УДК 517.919

В. О. Єрьоменко, канд. фіз.-мат. наук

Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль

ПЕРІОДИЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ ФУНКЦІОНАЛЬНО-СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ЛІНІЙНИХ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

Встановлено достатні умови існування періодичних розв'язків функціонально-сингулярно збурених лінійних звичайних диференціального рівняння вищих порядків для довільної періодичної неоднорідності.

Ключові слова: *періодичні розв'язки, сингулярно збурені лінійні звичайні диференціальні рівняння вищих порядків.*

Умовні позначення: $C^r(\mathcal{T}_1)$ — простір векторних або матричних функцій, що набувають дійсних значень, періодичних з періодом 2π і таких, що є неперервними разом із усіма похідними до порядку r включно; $H^r(\mathcal{T}_1)$ — простір функцій, інтегрованих із квадратом на $\mathcal{T}_1 = [0; 2\pi]$ разом із усіма узагальненими похідними до порядку r включно; $\Phi(t,\varepsilon) \in C^r$ означає, що по змінній t функція $\Phi(t,\varepsilon)$ належить $C^r(\mathcal{T}_1)$, а по ε неперервна рівномірно відносно t; $\langle \,.\,,\,.\, \rangle$ — скалярний добуток в R^n; $|\Phi(t)|_r = \max_{t\in\tau_1,\, 0\le\rho\le r} \left\|\Phi^{(\rho)}(t)\right\|$, $\|.\|$ — евклідова векторна або узгоджена матрична норма.

1. Розглянемо скалярне лінійне диференціальне рівняння

$$\varepsilon a_1(t)x^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} a_{i+1}(t)x^{(n-i)} = f(t), \tag{1}$$

де ε — додатний малий параметр, множина нулів функції $a_1(t)$ непорожня. У випадку $\varepsilon = 1$ і поліноміальних коефіцієнтів (нулі $a_1(t)$ ізольовані) це рівняння детально досліджене [1, с. 113]. При цьому для $n = 2$ отримуються рівняння: Лежандра, гіпергеометричне і вироджене гіпергеометричне, Бесселя тощо. Рівняння (1) при $a_1(t) \equiv 1$ вивчалося при дослідженні задачі про точки повороту. Найбільш загальні результати отримав Сибуйа [2, с. 227].

Рівняння (1) рівносильне деякій системі диференціальних рівнянь, узагальнення якої має вигляд

$$\varepsilon^k A(t,\varepsilon)X^{(1)} = B(t,\varepsilon)X + F(t,\varepsilon), \tag{2}$$

де $k \ge 0$, $0 < \varepsilon << 1$, квадратна матриця порядку n $A(t,\varepsilon)$ вироджується при всіх значеннях ε або при $\varepsilon = 0$. Ці системи описують процеси, які зустрічаються у різних галузях сучасної науки і техніки [3]. Найбільш повне дослідження системи (2) викладене в [3].

Об'єктом дослідження є скалярне диференціальне рівняння

$$\varepsilon a(t)x^{(n+1)} + x^{(n)} + b_1(t)x^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)x = f(t) \qquad (3)$$

із дійсними періодичними коефіцієнтами, де $a(t)$ набирає нульові значення на множині довільної структур, ε — малий додатний параметр.

Вивчаються питання: 1) при яких умовах рівняння (3) має гладкий періодичний розв'язок $x_0(t,\varepsilon)$ для довільної періодичної неоднорідності; 2) якщо «вироджене» рівняння

$$y^{(n)} + b_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + b_n(t)y = f(t) \qquad (4)$$

володіє періодичним розв'язком $y_0(t)$ для довільної періодичної неоднорідності, то який зв'язок між функціями $x_0(t,\varepsilon)$ та $y_0(t)$ в процесі спрямування ε до нуля; 3) яка оцінка максимального значення малого параметра ε, при якому зберігається періодичний розв'язок $x_0(t,\varepsilon)$.

Зауважимо, що рівняння (3) рівносильне системі диференціальних рівнянь виду (2), однак методи, розроблені в [3] та інших роботах, не можна використати для дослідження отриманої системи. У випадку $a(t) \equiv 1$ рівняння (3) природно назвати сингулярно збуреним відносно рівняння (4). А наявність нулів функції $a(t)$ (необов'язково ізольованих) дозволяє назвати збурення рівняння (4) функціонально-сингулярними. Нарешті, наявність параметра в рівнянні (3) обумовлена, зокрема, таким фактом [4]: скалярне рівняння $(\sin t)x^{(1)} = bx - (\sin t)^b$, де b — ціле додатне число, має періодичний розв'язок, гладкість r якого визначається нерівністю $b - r\cos t > 0$.

При вивченні поставлених задач суттєво використано дослідження вироджених систем типу Ріккаті. Ефективність такого підходу показано в [5] та [6] при дослідженні рівнянь виду (3) другого та третього порядків відповідно.

