УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ В НАПІВОБМЕЖЕНИХ БАГАТОШАРОВИХ ПРОСТОРОВИХ ОБЛАСТЯХ

Методом функції впливу та функції Гріна (головних розв'язків) побудовано інтегральні зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру гіперболічних крайових задач в напівобмежених багатошарових (кусково-однорідних) просторових областях. Для побудови головних розв'язків залучено відповідні інтегральні перетворення Фур'є на декартових осі, півосі та сегменті, а також інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі з *n* точками спряження.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1—5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6—9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших лінійних крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породженні гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду але з різними наборами коефіцієнтів [11—16].

Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових та тришарових просторових областях одержано у працях автора [17—19].

У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D_3 = \Big\{ (t, x, y, z);\, t > 0;\, (x, y) \in \Omega_2 = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle;$$
$$z \in \mathrm{I}_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} \mathrm{I}_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} \big(l_{j-1}; l_j \big),\, l_0 \geq 0;\, l_j < l_{j+1};\, l_{n+1} = +\infty \Big\}$$

розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь гіперболічного типу другого порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{xj}^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a_{yj}^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = \qquad (1)$$
$$= f_j(t, x, y, z);\; z \in \mathrm{I}_j;\; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(x, y, z);\; \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(x, y, z);\; z \in \mathrm{I}_j;\; j = \overline{1, n+1}; \qquad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, x, y);\; \frac{\partial^k u_{n+1}}{\partial z^k} \Big|_{z=+\infty} = 0;\; k = 0, 1; \qquad (3)$$

умовами спряження [16]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0;\; j = 1, 2;\; k = \overline{1, n} \qquad (4)$$

та відповідними крайовими умовами на межі області Ω_2, де a_{xj}, a_{yj}, a_{zj}, χ_j, α_{js}^k, β_{js}^k — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \left|\alpha_{11}^0\right| + \left|\beta_{11}^0\right| \neq 0; \; c_{1k} c_{2k} > 0;$$

$$f(t,x,y,z) = \left\{ f_1(t,x,y,z),\, f_2(t,x,y,z),\ldots,\, f_{n+1}(t,x,y,z) \right\};$$

$$g^1(x,y,z) = \left\{ g_1^1(x,y,z),\, g_2^1(x,y,z),\ldots,\, g_{n+1}^1(x,y,z) \right\};$$

$$g^2(x,y,z) = \left\{ g_1^2(x,y,z),\, g_2^2(x,y,z),\ldots,\, g_{n+1}^2(x,y,z) \right\};$$

$g_0(t,x,y)$ — задані обмежені функції; $u(t,x,y,z) = \{u_1(t,x,y,z),$ $u_2(t,x,y,z),\ldots, u_{n+1}(t,x,y,z)\}$ — шукана функція.

Основна частина. Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури області Ω_2. Зауважимо, що випадки $\Omega_2 = (-\infty;+\infty)\times(-\infty;+\infty)$; $\Omega_2 = (-\infty;+\infty)\times(0;+\infty)$ розглянуто в [20].

1. $\Omega_2 = (-\infty;+\infty)\times(0;b)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left.\frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\right|_{x=\pm\infty} = 0; \; k = 0,1; \; j = \overline{1,n+1} \tag{5}$$

щодо змінної *x* та крайові умови

$$\left.\left(-\frac{\partial}{\partial y} + h_1\right) u_j\right|_{y=0} = \omega_j^1(t,x,z); \left.\left(\frac{\partial}{\partial y} + h_2\right) u_j\right|_{y=b} = \\ = \omega_j^2(t,x,z); \; j = \overline{1,n+1} \tag{6}$$

щодо змінної *y*, де $h_k\ (k=1,2)$ — деякі невід'ємні сталі; $\omega^1(t,x,z) =$ $=\left\{\omega_1^1(t,x,z), \omega_2^1(t,x,z),\ldots,\omega_{n+1}^1(t,x,z)\right\}$; $\omega^2(t,x,z) = \left\{\omega_1^2(t,x,z), \omega_2^2(t,x,z),\ldots,\right.$ $\left.\omega_{n+1}^2(t,x,z)\right\}$ — задані обмежені неперервні функції.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(6) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [21; 22; 16].

