_2+U^{22}_{\nu,\alpha_2;j1}\left(q_2R_2\right)A_2-Z^{21}_{\alpha_3;j2}\left(q_3,R_2\right)A_3=\delta_{j2}G^*_{23}.$$

У системі (17) беруть участь функції:

$$G_{12}=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\int\limits_0^{R_1}\frac{I_{q_1,\alpha_1}\left(\lambda\rho\right)}{U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1\right)}\overline{g_1}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho-$$
$$-\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}{\Delta_{\nu\cdot\alpha_2;11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}\cdot\overline{g_2}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho,$$

$$G_{23}=\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\int\limits_{R_1}^{R_2}\frac{\Psi^{1^*}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_2R_1,q_2\rho\right)}{\Delta_{\nu,\alpha_2;11}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)}\overline{g_2}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+$$
$$+\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\int\limits_{R_1}^{\infty}\frac{\rho^{-\alpha_3-q_3}}{Z^{21}_{\alpha_3;12}\left(q_3,R_2\right)}\overline{g_3}\left(\rho\right)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho$$

та символ Кронекера $\delta_{j2}\left(\delta_{12}=0,\delta_{22}=1\right)$.

Введемо до розгляду функції:

$$A^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;j}\left(p\right)=U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1\right)\Delta_{\nu,\alpha_2;2j}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)-$$
$$-U^{11}_{q_1,\alpha_1;21}\left(\lambda R_1\right)\Delta_{\nu,\alpha_2;1j}\left(q_2R_1,q_2R_2\right),$$
$$B^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;j}\left(p\right)=Z^{21}_{\alpha_3;22}\left(q_3,R_2\right)\Delta_{\nu,\alpha_2;j1}\left(q_2R_1,q_2R_2\right)-$$
$$-Z^{21}_{\alpha_3;12}\left(q_3R_1\right)\Delta_{\nu,\alpha_2 j2}\left(q_2R_1,q_2R_2\right),\ j=1,2;$$
$$Q^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}\left(p,r\right)=U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1\right)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;22}\left(q_2R_1,q_2r\right)-$$
$$-U^{11}_{q_1,\alpha_1;21}\left(\lambda R_1\right)\Psi^{1*}_{\nu,\alpha_2;12}\left(q_2R_1,q_2r\right),$$
$$Q^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2}\left(p,r\right)=Z^{11}_{\alpha_3;22}\left(q_3,R_2\right)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;11}\left(q_2R_2,q_2r\right)-$$
$$-Z^{21}_{\alpha_3;12}\left(q_3,R_2\right)\Psi^{2*}_{\nu,\alpha_2;21}\left(q_2R_2,q_2r\right).$$

Припустимо, що виконана умова однозначної розв’язності крайової задачі (11), (12): для $p=\sigma+is$ з $\operatorname{Re}p=\sigma>\sigma_0$, де σ_0 - абсциса збіжності інтегралу Лапласа, та $\operatorname{Im}p=s\in\left(-\infty,+\infty\right)$ визначник алгебраїчної системи (17) відмінний від нуля

$$\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}\left(p\right)\equiv A^{\alpha_1}_{\nu\cdot\alpha_2;1}\left(p\right)Z^{21}_{\alpha_3;22}\left(q_3,R_2\right)-A^{\alpha_1}_{\nu,\alpha;2}\left(p\right)Z^{21}_{\alpha_3;12}\left(q_3,R_2\right)=$$
$$=U^{11}_{q_1,\alpha_1;11}\left(\lambda R_1\right)B^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2}\left(p\right)-U^{11}_{q_1,\alpha_1;21}\left(\lambda R_1\right)B^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;1}\left(p\right)\neq0,\left(\alpha\right)=\left(\alpha_1,\alpha_3\right). \tag{18}$$