2. Рівняння (3) рівносильне системі рівнянь

$$diag\left\{E_n, \varepsilon a(t)\right\} X^{(1)} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ -b_n(t) & -b_{n-1}(t) & -b_{n-2}(t) & \ldots & -b_1(t) & -1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f(t) \end{pmatrix}, \qquad (5)$$

де $X = col\left(x, x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}\right)$, E_n — одинична матриця порядку n.

Введемо у розгляд квадратні матриці порядку $n+1$

$$V(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1+\varepsilon z_1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1+\varepsilon z_2 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1+\varepsilon z_n & 0\\ -\varepsilon a z_1 & -\varepsilon a z_2 & \dots & -\varepsilon a z_n & 1\end{pmatrix},$$

$$W(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ z_1 & z_2 & \dots & z_n & 1\end{pmatrix}, \qquad (6)$$

де $z_1(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon),\dots,z_n(t,\varepsilon)$ задовольняють нелінійній системі n диференціальних рівнянь

$$\begin{cases}\varepsilon a(t)z_1^{(1)}+[1+\varepsilon a(t)z_n]z_1+b_n(t)=0,\\ \varepsilon a(t)z_2^{(1)}+\varepsilon a(t)z_1+[1+\varepsilon a(t)z_n]z_2+b_{n-1}(t)=0,\\ \varepsilon a(t)z_3^{(1)}+\varepsilon a(t)z_2+[1+\varepsilon a(t)z_n]z_3+b_{n-1}(t)=0\,,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \varepsilon a(t)z_n^{(1)}+\varepsilon a(t)z_{n-1}+[1+\varepsilon a(t)z_n]z_n+b_1(t)=0.\end{cases} \qquad (7)$$

Якщо система рівнянь (7) має періодичний розв'язок ($z_1(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon),\dots,z_n(t,\varepsilon)$) такий, що для деякого $\varepsilon>0$ і всіх $t\in\mathcal{T}_1$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon^0]$ виконуються нерівності

$$1+\varepsilon z_i(t,\varepsilon)\neq 0,\ \ i=\overline{1,n}, \qquad (8)$$

тоді матриці $V(t,\varepsilon)$, $W(t,\varepsilon)$ є періодичними та невиродженими і при цьому система рівнянь (5) після заміни $X=W(t,\varepsilon)Y$ і множення зліва на $V(t,\varepsilon)$ набере такого вигляду

$$diag\left\{E_n,\varepsilon a(t)\right\}Y^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0\\ z_1 & z_2 & z_3 & \dots & z_n & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1-\varepsilon a z_n\end{pmatrix}Y+\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\f(t)\end{pmatrix}, \qquad (9)$$

де $Y=col(y_1,y_2,\dots,y_{n+1})$.

3. Дослідимо систему рівнянь (7), векторна форма якої має такий вигляд

$$\varepsilon a(t)z^{(1)}+[P(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)z_nE_n]z=b(t), \tag{10}$$

де

$$P(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \varepsilon a(t) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon a(t) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon a(t) & 1 \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} -b_n \\ -b_{n-1} \\ \vdots \\ -b_1 \end{pmatrix},\quad z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Здійснивши у рівнянні (10) заміну

$$z=u+b(t), \tag{12}$$

отримаємо

$$\varepsilon a(t)u^{(1)}+[P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)u_nE_n]u=\varepsilon g(t), \tag{13}$$

де

$$P_1(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} 1-\varepsilon ab_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_n \\ \varepsilon a & 1-\varepsilon ab_1 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_{n-1} \\ 0 & \varepsilon a & 1-\varepsilon ab_1 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \varepsilon a & 1-\varepsilon ab_1 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$g=a\,col(b_n^{(1)}-b_1b_n;b_{n-1}^{(1)}-b_1b_{n-1}+b_n;b_{n-2}^{(1)}-b_1b_{n-2}+b_{n-1};\dots;b_1^{(1)}-b_1^2+b_2\},$$

$$u=col(u_1,u_2,\dots,u_n).$$

Оцінимо мінімальне власне значення матриці

$$\frac{1}{2}\left(P_1+P_1^*\right)=$$

$$=\begin{pmatrix} 1-\varepsilon ab_1 & \varepsilon a/2 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_n/2 \\ \varepsilon a/2 & 1-\varepsilon ab_1 & \varepsilon a/2 & 0 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_{n-1}/2 \\ 0 & \varepsilon a/2 & 1-\varepsilon ab_1 & \varepsilon a/2 & \dots & 0 & -\varepsilon ab_{n-2}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\varepsilon ab_1 & -\varepsilon a(b_2-1)/2 \\ -\varepsilon ab_n/2 & -\varepsilon ab_{n-1}/2 & -\varepsilon ab_{n-2}/2 & -\varepsilon ab_{n-3}/2 & \dots & -\varepsilon a(b_2-1)/2 & 1-2\varepsilon b_1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де зірочка — операція транспонування матриці. Для цього знайдемо максимальні та мінімальні власні значення симетричних матриць порядку n

$$P_2=\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & b_n/2 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1}/2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & b_2/2 \\ b_n/2 & b_{n-1}/2 & \dots & b_2/2 & b_1 \end{pmatrix},$$