До задачі (1)—(6) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної x [21]:

$$F_x\left[g(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, e^{-i\sigma x} dx \equiv \tilde{g}(\sigma), \tag{7}$$

$$F_x^{-1}\left[\tilde{g}(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\sigma)e^{i\sigma x}d\sigma\equiv g(x), \tag{8}$$

$$F_x\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2F_x\left[g(x)\right]\equiv-\sigma^2\tilde{g}(\sigma). \tag{9}$$

Інтегральний оператор F_x за правилом (7) внаслідок тотожності (9) початково-крайовій задачі (1)—(6) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\left\{(t,y,z);\,t>0;\,y\in(0;b);\,z\in\mathrm{I}_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{u}_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_j=\\=\tilde{f}_j(t,\sigma,y,z);\,z\in\mathrm{I}_j;\;j=\overline{1,n+1}\end{gathered} \tag{10}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0}=\tilde{g}_j^1(\sigma,y,z),\;\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\tilde{g}_j^2(\sigma,y,z);z\in\mathrm{I}_j;\;j=\overline{1,n+1}; \tag{11}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{11}^0\right)\tilde{u}_1\bigg|_{z=l_0}=\tilde{g}_0(t,\sigma,y);\;\frac{\partial^k\tilde{u}_{n+1}}{\partial z^k}\bigg|_{z=+\infty}=0;\;k=0,1;\;j=\overline{1,n+1}; \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h_1\right)\tilde{u}_j\bigg|_{y=0}=\omega_j^1(t,\sigma,z);\left(\frac{\partial}{\partial y}+h_2\right)\tilde{u}_j\bigg|_{y=b}=\\=\omega_j^2(t,\sigma,z);\;j=\overline{1,n+1}\end{gathered} \tag{13}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\bigg|_{z=l_k}=0;\,j=1,2;k=\overline{1,n}. \tag{14}$$

До задачі (10)—(14) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на сегменті $[0;b]$ щодо змінної y [22]:

$$\Lambda_{yk}\left[g(y)\right]=\int\limits_0^b g(y)v_k(y)dy\equiv g_k, \tag{15}$$

$$\Lambda_{yk}^{-1}\left[g_k\right]=\sum_{k=1}^{\infty}g_k\frac{v_k(y)}{\left\|v_k\right\|^2}\equiv g(y), \tag{16}$$

$$\Lambda_{yk}\left[\frac{d^2g}{dy^2}\right]=-\gamma_k^2g_k+v_k(0)\left(-\frac{dg}{dy}+h_1g\right)\bigg|_{y=0}+v_k(b)\left(\frac{dg}{dy}+h_2g\right)\bigg|_{y=b}, \tag{17}$$

де ядро перетворення

$$v_k(y) = \frac{\gamma_k \cos(\gamma_k y) + h_1 \sin(\gamma_k y)}{\sqrt{\gamma_k^2 + h_1^2}},$$

$$\|v_k\|^2 \equiv \int_0^b v_k^2(y)\,dy = \frac{b}{2} + \frac{(h_1+h_2)(\gamma_k^2 + h_1 h_2)}{2(\gamma_k^2+h_1^2)(\gamma_k^2+h_2^2)};$$

$\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ — монотонно зростаюча послідовність дійсних різних додатніх коренів трансцендентного рівняння

$$\mathrm{ctg}(\gamma b) = \frac{\gamma^2 - h_1 h_2}{\gamma(h_1+h_2)},$$

які утворюють дискретний спектр.

Інтегральний оператор Λ_{yk} за правилом (15) внаслідок тотожності (17) початково-крайової задачі (10)—(14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z);\, t>0;\, z \in \mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jk}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{jk}}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2\right)\tilde{u}_{jk} = \tilde{F}_{jk}(t,\sigma,z);\ j=\overline{1,n+1} \quad (18)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jk}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}^1(\sigma,z);\ \frac{\partial \tilde{u}_{jk}}{\partial t}\Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jk}^2(\sigma,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j=\overline{1,n+1}; \quad (19)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{u}_{1k}\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t,\sigma);\ \frac{\partial^p \tilde{u}_{n+1,k}}{\partial z^p}\Big|_{z=+\infty} = 0;\ p=0,1 \quad (20)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^m \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^m\right)\tilde{u}_{mk} - \left(\alpha_{j2}^m \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^m\right)\tilde{u}_{m+1,k}\right]\Big|_{z=l_m} = 0;\ j=1,2;\ m=\overline{1,n}, \quad (21)$$

де

$$\tilde{F}_{jk}(t,\sigma,z) = \tilde{f}_{jk}(t,\sigma,z) + a_{yj}^2 v_k(0)\tilde{\omega}_j^1(t,\sigma,z) + a_{yj}^2 v_k(b)\tilde{\omega}_j^2(t,\sigma,z).$$