Визначимо породжені неоднорідністю системи (11) функції впливу

$$H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;11}(p,r,\rho)=\frac{\lambda^{2\alpha_1}}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\begin{cases} I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)\Big[B^{\alpha_3}_{\nu;\alpha_2;2}(p)\Psi^{1^*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda\rho)- \\ I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)\Big[B_{\nu;\alpha_2;2}(p)\Psi^{1^*}_{q_1,\alpha_1;11}(\lambda R_1,\lambda r)- \end{cases}$$

$$-B^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;1}(p)\Psi^{1^*}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1,\lambda\rho)\Big],0<r<\rho<R_1,$$

$$-B^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;1}(p)\Psi^{1^*}_{q_1,\alpha_1;21}(\lambda R_1,\lambda r)],0<\rho<r<R_1,$$

$$H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;12}(p,r,\rho)=\frac{c_{21}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\cdot\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\theta^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2}(p,r),H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;13}(p,r,\rho)=$$

$$=-\frac{c_{21}}{q_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}}\times\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\cdot\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda r)}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\rho^{-\alpha_3-q_3},H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;21}(p,r,\rho)=$$

$$=\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\theta^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2}(p,r),$$

$$H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;22}(p,r,\rho)=\frac{q_2^{2\alpha_2}}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\begin{cases}\theta^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}(p,r)\theta^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2}(p,\rho),R_1<r<\rho<R_2, \\ \theta^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}(p,\rho)\theta^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2}(p,r),R_1<\rho<r<R_2,\end{cases}$$

$$H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;23}(p,r,\rho)=-\frac{c_{22}}{R_2^{2\alpha_3+1}}\cdot\frac{\rho^{-\alpha_3-q_3}}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\theta^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}(p,r),H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;31}(p,r,\rho)=-\frac{c_{11}}{R_1^{2\alpha_1+1}}\times$$

$$\frac{c_{12}}{q_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{I_{q_1,\alpha_1}(\lambda\rho)}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}r^{-\alpha_3-q_3},H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;32}(p,r,\rho)=-\frac{c_{12}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\cdot\frac{r^{-\alpha_3-q_3}}{\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\theta^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}(p,\rho),$$

$$H^{(\alpha)^*}_{\nu,\alpha_2;22}(p,r,\rho)=\frac{1}{2q_3\Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(p)}\begin{cases}\rho^{-\alpha_3-q_3}\Big[A^{\alpha_1}_{\nu;\alpha_2;2}(p)\Psi^{2^*}_{\alpha_3;12}(q_3,r)- \\ r^{-\alpha_3-q_3}\Big[A^{\alpha_1}_{\nu;\alpha_2;2}(p)\Psi^{2^*}_{\alpha_3;12}(q_3,\rho)-\end{cases}$$

$$-A^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}(p)\Psi^{2^*}_{\alpha_3;22}(q_3,r)\Big],R_2<r<\rho<\infty, \tag{19}$$

$$-A^{\alpha_1}_{\nu,\alpha_2;1}(p)\Psi^{2^*}_{\alpha_3;22}(q_3,\rho)\Big],R_2<\rho<r<\infty.$$

У результаті однозначної розв’язності алгебраїчної системи (17), підстановки отриманих за правилами Крамера значень $A_j\left(j=\overline{1.3}\right)$ та

B_2 у рівності (13) й низки елементарних перетворень маємо єдиний розв'язок крайової задачі (11), (12):

$$u_j^*\left(p,r\right)=\int_0^{R_1}H_{\nu,\alpha_2,j1}^{(\alpha)^*}\left(p,r,\rho\right)\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{\nu,\alpha_2,j2}^{(\alpha)^*}\left(p,r,\rho\right)\times$$
$$\times\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+\int_{R_2}^{\infty}H_{\nu,\alpha_2,j3}^{(\alpha)*}\left(p,r,\rho\right)\overline{g_3}(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho,\ j=\overline{1,3} \tag{20}$$