оскільки з урахуванням (15)

$$\frac{1}{2}\left[P_1(t,\varepsilon) + P_1^*(t,\varepsilon)\right] = \left[1 - \varepsilon a(t) b_1(t)\right] E_n - \varepsilon a(t)\left[P_2 + P_3(t)\right], \qquad (16)$$

а функція $a(t)$, взагалі кажучи, можна набирати значень різних знаків.

Характеристичний многочлен для матриці P_2

$$\det\left(P_2 - \lambda E_n\right) = \frac{1}{(-2)^n} T_n(\lambda) = \frac{1}{(-2)^n} \det\begin{pmatrix} 2\lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 2\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Для $T_n(\lambda)$ виконуються рекурентні формули $T_n(\lambda) = 2\lambda T_{n-1}(\lambda) - -T_{n-2}(\lambda)$, а тому [7, с. 768] $T_n(\lambda)$ — многочлен Чебишева першого роду, явний вираз для якого має вид $T_n(\lambda) = \cos(n \arccos \lambda)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. Із останнього співвідношення отримуються власні значення матриці P_2: $\lambda_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}$, $k = \overline{1,n}$, звідки

$$\lambda_{\max}\left(P_2\right) = \cos\frac{\pi}{2n}, \ \lambda_{\min}\left(P_2\right) = -\cos\frac{\pi}{2n}. \qquad (17)$$

Для характеристичного многочлена матриці $P_3(t)$ $\Delta_n(\lambda) = = \det\left[P_3(t) - \lambda E_n\right]$ виконуються рекурентні співвідношення $\Delta_n(\lambda) = = -\lambda\Delta_{n-1}(\lambda) - (-\lambda)^{n-2} b_n^2 / 4$, розглядаючи які як різницеві рівняння, отримаємо

$$\Delta_n(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}\left(\lambda^2 - b_1\lambda - \frac{1}{4}\sum_{i=2}^{n} b_i^2\right),$$

звідки

$$\lambda_{\max}\left(P_3(t)\right) = \left\{b_1(t) + \left[\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right]^{1/2}\right\} / 2, \qquad (18)$$

$$\lambda_{\min}\left(P_3(t)\right)=\left\{b_1(t)-\left[\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right]^{1/2}\right\}/\,2.$$

З урахуванням (16)—(18) отримаємо

$$\left\langle P_1(t,\varepsilon)\xi,\xi\right\rangle=\left\langle\left[1-\varepsilon a(t)b_1(t)\right]E_n\xi,\xi\right\rangle-\varepsilon a(t)\left\langle\left[P_2+P_3(t)\right]\xi,\xi\right\rangle\geq\left[1-\varepsilon p(t)\right]\|\xi\|^2$$

$$\forall\, t\in \mathcal{T}_1,$$

де

$$p(t)=\begin{cases} a(t)\left\{\cos\dfrac{\pi}{2n}+\left[3b_1(t)+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}\,\right]/\,2\right\}, & \text{якщо } a(t)\geq 0,\\ a(t)\left\{-\cos\dfrac{\pi}{2n}+\left[3b_1(t)-\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i^2}\,\right]/\,2\right\}, & \text{якщо } a(t)<0.\end{cases} \tag{19}$$

Нехай

$$p_0=\max_{t\in\tau_1}p(t),\quad \varepsilon_0=(1-\gamma)/\,p_0,\quad \gamma=const\in(0{,}5;1)\,. \tag{20}$$

Тоді для всіх $t\in\mathcal{T}_1,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ виконується нерівність

$$\left\langle P_1(t,\varepsilon)\xi,\xi\right\rangle\geq\gamma\|\xi\|^2\,. \tag{21}$$

Розглянемо систему рівнянь

$$\begin{cases} dt\,/\,d\tau=\varepsilon a(t),\\ du\,/\,d\tau+\left[P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)u_nE_n\right]u=\varepsilon g(t),\end{cases} \tag{22}$$

у припущенні, що $a(t)$, $b_1(t)$,…, $b_n(t)\in C^2$ ($\mathcal{T}_1$).