До задачі (18)—(21) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(l_0;+\infty)$ з n точками спряження щодо змінної z [16]:

$$F_{n,+}[g(z)] = \int_{l_0}^{+\infty} g(z) V(z,\beta)\sigma(z)\,dz \equiv \tilde{g}(\beta), \quad (22)$$

$$F_{n,+}^{-1}\left[\tilde{g}\left(\beta\right)\right]=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{g}\left(\beta\right)V\left(z,\beta\right)\Omega_{n}\left(\beta\right)d\beta\equiv g\left(z\right), \qquad (23)$$

$$F_{n,+}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{zj}^{2}\theta\left(z-l_{j-1}\right)\theta\left(l_{j}-z\right)\frac{d^{2}g}{dz^{2}}+a_{z,n+1}^{2}\theta\left(z-l_{n}\right)\frac{d^{2}g}{dz^{2}}\right]=$$

$$=-\beta^{2}\tilde{g}\left(\beta\right)-\sigma_{1}a_{z1}^{2}\left(\alpha_{11}^{0}\right)^{-1}V_{1}\left(l_{0},\beta\right)\left(\alpha_{11}^{0}\frac{dg}{dz}+\beta_{11}^{0}g\right)\Bigg|_{z=l_{0}}- \qquad (24)$$

$$-\sum_{j=1}^{n+1}k_{j}^{2}\int\limits_{l_{j-1}}^{l_{j}}g\left(z\right)V_{j}\left(z,\beta\right)\sigma_{j}dz.$$

У формулах (22)—(24) беруть участь величини і функції:

$$V\left(z,\beta\right)=\sum_{k=1}^{n}V_{k}\left(z,\beta\right)\theta\left(z-l_{k-1}\right)\theta(l_{k}-z)+V_{n+1}\left(z,\beta\right)\theta\left(z-l_{n}\right);$$

$$\sigma\left(z\right)=\sum_{k=1}^{n}\sigma_{k}\theta\left(z-l_{k-1}\right)\theta\left(l_{k}-z\right)+\sigma_{n+1}\theta\left(z-l_{n}\right);\ \Omega_{n}\left(\beta\right)=$$

$$=\frac{\beta}{b_{n+1}\left(\beta\right)\omega_{n}\left(\beta\right)};\ V_{m}\left(z,\beta\right)=\prod_{j=m}^{n}c_{2j}a_{z,j+1}^{-1}b_{j+1}\left(\beta\right)G_{m}\left(z,\beta\right);$$

$$m=\overline{1,n};\ V_{n+1}\left(z,\beta\right)=\omega_{n2}\left(\beta\right)\cos\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right)-\omega_{n1}\left(\beta\right)\sin\left(\frac{b_{n+1}z}{a_{z,n+1}}\right);$$

$$\sigma_{k}=\prod_{j=k}^{n}\frac{c_{1j}\cdot a_{z,n+1}}{c_{2j}\cdot a_{zj}^{2}};\ \sigma_{n}=\frac{c_{1n}\cdot a_{z,n+1}}{c_{2n}\cdot a_{zn}};\ \sigma_{n+1}=\frac{1}{a_{z,n+1}};\ G_{k}\left(z,\beta\right)=$$

$$=\omega_{k-1,2}\left(\beta\right)\cos\left(\frac{b_{k}z}{a_{zk}}\right)-\omega_{k-1,1}\left(\beta\right)\sin\left(\frac{b_{k}z}{a_{zk}}\right);\ k=\overline{1,n};\ b_{j}\left(\beta\right)=$$

$$=\left(\beta^{2}+k_{j}^{2}\right)^{1/2};\ j=\overline{1,n+1};\ \omega_{n}\left(\beta\right)=\omega_{n1}^{2}\left(\beta\right)+\omega_{n2}^{2}\left(\beta\right);$$

$$\omega_{01}\left(q_{1}l_{0}\right)=-\upsilon_{11}^{01}\left(q_{1}l_{0}\right);\ \omega_{02}\left(q_{1}l_{0}\right)=-\upsilon_{11}^{02}\left(q_{1}l_{0}\right);\ \omega_{jm}\left(\beta\right)=$$

$$=\omega_{j-1,2}\left(\beta\right)\Psi_{1m}^{j}\left(q_{j}l_{j};q_{j+1}l_{j}\right)-\omega_{j-1,1}\left(\beta\right)\Psi_{2m}^{j}\left(q_{j}l_{j};q_{j+1}l_{j}\right);$$