Повертаючись у формулах (20) до оригіналу, маємо єдиний розв'язок параболічної крайової задачі (8)—(10):

$$u_j\left(t;r\right)=\int_0^{R_1}H_{\nu,\alpha_2,j1}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right)\overline{g_1}(\rho)\rho^{2\alpha_1-1}d\rho+\int_{R_1}^{R_2}H_{\nu,\alpha_2;j2}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right)\times$$
$$\times\overline{g_2}(\rho)\rho^{2\alpha_2+1}d\rho+\int_{R_2}^{\infty}H_{\nu,\alpha_2,j3}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right)\overline{g_3}(\rho)\rho^{2\alpha_3-1}d\rho,\ j=\overline{1,3}. \tag{21}$$

Тут за означенням [9]

$$H_{\nu,\alpha_2;jk}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty}H_{\nu,\alpha_2,jk}^{(\alpha)*}\left(p,r,\rho\right)e^{pt}dp;\ j,k=\overline{1.3}. \tag{22}$$

Особливими точками функцій впливу $H_{\nu,\alpha_2;jk}^{(\alpha)*}\left(p,r,\rho\right)$ є точки розгалуження $p=-\gamma_j^2(j=\overline{1.3})$ та $p=\infty$. Покладемо $q_j=ib_j$. Будемо мати: $a_j^{-1}\left(p+\gamma_j^2\right)^{1/2}=ia_j^{-1}\left(\beta^2+k_j^2\right)^{1/2}$. Звідси знаходимо, що $p=-\left(\beta^2+\gamma^2\right)=e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right),\ dp=-2\beta d\beta,$ де $\gamma^2=\max\left\{\gamma_1^2;\gamma_2^2;\gamma_3^2\right\}$. Якщо $\gamma^2=\gamma_1^2>0$, то $k_1^2=0, k_2^2=\gamma_1^2-\gamma_2^2\ge 0,\ k_3^2=\gamma_1^2-\gamma_3^2\ge 0;$ якщо $\gamma^2=\gamma_2^2>0$, то $k_1^2=\gamma_2^2-\gamma_1^2\ge 0, k_2^2=0, k_3^2=\gamma_2^2-\gamma_3^2\ge 0$. якщо $\gamma^2=\gamma_3^2>0$, то $k_1^2=\gamma_3^2-\gamma_1^2\ge 0, k_2^2=\gamma_3^2-\gamma_2^2\ge 0, k_3^2=0$.

За допомогою методу контурного інтегралу, теореми Коші та леми Жордана [9] формули (22) перетворюються до розрахункових [9]:

$$H_{\nu,\alpha_2;jk}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right)=$$
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}Im\left\{H_{\nu_1\alpha_2;jk}^{(\alpha)^*}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right),r\rho\right)\right\}e^{-\left(\beta^2+\gamma^2\right)t}\beta d\beta;\ j,k=\overline{1,3}. \tag{23}$$

Практика показує що досить обчислити

$$H_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right),\ H_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right)\ \text{та}\ H_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}\left(t,r,\rho\right).$$

В силу відомих співвідношень [4] маємо:

$$U^{11}_{ib_1,\alpha_1;j1}\left(\lambda R_1\right)=X^{11}_{b_1;j1}\left(\lambda R_1,b_1\right)-iX^{12}_{\alpha_1;j1}\left(\lambda R_1,b_1\right),$$

$$\Delta_{\nu,\alpha_2;jk}\left(ib_2R_1,ib_2R_2\right)=-\frac{\pi}{2}\boldsymbol{e}^{-\pi i\alpha_2}\delta_{\nu,\alpha_2;jk}\left(b_2R_1,b_2R_2\right),$$

$$Z^{21}_{\alpha_3;j2}\left(ib_3,R_2\right)=Y^{21}_{\alpha_3;j2}\left(b_3,R_2\right)-iY^{22}_{\alpha_3;j2}\left(b_3,R_2\right).$$

