Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнар. наук. конф., 16-21 черв. 2008 р. : тези доп. — Мелітополь, 2008. — С. 48–49.
6. Єрьоменко В. Періодичні розвязки сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку / В. Єрьоменко, А. Алілуйко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2009. — № 4. — С. 181–187.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1973. — 832 с.
8. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / [Н. П. Еругин, И. З. Штокало и др.]. — К. : Вища шк., 1974. — 472 с.
9. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / А. М. Самойленко. — М. : Наука, 1987. — 304 с.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 496 с.
11. Красносельский М. А. Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 352 с.

We establish sufficient conditions for the existence of periodic solutions of function-singular perturbations of linear higher-order differential equations for arbitrary periodic inhomogeneity.

Key words: *periodic solution, function-singular perturbations of linear ordinary higher-order differential equations.*

Отримано: 20.03.2012

УДК 517.965

О. І. Іолтухівська, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПРО НЕРІВНІСТІ ТИПУ ВЕНДРОФА ДЛЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто інтегро-сумарні нерівності Вендрофа. Отримано нову оцінку для функції, що задовольняє нерівності типу Вендрофа для функцій двох незалежних змінних.

Ключові слова: *інтегро-сумарна нерівность, неперервна функція, невід'ємна функція, нерівність Вендрофа.*

Вступ. Поняття інтегро-сумарної нерівності було введене в роботі Самойленка А. М. та Борисенка С. Д. [1] в 1985 р., для нерівностей типу

$$u(t) < \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s)\right) ds + \sum_{t_0 < t_k < t} \psi(t, t_k)\mu_k\left(u(t_k - 0)\right), \qquad (1)$$

де $u(t)$, $\varphi(t)$, $\psi\left(t,t_i\right)$, $\mu_k(t)$ — неперервні невід'ємні при $t \ge t_0$ функції (i = 1, 2, ...) за винятком $u(t)$, що має розриви 1-го роду в точках t_k, причому $0 \le t_0 < t_1 < ...,\ \lim\limits_{i \to \infty} t_i = \infty$; функція $K(t,s,u)$ невід'ємна при $t \ge s \ge t_0$, визначена в області $t \ge s \ge t_0, \left|u\right| \le k$ і при фіксованих t і s неспадна по u.

Дані нерівності виникають при дослідженні систем диференціальних рівнянь з імпульсним збуренням

$$\begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = F(t,x), t \ne t_i(x), \\ &\Delta x\big|_{t=t_i(x)} = I_i(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Однією з перших робіт при розгляді нерівностей типу (1) є робота Самойленка А. М. та Перестюка М. О. [2], де розглянуто лінійну інтегро-сумарну нерівність (аналог леми Гронуолла—Беллмана) для кусково-неперервних функцій.

Автори праць [3-7] встановили новий тип інтегральної нерівності Гронуолла—Оу—Янга, які вміщають функції від двох змінних[9].

Постановка задачі. Мета даної статті полягає у знаходженні оцінки функції, що задовольняє певному типу нерівностей Вендрофа для функцій двох незалежних змінних і узагальнює результати [9] на випадок розривних функцій.

Інтегро-сумарні нерівності Вендрофа. Наведемо деякі результати про інтегро-сумарні нерівності Вендрофа, що потрібні будуть нам в подальшому.

Теорема [8]. Нехай невід'ємна функція $u(t,x)$ визначена в області:

$$D = \left\{ \bigcup_{k,j \ge 1} D_{kj}, D_{kj} = \left\{(t,x) : t \in [t_{k-1}, t_k] \times x \in [x_{j-1}, x_j]\right\}, k = 1,2,..., j = 1,2,... \right\},$$

неперервна в D, за винятком $\{t_i, x_i\}$ — точок скінченого стрибка:

$$u(t_i - 0, x_i - 0) \ne u(t_i + 0, x_i + 0),\ i = 1,2,...$$

і задовольняє інтегро-сумарній нерівності

$$u(t,x) \le \psi(t,x) + q(t,x) \int_{t_0}^{t} \int_{x_0}^{x} f(\xi,\eta) u^m(\xi,\eta) d\xi d\eta +$$

$$+ \sum_{(t_0,x_0)<(t_i,x_i)<(t,x)} \beta_i u\left(t_i - 0, x_i - 0\right),\ m < 0,\ \ t_0 > 0,\ \ x_0 > 0,$$

$$q(t_0, x_0) = 1$$

де $q(t,x) \ge 1$, $\ m > 0, t_0 > 0, x_0 > 0$, $\ \psi(t,x) > 0$, $\ \forall (t,x) \in D$ і є неспадною по (t,x): $\forall p \le P$, $q \le Q$, $\psi(p,q) \le \psi(P,Q)$ при $(p,q) \in D$, величини $\beta_i \geq 0,\ \ \forall i \in N$, функція f — невід'ємна, причому $f(\xi,\eta)=0,$ $(\xi,\eta)\in D_{lp,}\ l \neq p$, для довільних $l=1,2,...,\ \ p=1,2,....$