$$m=1,2;\ \Psi_{jm}^{k}\left(q_{k}l_{k};q_{k+1}l_{k}\right)=\upsilon_{11}^{kj}\left(q_{k}l_{k}\right)\upsilon_{22}^{km}\left(q_{k+1}l_{k}\right)-$$

$$-\upsilon_{21}^{kj}\left(q_{k}l_{k}\right)\upsilon_{12}^{km}\left(q_{k+1}l_{k}\right);$$

$$\upsilon_{ij}^{k1}\left(q_{s}l_{m}\right)\equiv\left(\alpha_{ij}^{k}\frac{d}{dz}+\beta_{ij}^{k}\right)\cos\left(q_{s}z\right)\Bigg|_{z=l_{m}}=-\alpha_{ij}^{k}q_{s}\sin\left(q_{s}l_{m}\right)+\beta_{ij}^{k}\cos\left(q_{s}l_{m}\right);$$

$$\upsilon_{ij}^{k2}\left(q_s l_m\right) \equiv \left(\alpha_{ij}^k \frac{d}{dz} + \beta_{ij}^k\right)\sin\left(q_s z\right)\Bigg|_{z=l_m} =$$

$$= \alpha_{ij}^k q_s \cos\left(q_s l_m\right) + \beta_{ij}^k \sin\left(q_s l_m\right);$$

$\theta\left(x\right)$ — одинична функція Гевісайда [23].

Запишемо систему диференціальних рівнянь (18) та початкові умови (19) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_1^2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_2^2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{2k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + q_{n+1}^2\left(\sigma,\gamma_k\right)\right)\tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{F}_{1k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \tilde{F}_{2k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{F}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right) \end{bmatrix}, \quad (25)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \tilde{u}_{2}\left(t,\sigma,z\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1k}^1\left(\sigma,z\right) \\ \tilde{g}_{2k}^1\left(\sigma,z\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{g}_{n+1,k}^1\left(\sigma,z\right) \end{bmatrix};$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial t}\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \tilde{u}_{2k}\left(t,\sigma,z\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{u}_{n+1,k}\left(t,\sigma,z\right) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1k}^2\left(\sigma,z\right) \\ \tilde{g}_{2k}^2\left(\sigma,z\right) \\ \ldots\ldots\ldots \\ \tilde{g}_{n+1,k}^2\left(\sigma,z\right) \end{bmatrix}, \quad (26)$$

де

$$q_j^2\left(\sigma,\gamma_k\right) = a_{xj}^2\sigma^2 + a_{yj}^2\gamma_k^2 + \chi_j^2;\; j = \overline{1,n+1}.$$

Інтегральний оператор $F_{n,+}$, який діє за правилом (22), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{n,+}\left[\ldots\right] = \left[\int_{l_0}^{l_1}\ldots V_1\left(z,\beta\right)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2}\ldots V_2\left(z,\beta\right)\sigma_2 dz \ldots \int_{l_n}^{+\infty}\ldots V_{n+1}\left(z,\beta\right)\sigma_{n+1} dz\right] \quad (27)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (25), (26). Внаслідок тотожності (24) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2}+\beta^2+q_j^2(\sigma,\gamma_k)+k_j^2\right)\tilde{\tilde{u}}_{jk}(t,\sigma,\beta)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{F}_{jk}(t,\sigma,\beta)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma), \tag{28}$$

$$\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jk}\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta);\ \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jk}\Big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^2(\sigma,\beta), \tag{29}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jk}(t,\sigma,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{u}_{jk}(t,\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{F}}_{jk}(t,\sigma,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{F}_{jk}(t,\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{g}_{jk}^1(\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};$$

$$\tilde{\tilde{g}}_{jk}^2(\sigma,\beta)=\int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{g}_{jk}^2(\sigma,z)V_j(z,\beta)\sigma_j dz;\ j=\overline{1,n+1};\ l_{n+1}=+\infty.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,\ldots,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2=q_1^2-q_j^2\ \left(j=\overline{1,n+1}\right)$. Задача Коші (28), (29) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_k}{dt^2}+\Delta^2(\sigma,\gamma_k,\beta)\tilde{\tilde{u}}_k=\tilde{\tilde{F}}_k(t,\sigma,\beta)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{g}_{0k}(t,\sigma), \tag{30}$$