Ці рівності дають можливість одержати залежності:

$$\begin{aligned}B^{\alpha_3}_{\nu,b_2;j}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)&=-\frac{\pi}{2}\boldsymbol{e}^{-\pi i\alpha_2}\left[b^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;j1}\left(\beta\right)-ib^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;j2}\left(\beta\right)\right],\\ \Delta^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}\left(e^{\pi i}\left(\beta^2+\gamma^2\right)\right)&=-\frac{\pi}{2}\boldsymbol{e}^{-\pi i\alpha_2}\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}\left(\beta\right)-i\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}\left(\beta\right)\right].\end{aligned}\tag{24}$$

У рівностях (24) прийняті позначення:

$$b^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;jk}\left(\beta\right)=Y^{2k}_{\alpha_3;22}\left(b_3,R_2\right)\delta_{\nu,\alpha_2;j1}\left(b_2R_1,b_2R_2\right)-Y^{2k}_{\alpha_3,12}\left(b_3,R_2\right)\delta_{\nu,\alpha_2;j2}\left(b_2R_1,b_2R_2\right),$$

$$e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;jk}\left(\beta\right)=X^{1j}_{\alpha_1;11}\left(\lambda R_1,b_1\right)b^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;2k}\left(\beta\right)-X^{1j}_{\alpha_1,21}\left(\lambda R_1,b_1\right)b^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;1k}\left(\beta\right),\ j,k=1,2;$$

$$\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}\left(\beta\right)=e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)-e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}\left(\beta\right),\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}\left(\beta\right)=e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)+e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}\left(\beta\right).$$

Введемо до розгляду функції:

$$f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)=\left[e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}\left(\beta\right)\right]^2+\left[e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}\left(\beta\right)\right]^2+$$

$$+e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}\left(\beta\right)-e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}\left(\beta\right)>0,$$

$$f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)=\left[e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)\right]^2+\left[e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)\right]^2+$$

$$+e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}\left(\beta\right)-e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}\left(\beta\right)>0,$$

$$f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;13}\left(\beta\right)=e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}\left(\beta\right)+e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}\left(\beta\right);$$

$$q_{\alpha_1}\left(\beta\right)=\frac{c_{11}sh\left(\pi b_1\right)}{\pi\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}},$$

$$q^{21}_{\alpha_2}\left(\beta\right)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{21}}{b_2^{2\alpha_2}R_1^{2\alpha_2+1}},q^{12}_{\alpha_2}\left(\beta\right)=\frac{2}{\pi}\frac{c_{12}}{b_2^{2\alpha_2}R_2^{2\alpha_2+1}},q_{\alpha_3}\left(\beta\right)=\frac{c_{22}b_3}{R_2^{2\alpha_3+1}}.$$

$$S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;jk}\left(\beta\right)=Y^{2j}_{\alpha_3;22}\left(b_3,R_2\right)u^{2k}_{\nu,\alpha_2;11}\left(b_2R_2\right)-Y^{2j}_{\alpha_3;12}\left(b_3,R_2\right)u^{2k}_{\nu,\alpha_2;21}\left(b_2R_2\right);\ j,k=1,2;$$

$$g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right)=\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}\left(\beta\right)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)-\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}\left(\beta\right)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;22}\left(\beta\right),$$

$$g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}\left(\beta\right)=\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}\left(\beta\right)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;21}\left(\beta\right)-\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}\left(\beta\right)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;11}\left(\beta\right),$$

$$g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}(\beta)=\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;12}(\beta)+\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;22}(\beta),$$

$$g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}(\beta)=\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;11}(\beta)+\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)S^{\alpha_3}_{\nu,\alpha_2;21}(\beta).$$

Зауважимо, що $f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}(\beta)>0$ та $f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}(\beta)>0$ тому, що

$$e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}(\beta)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}(\beta)-e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}(\beta)e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}(\beta)=q_{\alpha_1}q^{12}_{\alpha_2}q^{21}_{\alpha_2}q_{\alpha_3}>0.$$