Тут $(t_i,x_i)<(t_{i+1},x_{i+1})$, якщо $t_i<t_{i+1}$, $x_i<x_{i+1}$, $\forall i=1,2,....,$ причому

$$\lim_{i\to\infty} t_i=\infty,$$
$$\lim_{i\to\infty} x_i=\infty.$$

Тоді справедливі оцінки:

$$u(t,x)\leq \psi(t,x)q(t,x)\prod_{(t_0,x_0)<(t_i,x_i)<(t,x)}\left(1+\beta_i q(t_i,x_i)\right)\times$$
$$\times\left[1+(1-m)\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\psi^{m-1}(\xi,\eta)q^m(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right]^{\frac{1}{1-m}},\ \ 0<m<1$$
$$u(t,x)\leq \psi(t,x)q(t,x)\prod_{(t_0,x_0)<(t_i,x_i)<(t,x)}\left(1+\beta_i q(t_i,x_i)\right)\times$$
$$u(t,x)\leq \psi(t,x)q(t,x)\prod_{(t_0,x_0)<(t_i,x_i)<(t,x)}\left(1+\beta_i q(t_i,x_i)\right)\times$$
$$\times\left[1-(m-1)\prod_{(t_0,x_0)<(t_i,x_i)<(t,x)}\left(1+\beta_i q(t_i,x_i)\right)^{m-1}\times\right.$$
$$\left.\times\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\psi^{m-1}(\xi,\eta)q^m(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta\right]^{\frac{-1}{m-1}},m>1,$$

для довільних $(t,x)\in D$:

$$\int_{t_0}^{t}\int_{x_0}^{x}\psi^{m-1}(\xi,\eta)q^m(\xi,\eta)f(\xi,\eta)d\xi d\eta<$$
$$<\left[(m-1)\prod_{(t_0,x_0)<(t_i,x_i)<(t,x)}\left(1+\beta_i q(t_i,x_i)\right)\right]^{-1}.$$

Основний результат. Далі буде отримано оцінку функції, що задовольняє нерівності типу Вендрофа [8] для розривної функції та узагальнює результат [9].

Теорема. Нехай невід'ємна функція $u(t, x)$ визначена в області

$$D=\left\{\bigcup_{k,j}D_{kj},D_{kj}=\left\{\left(t,x\right):t\in[t_{k-1},t_k[,x\in[x_{j-1},x_j[\right\}k=1,2...,j=1,2...\right\},$$

неперервна в D за виключенням (t_i, x_i) — точок скінченного стрибка $u(t_{i-0}, x_{i-0}) \neq u(t_{i+0}, x_{i+0})$, і задовольняє інтегро-сумарній нерівності:

$$u(t,x) \le c + \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x) w_1\left(u(t,x)\right) dtdx + \\ + \sum_{(t,x)>(t_j x_j)>(t_0,x_0)} \beta_j u\left(t_j - 0, x_j - 0\right). \tag{3}$$

Тут $(t_i, x_i) < (t_{i+1}, x_{i+1})$, якщо $t_i < t_{i+1}$, $x_i < x_{i+1}$. Тоді справедлива така оцінка:

$$u(t,x) \le G^{-1}\left(G(c) + \prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)} (1+\beta_j) \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x) dtdx \right),$$

де $G(r) = \int_{r_0}^{z} \frac{ds}{w_1}$, $r \ge r_0 > 0$, G^{-1} — обернена до G, причому, що

$$G(c) + \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x) dtdx + \\ + \prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)} (1+\beta_j) \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x) dtdx \in Dom(G^{-1}).$$

Доведення. Доведення теореми проводимо за схемою статті [8].

Визначимо додатну функцію $z(t,x)$:

$$z(t,x) = c + \xi + \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x) w_1\left(z(t,x)\right) dtdx + \\ + \sum_{(t,x)>(t_j x_j)>(t_0,x_0)} \beta_j z\left(t_j - 0, x_j - 0\right),$$

де ξ достатньо мале позитивне число, тоді:

$$u(t,x) \le z(t,x).$$

Відзначимо, що $z(x,y)$ неспадна функція.