$$\tilde{\tilde{u}}_k\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta);\ \frac{d\tilde{\tilde{u}}_k}{dt}\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta), \tag{31}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_k(t,\sigma,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jk}(t,\sigma,\beta);\ \Delta^2(\sigma,\gamma_k,\beta)=\beta^2+a_{x1}^2\sigma^2+$$
$$+a_{y1}^2\gamma_k^2+\chi_1^2;\ \tilde{\tilde{F}}_k(t,\sigma,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}F_{jk}(t,\sigma,\beta);\ \tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^1(\sigma,\beta);\ \tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}_{jk}^2(\sigma,\beta).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі (30), (31) є функція

$$\tilde{\tilde{u}}_k(t,\sigma,\beta)=\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta)+$$

$$+\frac{d}{dt}\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta)+\int_0^t\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)(t-\tau)\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\times \tag{32}$$

$$\times\left[\tilde{\tilde{F}}_k(\tau,\sigma,\beta)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(l_0,\beta)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)\right]d\tau.$$

Оскільки суперпозиція операторів $F_{n,+}$ та $F_{n,+}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $F_{n,+}^{-1}$, зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{n,+}[\ldots]=\frac{2}{\pi}\begin{bmatrix}\int_0^{+\infty}\ldots V_1(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\\ \int_0^{+\infty}\ldots V_2(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int_0^{+\infty}\ldots V_{n+1}(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta\end{bmatrix}. \tag{33}$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (33) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}(t,\sigma,\beta)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}(t,\sigma,\beta)$ визначена формулою (32). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі (18)—(21):

$$\tilde{u}_{jk}(t,\sigma,z)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^2(\sigma,\beta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)t\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\tilde{\tilde{g}}_k^1(\sigma,\beta)\right]V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta+ \tag{34}$$

$$+\int_0^t\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)(t-\tau)\right)}{\Delta(\sigma,\gamma_k,\beta)}\left[\tilde{\tilde{F}}_k(\tau,\sigma,\beta)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times V_1(l_0;\beta)\tilde{g}_{0k}(\tau,\sigma)\right]V_j(z,\beta)\Omega_n(\beta)d\beta d\tau;\ j=\overline{1,n+1}.$$

До функцій $\tilde{\tilde{u}}_{jk}\left(t,\sigma,\beta\right)$, визначених формулами (34), послідовно застосуємо обернені оператори Λ_{yk}^{-1} за правилом (16) та F_x^{-1} за правилом (8). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j\left(t,x,y,z\right)=$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)f_k\left(\tau,\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^1\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$
$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b\int_{l_{k-1}}^{l_k} E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^2\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+ \qquad (35)$$
$$+\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^b W_j\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_0\left(\tau,\xi,\eta\right)d\xi d\eta d\tau+$$
$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}\Big[W_{yjk}^1\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k^1\left(\tau,\xi,\zeta\right)+$$
$$+W_{yjk}^2\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k^2\left(\tau,\xi,\zeta\right)\Big]\sigma_k d\xi d\zeta d\tau;\ j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(6).

У формулах (35) застосовано компоненти

$$E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\frac{2}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\beta\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,\gamma_k,\beta\right)}\times$$
$$\times V_j\left(z,\beta\right)V_k\left(\zeta,\beta\right)\Omega_n\left(\beta\right)\cos\left(\left|x-\xi\right|\sigma\right)\frac{v_r\left(y\right)v_r\left(\eta\right)}{\left\|v_r\right\|}d\sigma d\beta$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$W_j\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)=-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,l_0\right)$$

аплікатної матриці Гріна (функції Гріна), компоненти

$$W_{yjk}^1\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{yk}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$$

лівої ординатної матриці та компоненти

$$W_{yjk}^2\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{jk}\left(t,x,\xi,y,b,z,\zeta\right)$$

правої ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_j\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)$, $W_{yjk}^s\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)$, $\left(s=1,2\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (35), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5), (6) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [23].

Зауваження 1. У випадку $a_{xj}^2=a_{yj}^2=a_{zj}^2\equiv a_j^2>0$ формули (35) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)—(6) в ізотропному (*n+1*) — шаровому напівобмеженому просторовому середовищі.

Зауваження 2. Параметри $\alpha_{11}^0,\beta_{11}^0$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхні $z=l_0$ крайової умови 1-го роду $\left(\alpha_{11}^0=0,\beta_{11}^0=1\right)$, 2-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1,\beta_{11}^0=0\right)$ та 3-го роду $\left(\alpha_{11}^0=-1,\beta_{11}^0\equiv h>0\right)$.