Виконавши в рівностях (23) зазначені операції для $j=1, k=\overline{1,3}$, одержуємо такі вирази:

$$H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}(t,r,\rho)=\int_0^\infty[f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)C_{\alpha_1}(\lambda\rho,b_1)+$$

$$+f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)D_{\alpha_1}(\lambda\rho,b_1)-f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;13}(\beta)\big(C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)D_{\alpha_1}(\lambda\rho,b_1)+$$

$$C_{\alpha_1}(\lambda\rho,b_1)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\big)]\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta a_1^2\sigma_1;$$

$$H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}(t,r,\rho)=\int_0^\infty[g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)J_{\nu,\alpha_2}(b_2\rho)+$$

$$g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)N_{\nu,\alpha_2}(b_2\rho)-g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)J_{\nu,\alpha_2}(b_2\rho)+$$

$$+g^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)N_{\nu,\alpha_2}(b_2\rho)]e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)q_{\alpha_1}(\beta)d\beta a_2^2\sigma_2;$$

$$\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)=\frac{2\beta\lambda_1^{2\alpha_1}}{\boldsymbol{sh}(\pi b_1)}\left(\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)\right]^2+\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)\right]^2\right)^{-1};$$

$$H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;13}(t,r,\rho)=\int_0^\infty[\big(\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)+\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\big)\times$$

$$\times\rho^{-\alpha_3}\sin(b_3\ln\rho)+\big(\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)-\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)\big)\rho^{-\alpha_3}\times$$

$$\times\cos(b_3\ln\rho)]+\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\times q_{\alpha_1}(\beta)q^{12}_{\alpha_2}(\beta)d\beta a_3^2\sigma_3; a_1^2\sigma_1=$$

$$=1, a_2^2\sigma_2=\frac{c_{21}}{c_{11}}\cdot\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_1^{2\alpha_2+1}}, a_3^2\sigma_3=\frac{c_{21}c_{22}R_1^{2\alpha_1+1}R_2^{2\alpha_2+1}}{c_{11}c_{12}R_1^{2\alpha_2+1}R_2^{2\alpha_3+1}}.$$

Якщо тепер вимагати виконання рівностей

$$H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1k}(t,r,\rho)=\int_0^\infty\mathrm{Re}\left[V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(r,\beta)\overline{V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;k}(\rho,\beta)}\right]\times$$
$$\times e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)d\beta a_k^2\sigma_k; \qquad (25)$$

то для визначення величин $A_k, B_k, C_k, D_k\,(k=\overline{1,3})$ одержимо алгебраїчну систему з одинадцяти рівнянь

$$
\begin{gathered}
A_1^2+C_1^2=f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta), B_1^2+D_1^2=-f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta), A_1B_1+C_1D_1=-f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta),\\
A_1A_2+C_1C_2=q_{\alpha_1}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta), A_1B_2+C_1D_2=q_{\alpha_1}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta),\\
B_1A_2+D_1C_2=-q_{\alpha_1}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;21}^{(\alpha)}(\beta), B_1B_2+D_1D_2=q_{\alpha_1}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha)}(\beta),\\
A_1B_3+C_1D_3=\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}^{12}(\beta), B_1B_3+D_1D_3=\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}^{12}(\beta),\\
B_1A_3+D_1C_3=\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}^{12}(\beta), A_1A_3+C_1C_3=-\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}^{12}(\beta).
\end{gathered}
\tag{26}
$$

Практика показує [10; 11], що при $C_1=0$ алгебраїчна система (26) однозначно розв'язується:

$$
\begin{gathered}
A_1=\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)}, B_1=\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)\right]^{-1/2}f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta),\\
D_1=\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta)-\left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)\right)^2\right]^{1/2}\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)\right]^{-1/2},\\
A_2=q_{\alpha_1}(\beta)\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)\right]^{-1/2}g_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta),\\
B_2=q_{\alpha_1}(\beta)\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)\right]^{-1/2}g_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta);\\
C_2=q_{\alpha_1}(\beta)\frac{f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)-f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;21}^{(\alpha)}(\beta)}{\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta)-\left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)\right)^2\right]}},\\
D_2=q_{\alpha_1}(\beta)\frac{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha)}(\beta)+f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)g_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta)}{\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta)-\left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)\right)^2\right]}},\\
A_3=-\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)\right]^{-1/2}\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha_2}^{12}(\beta),\\
B_3=\left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta)\right]^{-1/2}\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)q_{\alpha_1}q_{\alpha_2}^{12}(\beta),
\end{gathered}
\tag{27}
$$

$$C_3 = q_{\alpha_1}(\beta) q_{\alpha_2}^{12}(\beta) \frac{\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) - \omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)}{\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)} \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) - \left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta) \right)^2 \right]}},$$

$$D_3 = q_{\alpha_1}(\beta) q_{\alpha_2}^{12}(\beta) \frac{\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) + \omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta)}{\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)} \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) - \left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta) \right)^2 \right]}}.$$

Підставивши визначені формулами (27) величини $A_k, B_k, C_k, D_k\,(k = \overline{1,3})$ у рівності (7), одержуємо функції:

$$V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta) = \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) \right]^{-1/2} \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) C_{\alpha_1}(\lambda r, b_1) - f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta) D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1) \right] +$$
$$+ i \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) \right]^{-1/2} \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) - \left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta) \right)^2 \right]^{1/2} D_{\alpha_1}(\lambda r, b_1),$$

$$V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta) = q_{\alpha_1}(\beta) \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) \right]^{-1/2} \times$$
$$\times \left[g_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) J_{\nu,\alpha_2}(b_2 r) + g_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) N_{\nu,\alpha_2}(b_2 r) \right] +$$
$$+ i \frac{q_{\alpha_1}(\beta) \left(\left[\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta) \right]^2 + \left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta) \right]^2 \right)}{\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)} \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) - \left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta) \right)^2 \right]}} \times$$
$$\times \Big[\left(e_{\nu,\alpha_2;21}^{(\alpha)}(\beta) S_{\nu,\alpha_2;21}^{\alpha_3}(\beta) - e_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha)}(\beta) \times S_{\nu,\alpha_2;11}^{\alpha_3}(\beta) \right) N_{\nu,\alpha_2}(b_2 r) - \tag{28}$$
$$- \left(e_{\nu,\alpha_2;21}^{(\alpha)}(\beta) S_{\nu,\alpha_2;22}^{\alpha_3}(\beta) - e_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha)}(\beta) S_{\nu,\alpha_2;12}^{\alpha_3}(\beta) \right) J_{\nu,\alpha_2}(b_2 r) \Big];$$

$$V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta) = q_{\alpha_1}(\beta) q_{\alpha_2}^{12}(\beta) \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) \right]^{-1/2} \times$$
$$\times \left[\omega_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) r^{-\alpha_3} \sin(b_2 \ln r) - \omega_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) r^{-\alpha_3} \cos(b_2 \ln r) \right] +$$
$$+ i \frac{q_{\alpha_1}(\beta) q_{\alpha_2}^{12}(\beta) \left(\left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta) \right]^2 + \left[\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta) \right]^2 \right)}{\sqrt{f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) \left[f_{\nu,\alpha_2;11}^{(\alpha)}(\beta) f_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha)}(\beta) - \left(f_{\nu,\alpha_2;13}^{(\alpha)}(\beta) \right)^2 \right]}} \times$$

$$\times\left[\left(e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;21}(\beta)r^{-\alpha_3}\sin(b_3\ln r)-e^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;22}(\beta)r^{-\alpha_3}\cos(b_3\ln r)\right)\right].$$

Зауважимо, що

$$f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;11}(\beta)f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;12}(\beta)-\left(f^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;13}\right)^2=$$

$$=\left(\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)\right]^2+\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)\right]^2\right)q_{\alpha_1}q^{21}_{\alpha_2}q^{12}_{\alpha_2}q_{\alpha_3}(\beta)>0.$$

Згідно з формулою (4) спектральна вектор-функція $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(r,\beta)$ визначена.