Розглянемо область D_{11}:

$$D_{11} = \left\{ (t,x) : t \in [t_0, t_1]; x \in [x_0, x_1] \right\}.$$

Тоді

$$z(t,x) \le c + \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x) w_1\left(z(t,x)\right) dtdx$$

$$w_1(z(t,x)) \ge w_1(z(t_0,x_0)) = w_1(c+\xi) > 0\ ;$$

$$G(z(t,x)) = \frac{z(t,x)}{w_1(z(t,x))} \le \sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\ ;$$

$$G(z(t,x)) \le G(z(t_0,x)) + \sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\ ;$$

$$z(t,x) \le G^{-1}\left(G(c) + \sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\right);$$

$$G(c) + \sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx \in Dom(G^{-1})\ ;$$

Розглянемо область D_{22}:

$$D_{22} = \{(t,x) : t \in [t_1,t_2]; x \in [x_1,x_2]\}\ .$$

Отже,

$$z(t,x) \le c + (1+\beta_1)\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\ .$$

Аналогічно до першого випадку,

$$z(t,x) \le G^{-1}\left(G(c) + (1+\beta_1)\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\right).$$

Розглянемо область $D_{k,k}$ тоді для $(t,x) \in D_{k+1,k+1}$ маємо:

$$G(z(t,x)) \le z(t_0,x) + \sum_{i=0}^{n}\beta_i \prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)}(1+\beta_i)\left(\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\right) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)\prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)}(1+\beta_i)\left(\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(\sigma,\delta)d\sigma d\delta\right)dtdx +$$

$$+\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx \le G(c) + \prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)}(1+\beta_i)\left(\sum_{i=0}^{n}\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\right) +$$

$$+\int_{t_i}^{t}\int_{x_i}^{x} f_i(t,x)dtdx\ .$$

Отримаємо в області $D_{k+1,k+1}$ оцінку для $z(t,x)$:

$$z(t,x) \le c + \prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)} (1+\beta_j) \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x)\,dtdx \,.$$

Застосувавши функцію G отримаємо:

$$z(t,x) \le G^{-1}\left(G(c) + \prod_{(t,x)>(t_j,x_j)>(t_0,x_0)} (1+\beta_j) \sum_{i=0}^{n} \int_{t_i}^{t} \int_{x_i}^{x} f_i(t,x)\,dtdx \right),$$

що і доводить твердження.

Висновок. Отримана у статті нова оцінка для функції задовольняє нерівності типу Вендрофа для функцій двох незалежних змінних, що узагальнює результати [8] і [9] на випадок розривних функцій. Дані результати вказують на перспективу дослідження стійкості руху диференціальних моделей з імпульсним збуренням.

Список використаних джерел:

1. Самойленко А. М. Интегро-суммарные неравенства и устойчивость процессов с дискретным возмущением / А. М. Самойленко, С. Д. Борисенко // Тр. третьей Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения». — Руссе, 1985. — Ч. 1. — С. 377–380.
2. Самойленко А. М. Переодические решения слаболинейных систем с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк // Дифференц. уравнения. – 1978. — Т. 14, № 16. — С. 1034–1045.
3. Bainov D. Integral inequalities and applications / D. Bainov, P. Simeonov. — Kluwer : Academic Publishers, 1992. — P. 120.
4. Cheung W. S. Some new nonlinear inequalities and applications to boundary value problems / W. S. Cheung. — Nonlinear Anal, 2006. — P. 2112–2128.
5. Cheung W. S. On certain new Gronwall-Ou-Iang type integral inequalities in two variables and their application / W. S. Cheung, Q. H. Ma // Inequal. Appl. J. — 2005. — P. 347–361.
6. Cho Y. J. On some integral inequalities with iterated integrals / Y. J. Cho, S. S. Dragomir, Y.-H. Kim // Korean Math. Soc. J. — 2006. — P. 563–578.
7. Dragomir S. S. On certain new integral inequalities and their applications / S. S. Dragomir, Y.-H. Kim // Inequal. Pure Appl. Math. J. — 2002.
8. Диференціальні моделі. Стійкість : навч. посіб. / А. М. Самойленко, С. Д. Борисенко, Д. Матараццо, Р. Тоскано, В. В. Ясінський. — К. : Вища школа, 2000. — 329 с.
9. Cho Y. J. New Gronwall-Ou-Iang type integral inequalities and their applications / Y. J. Cho, Y.-H. Kim, J. Pecaric // Inequal. Appl. J. — 2008. — P. 111–127.

In this paper, we consider integro-sum inequalities of Wendroff type. Obtain a new estimate of the function that satisfies the inequality Wendroff type for the function of two independent variables.

Key words: *integro-sum inequality, continuous function, not negative function, inequality of Wendroff type.*

Отримано: 26.03.2012