Зауваження 3. Параметри $h_j\left(j=1,2\right)$ дають можливість виділяти із формул (35) розв'язки початково-крайових задач у випадках задання на поверхнях $y=0;y=b$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій.

Зауваження 4. Аналіз розв'язку (35) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right)$, $g_j^1\left(x,y,z\right),g_j^2\left(x,y,z\right)$, $g_0\left(t,x,y\right)$, $\omega_j^1\left(t,x,z\right),\omega_j^2\left(t,x,z\right)$ проводиться безпосередньо.

2. $\Omega_2=\left(0;+\infty\right)\times\left(0;+\infty\right)$. У цьому випадку вважаємо, що на межі області Ω_2 виконуються крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial x}+p\right)u_j\Bigg|_{x=0}=\theta_j\left(t,y,z\right);\ \frac{\partial^k u_j}{\partial x^k}\Bigg|_{x=+\infty}=0;\ j=\overline{1,n+1};\ k=0,1 \qquad (36)$$

щодо змінної *x* та крайові умови

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)u_j\Bigg|_{y=0}=\omega_j\left(t,x,z\right);\ \frac{\partial^k u_j}{\partial y^k}\Bigg|_{y=+\infty}=0;\ j=\overline{1,n+1};\ k=0,1 \qquad (37)$$

щодо змінної y, де p,h — деякі невід'ємні сталі; $\theta\left(t,y,z\right)=$ $=\left\{\theta_1\left(t,y,z\right),\theta_2\left(t,y,z\right),\ldots,\theta_{n+1}\left(t,y,z\right)\right\}$; $\omega\left(t,x,z\right)=\left\{\omega_1\left(t,x,z\right),\omega_2\left(t,x,z\right),\ldots,\right.$ $\left.\omega_{n+1}\left(t,x,z\right)\right\}$ — задані обмежені неперервні функції.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)—(4), (36), (37) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22; 16].

До задачі (1)—(4), (36) (37) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної x [22]:

$$F_{+x}\left[g(x)\right]=\int_0^{+\infty} g(x)K_x(x,\sigma)dx\equiv\tilde{g}(\sigma), \tag{38}$$

$$F_{+x}^{-1}\left[\tilde{g}(\sigma)\right]=\int_0^{+\infty} \tilde{g}(\sigma)K_x(x,\sigma)d\sigma\equiv g(x), \tag{39}$$

$$F_{+x}\left[\frac{d^2g}{dx^2}\right]=-\sigma^2\tilde{g}(\sigma)+K_x(0,\sigma)\left(-\frac{dg}{dx}+pg\right)\bigg|_{x=0}, \tag{40}$$

де ядро перетворення

$$K_x(x,\sigma)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sigma\cos(\sigma x)+p\sin(\sigma x)}{\sqrt{\sigma^2+p^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+x} за правилом (38) внаслідок тотожності (40) початково-крайовій задачі (1)—(4), (36), (37) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'=\{(t,y,z);\,t>0;$ $y\in(0;+\infty);\,z\in \mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2}-\left[a_{yj}^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}+a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\tilde{u}_j+\left(a_{xj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_j=\\=\tilde{F}_j(t,\sigma,y,z);\,z\in\mathrm{I}_j;\,j=\overline{1,n+1}\end{gathered} \tag{41}$$

з початковими умовами (11), крайовими умовами (12), крайовими умовами

$$\left(-\frac{\partial}{\partial y}+h\right)\tilde{u}_j\bigg|_{y=0}=\tilde{\omega}_j(t,\sigma,z);\ \frac{\partial^k\tilde{u}_j}{\partial y^k}\bigg|_{y=+\infty}=0;\ j=\overline{1,n+1};\ k=0,1; \tag{42}$$

та умовами спряження (14), де

$$\tilde{F}_j(t,\sigma,y,z)=\tilde{f}_j(t,\sigma,y,z)+a_{xj}^2K_x(0,\sigma)\theta_j(t,y,z);\ j=\overline{1,n+1}.$$