Оскільки функції $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)$ є лінійною комбінацією відповідної фундаментальної системи розв’язків, то вони задовольняють відповідні диференціальні рівняння сепаратної системи (6). Виконання умов спряження перевіряється безпосередньо. Більше того, показується [10; 11], що рівності (25) справедливі й для $j=2,3$, тобто мають місце розрахункові формули:

$$H^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;jk}(t,r,\rho)=$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)\overline{V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;k}(\rho,\beta)}\right]\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta a_k^2\sigma_k;\ j,k=\overline{1,3}. \tag{29}$$

Розв’язок (21) параболічної задачі в силу рівностей (29) набуває інтегрального зображення:

$$u_j(t,r)=$$

$$=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)\int_0^{R_1}g_1(\rho)\overline{V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\rho,\beta)}\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right]\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta+$$

$$+\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)\int_{R_1}^{R_2}g_2(\rho)\overline{V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\rho,\beta)}\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\rho\right]\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}d\beta+ \tag{30}$$

$$+\int_0^\infty e^{-(\beta^2+\gamma^2)t}\,\mathrm{Re}\left[V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;j}(r,\beta)\int_{R_2}^{\infty}g_3(\rho)\overline{v^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(\rho,\beta)}\sigma_3\rho^{2\alpha_3-1}d\rho\right]\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)d\beta,$$

$$j=\overline{1,3}.$$

Внаслідок початкових умов (9) при $t\to 0+$ та властивості ядра Коші як дельта-подібної стосовно t послідовності отримуємо інтегральні зображення:

$$g_1(r)=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\int_0^{R_1} g_1(\rho)\overline{V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\rho,\beta)}\sigma_1\rho^{2\alpha_1-1}d\rho\right]\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta, \quad (31)$$

$$g_2(r)=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)\int_{R_1}^{R_2} g_2(\rho)\overline{V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\rho,\beta)}\sigma_2\rho^{2\alpha_2+1}d\rho\right]\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta, \quad (32)$$

$$g_3(r)=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\int_{R_2}^{\infty} g_3(\rho)\overline{V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(\rho,\beta)}\sigma_3\rho^{2\alpha_3-1}d\rho\right]\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta. \quad (33)$$

Інтегральні зображення (31)—(33) еквівалентні одному інтегральному зображенню вектор-функції $g(r)=\{g_1(r);g_2(r);g_3(r)\}$:

$$g(r)=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)\int_0^\infty g(\rho)\overline{V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\rho,\beta)}\sigma(\rho)d\rho\right]\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta. \quad (34)$$

Інтегральне зображення (34) визначає пряме $H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ та обернене $H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення (ГІП), породжене на множині I_2^+ ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$, визначеним рівністю (1):

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int_0^\infty g(r)\overline{V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)}\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \quad (35)$$

$$H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}\left[\tilde{g}\right]=\int_0^\infty \mathrm{Re}\left[\tilde{g}(\beta)V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)\right]\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r). \quad (36)$$

Математичним обґрунтуванням правил (35), (36) служить твердження.

Теорема 1 (про інтегральне зображення). Якщо вектор функція

$$f(r)=\left[\theta(r)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-1/2}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)r^{\alpha_2+1/2}+\theta(r-R_2)r^{\alpha_3-1/2}\right]g(r)$$

обмежена, неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,\infty)$, то для будь якого $r\in I_2^+$ справедливе інтегральне зображення (34).