До задачі (41), (11), (12), (42), (14) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій півосі $(0;+\infty)$ щодо змінної y [21]:

$$F_{+y}\left[g(y)\right]=\int_0^{+\infty} g(y)K_y(y,s)dy\equiv\tilde{g}(s), \tag{43}$$

$$F_{+y}^{-1}\left[\tilde{g}(s)\right] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(s) K_y(y,s)\,ds \equiv g(y), \tag{44}$$

$$F_{+y}\left[\frac{d^2 g}{dy^2}\right] = -s^2 \tilde{g}(s) + K_y(0,s)\left(-\frac{dg}{dy} + hg\right)\Bigg|_{y=0}, \tag{45}$$

де ядро перетворення

$$K_y(y,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{s\cos(sy) + h\sin(sy)}{\sqrt{s^2+h^2}}.$$

Інтегральний оператор F_{+y} за правилом (43) внаслідок тотожності (45) початково-крайовій задачі (41), (11), (12), (42), (14) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D_3'' = \{(t,z);\, t>0;\ z \in \mathrm{I}_n^+\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial z^2} + \left(a_{xj}^2 \sigma^2 + a_{yj}^2 s^2 + \chi_j^2\right)\tilde{\tilde{u}}_j = \\ = \tilde{\tilde{G}}_j(t,\sigma,s,z);\ z \in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1}\end{gathered} \tag{46}$$

з початковими умовами

$$\tilde{\tilde{u}}_j\Big|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j^1(\sigma,s,z);\ \frac{\partial \tilde{\tilde{u}}_j}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = \tilde{\tilde{g}}_j^2(\sigma,s,z);\ z\in \mathrm{I}_j;\ j = \overline{1,n+1}, \tag{47}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)\tilde{\tilde{u}}_1\Bigg|_{z=l_0} = \tilde{\tilde{g}}_0(t,\sigma,s);\ \frac{\partial^k \tilde{\tilde{u}}_{n+1}}{\partial z^k}\Bigg|_{z=+\infty} = 0;\ k = 0,1 \tag{48}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)\tilde{\tilde{u}}_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)\tilde{\tilde{u}}_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0;\ k = \overline{1,n};\ j = 1,2, \tag{49}$$

де

$$\tilde{\tilde{G}}_j(t,\sigma,s,z) = \tilde{\tilde{F}}_j(t,\sigma,s,z) + a_{yj}^2 K_y(0,s)\,\tilde{\omega}_j(t,\sigma,z);\ j = \overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (46)—(49) збігається із задачею (18)—(21). Отже, відповідно до формул (34), єдиний розв'язок задачі (46)—(49) визначають функції

$$\tilde{\tilde{u}}_j(t,\sigma,s,z) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\sigma,s,\beta)t)}{\Delta(\sigma,s,\beta)}\tilde{\tilde{g}}^2(\sigma,s,\beta) + \right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\beta\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\beta\right)}\tilde{\tilde{g}}^{1}\left(\sigma,s,\beta\right)\Big]V_j\left(z,\beta\right)\Omega_n\left(\beta\right)d\beta+$$

$$+\int_0^t\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\beta\right)\left(t-\tau\right)\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\beta\right)}\Big[\tilde{\tilde{G}}\left(\tau,\sigma,s,\beta\right)-\sigma_1 a_{z1}^2\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}\times \tag{50}$$

$$\times V_1\left(l_0,\beta\right)\tilde{\tilde{g}}_0\left(\tau,\sigma,s\right)\Big]V_j\left(z,\beta\right)\Omega_n\left(\beta\right)d\beta d\tau;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{\tilde{u}}_j\left(t,\sigma,s,z\right)$, визначених формулами (50), обернені оператори F_{+y}^{-1} та F_{+x}^{-1}, одержуємо функції

$$u_j\left(t,x,y,z\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)f_k\left(\tau,\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta d\tau+$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^1\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+$$

$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)g_k^2\left(\xi,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\eta d\zeta+ \tag{51}$$

$$+\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}W_j\left(t-\tau,x,\xi,y,\eta,z\right)g_0\left(\tau,\xi,\eta\right)d\xi d\eta d\tau+$$

$$+a_{xj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{xjk}\left(t-\tau,x,y,\eta,z,\zeta\right)\theta_k\left(\tau,\eta,\zeta\right)\sigma_k d\eta d\zeta d\tau+$$

$$+a_{yj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{+\infty}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{yjk}\left(t-\tau,x,\xi,y,z,\zeta\right)\omega_k\left(\tau,\xi,\zeta\right)\sigma_k d\xi d\zeta d\tau,$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі (1)—(4), (36), (37).