Визначимо величини та функції:

$$d_1=a_1^2R_1^{2\alpha_1+1}\sigma_1:c_{11}, d_2=a_2^2R_2^{2\alpha_2+1}\sigma_2:c_{12}, \tilde{g}_1(\beta)=\int_0^{R_2} g_1(r)\overline{V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)}\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr,$$

$$\tilde{g}_2(\beta)=\int_{R_1}^{R_2} g_2(r)\overline{V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)}\sigma_2 r^{2\alpha_2+1}dr, \tilde{g}_3(\beta)=\int_{R_2}^{\infty} g_3(r)\overline{V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)}\sigma_3 r^{2\alpha_3-1}dr,$$

$$Z_{\nu,\alpha_2;i2}^{(\alpha),k}(\beta)=\left(\alpha_{i2}^{k}\,{d}\big/{dr}+\beta_{i2}^{k}\right)\overline{V_{\nu,\alpha_2;k+1}^{(\alpha)}(r,\beta)}\Big|_{r=R_k},\,i,k=1,2.$$

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r)=\left\{B_{\alpha_1}\left[g_1(r)\right];B_{\nu,\alpha_2}\left[g_2(r)\right];B_{\alpha_3}^{*}\left[g_3(r)\right]\right\}$$

неперервна на множині I_2^+, а функції $g_j(r)$ задовольняють умови обмеження

$$\lim_{r\to0}\left(r^{2\alpha_1+1}\left[\frac{dg_1}{dr}\overline{V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}}(r,\beta)-g_1(r)\frac{d}{dr}\overline{V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}}(r,\beta)\right]\right)=0, \qquad (37)$$

$$\lim_{r\to\infty}\left(r^{2\alpha_3+1}\left[\frac{dg_3}{dr}\overline{V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}}(r,\beta)-g_3(r)\frac{d}{dr}\overline{V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}}(r,\beta)\right]\right)=0 \qquad (38)$$

та умови спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{d}{dr}\beta_{j1}^{k}\right)g_k(r)-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{d}{dr}\beta_{j2}^{k}\right)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=\omega_{jk};\,j,k=1,2, \qquad (39)$$

то справджується основна тотожність ГІП ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-\sum_{i=1}^{3}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}d_k\left[Z_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),k}(\beta)\omega_{1k}\right]. \qquad (40)$$

Доведення здійснюється за логічною схемою доведення ідентичної теореми в роботі [10].

Висновок. Правила (35), (36) та (40) складають математичний апарат для розв’язання відповідних задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ. При цьому ми одержуємо інтегральне зображення аналітичного розв’язку задачі алгоритмічного характеру.

Список використаних джерел:

1. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
2. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики, 1997. — 188 с.
3. Конет І. М. Інтегральні перетворення типу Мелера—Фока / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2002. — 276 с.
4. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 368 с.
5. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Конторовича—Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.

6. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.3).
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
8. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
9. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. — М. : Наука, 1987. — 688 с.
10. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера—(Фур'є, Бесселя) / М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2009. — 76 с.
11. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення типу Ейлера—Бесселя—Лежандра на полярній осі / М. П. Ленюк // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2011. — Вип. 20. — С. 80–111.

Introduced hybrid integral transformations generated by the polar axis with two points conjugate hybrid differential operator (Kontorovich–Lebedev)–Bessel–Fourier.

Key words: *hybrid differential operator functions Cauchy function influence hybrid integral transformation, the basic identity, the main solutions.*

Отримано: 14.03.2012

УДК 519.9

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, професор,
О. П. Нечуйвітер, канд. фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

КУСКОВО-СТАЛА ІНТЕРФЛЕТАЦІЯ ПРИ ОБЧИСЛЕННІ 3 D КОЕФІЦІЄНТІВ ФУР'Є НА КЛАСІ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ

У статті розглядаються кубатурні формули обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі диференційовних функцій з використанням інтерфлетації функцій у випадку, коли інформація про функцію задана її слідами на лініях.

Ключові слова: *інтерфлетація, кубатурна формула, 3 D коефіцієнти Фур'є, клас диференційовних функцій.*

1. Постановка проблеми. При наближені функцій двох та трьох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, сліди функції на лініях або площинах, інтеграли від наближу-