У формулах (51) застосовано компоненти

$$E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(\Delta\left(\sigma,s,\beta\right)t\right)}{\Delta\left(\sigma,s,\beta\right)}V_j\left(z,\beta\right)\times$$

$$\times V_k\left(\zeta,\beta\right)\Omega_n\left(\beta\right)K_x\left(x,\sigma\right)K_x\left(\xi,\sigma\right)K_y\left(y,s\right)K_y\left(\eta,s\right)d\sigma ds d\beta$$

матриці впливу, компоненти $W_j\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)$ аплікатної матриці Гріна, компоненти

$$W_{xjk}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)=E_{jk}\left(t,x,0,y,\eta,z,\zeta\right)$$

абсцисної матриці Гріна та компоненти

$$W_{yjk}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)=E_{jk}\left(t,x,\xi,y,0,z,\zeta\right)$$

ординатної матриці Гріна розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}\left(t,x,\xi,y,\eta,z,\zeta\right)$ і функцій Гріна $W_j\left(t,x,\xi,y,\eta,z\right)$, $W_{xjk}\left(t,x,y,\eta,z,\zeta\right)$, $W_{yjk}\left(t,x,\xi,y,z,\zeta\right)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j\left(t,x,y,z\right)$, визначені формулами (51), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (36), (37) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [23].

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої гіперболічної крайової задачі; 2) параметри p,h дають можливість виділяти із формул (51) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $x=0; y=0$ крайових умов 1-го й 2-го роду та їх можливих комбінацій; 3) аналіз розв'язку (51) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j\left(t,x,y,z\right), g_j^1\left(x,y,z\right), g_j^2\left(x,y,z\right)$, $g_0\left(t,x,y\right)$, $\theta_j\left(t,x,z\right)$, $\omega_j\left(t,x,z\right)$ проводиться безпосередньо.

Висновки. Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень Фур'є у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях, які описуються декартовою системою координат. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1966. — 292 с.

6. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
10. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М. : Наука, 1972. — 735 с.
11. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
12. Конет І. М. Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
13. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
14. Громик А. П. Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2008. — 120 с.
15. Громик А. П. Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2009. — 120 с.
16. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
17. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Крайові задачі для диференціальних рівнянь : зб. наук. пр. — Чернівці : Прут, 2010. — Вип. 19, ч. 1. — С. 47–59.
18. Конет І. М. Інтегральні зображення розв'язків гіперболічних крайових задач в необмежених двоскладових просторових областях / І. М. Конет // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 55–71.
19. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).
20. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в напівобмежених кусково-однорідних просторових областях / І. М. Конет // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. / Ін-т кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 127–140.
21. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.

22. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделенными переменными (Фурье, Ханкеля) / М. П. Ленюк. — К., 1983. – 60 с. — (Препр. / АН УССР. Ин-т математики; 83.4).
23. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.

The method of influence functions and Green's function (key solutions) developed integral image accurate analytical solutions of algorithmic nature of hyperbolic boundary value problems in multilayered semiconfined (piecewise-homogeneous) spatial regions. To build a major integrated solutions are involved corresponding Fourier transform to Cartesian axes, semi-axles and the segment and the Fourier integral in Cartesian semiaxles with n coupling points.

Key words: *hyperbolic equations, initial and boundary conditions, matching, integral transformation, main solution.*

Отримано: 07.03.2012

УДК 517.91:532.2

М. П. Ленюк, д-р фіз.-мат. наук, професор

Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ (КОНТОРОВИЧА—ЛЄБЄДЄВА)— БЕССЕЛЯ—ЕЙЛЕРА НА ПОЛЯРНІЙ ОСІ

Запроваджено гібридне інтегральне перетворення, породжене на полярній осі з двома точками спряження гібридним диференціальним оператором (Конторовича—Лєбєдєва)—Бесселя—Фур'є.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, функції Коші, функції впливу, гібридне інтегральне перетворення, основна тотожність, головні розв'язки.*

Постановка проблеми та її аналіз. Відомо, що дослідження фізико-технічних характеристик композитних матеріалів, які знаходяться в різних умовах експлуатації, математично приводить до задачі інтегрування сепаратної системи диференціальних рівнянь другого порядку на кусково-однорідному інтервалі з відповідними початковими та крайовими умовами [1—3]. Одним із ефективних методів побудови інтегрального зображення точних аналітичних розв'язків алгоритмічного характеру таких задач є метод гібридних інтегральних перетворень. Основні положення теорії гібридних інтегральних перетворень (ГІП) закладено в монографії [4]. Ця стаття присвячена запровадженню одного з типів ГІП.