Згідно з теоремою Ліпшиця і теоремою 2 [8, с. 429] для першого рівняння системи (22) через кожну точку $t\in R$ проходить єдиний розв'язок $t_\tau(t,\varepsilon)$, $t_0(t,\varepsilon)=t$, визначений для всіх $\tau\in R$. За однорідною системою, яка відповідає системі (13), побудуємо оператор $L:H^1$ ($\mathcal{T}_1$) $\to H^0$ ($\mathcal{T}_1$), поклавши

$$Lu=\varepsilon a(t)\frac{du}{dt}+\left[P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)u_nE_n\right]u. \tag{23}$$

Позначимо $C'(\mathcal{T}_1)$ — підпростір $C(\mathcal{T}_1)$, який складається із всіх функцій u , для яких $u(t_\tau(t,\varepsilon))$ має по τ неперервну похідну таку, що

$$du\left(t_\tau(t,\varepsilon)\right)/\,d\tau=\dot u\left(t_\tau(t,\varepsilon)\right) \tag{24}$$

для всіх $\tau\in R,\ \ t\in\ \mathcal{T}_1,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і деякої функції $u(t)\in C$ ($\mathcal{T}_1$).

Визначимо тепер дію оператора $\overline{L}$ на функції $u\in C'(\mathcal{T}_1)$, поклавши

$$\overline{L}u(t) = \dot{u}(t) + \left[P_1(t,\varepsilon) + \varepsilon a(t) u_n(t) E_n \right] u(t). \tag{25}$$

Оскільки згідно з (24) і першим рівнянням системи (22)

$$\frac{du(t_\tau(t,\varepsilon))}{d\tau} = \frac{du(t_\tau(t,\varepsilon))}{dt} \cdot \frac{dut_\tau(t,\varepsilon)}{d\tau} = \varepsilon a(t_\tau(t,\varepsilon)) \frac{du(t_\tau(t,\varepsilon))}{dt}, \tag{26}$$

то оператор, що задається рівністю (25), співпадає з оператором, визначеним співвідношенням (23), кожний раз тоді, коли $u \in C'(\mathcal{T}_1) \cap H^1(\mathcal{T}_1)$.

Наступне твердження встановлює зв'язок між існуванням інваріантних торів [9] системи рівнянь (22) і періодичним розв'язком системи (13).

Лема 1. Нехай система рівнянь (22) для деякого $\overline{\varepsilon}^0 > 0$ має інваріантний тор

$$u = U(t,\varepsilon) \in C^r(\mathcal{T}_1),\ r \ge 0,\ \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}^0]. \tag{27}$$

Тоді $U \in C'(\mathcal{T}_1)$ і $LU(t,\varepsilon) = \varepsilon g(t)$.

Справді, якщо рівність (27) визначає інваріантний тор системи (22), тоді $U \in C'(\mathcal{T}_1)$ і

$$\begin{aligned} \frac{dU(t_\tau(t,\varepsilon),\varepsilon)}{d\tau} = &-\left[P_1(t_\tau(t,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon a(t_\tau(t,\varepsilon)) U_{(n)}(t_\tau(t,\varepsilon),\varepsilon) E_n \right] \times \\ &\times U(t_\tau(t,\varepsilon),\varepsilon) + \varepsilon g(t_\tau(t,\varepsilon)) \end{aligned} \tag{28}$$

для всіх $\tau \in R,\ t \in \mathcal{T}_1,\ \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}^0]$, де $U_{(n)}$ — n-а компонента вектора U. Неперервність і періодичність по t правої частини тотожності (28) гарантують належність простору $C'(\mathcal{T}_1)$, а рівність, що отримується із (28) при $\tau = 0$ з урахуванням (26), веде до тотожності $LU(t,\varepsilon) = \varepsilon g(t)$ для всіх $t \in \mathcal{T}_1,\ \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}^0]$.

Зауваження. Для класичності розв'язку системи (13) слід у включенні (27) вимагати, щоб $r \ge 1$.

Для знаходження інваріантного тора $u = U(t,\varepsilon)$ нелінійної по u системи рівнянь (22) використаємо один із процесів лінеаризації, розглянутий у [9]. Задамо нульову ітерацію процесу функцією $U_o(t,\varepsilon) = 0$, $t \in \mathcal{T}_1$, і визначимо послідовність торів

$$u = U_{i+1}(t,\varepsilon),\ t \in \mathcal{T}_1,\ \varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_0],\ \overline{\varepsilon}_0 \le \varepsilon_0,\ i = 0,1,2,..., \tag{29}$$

кожний із яких є інваріантним тором системи

$$\begin{cases} dt / d\tau = \varepsilon a(t), \\ du / d\tau + \left[P_1(t,\varepsilon) + \varepsilon a(t) U_{i,n}(t,\varepsilon) E_n \right] u = \varepsilon g(t), \end{cases} \tag{30}$$

де $U_{i,n}$ — n-а компонента вектора U_i.

Розглянемо систему рівнянь

$$dt / d\tau = \varepsilon a(t),\ \ du / d\tau + P_1(t,\varepsilon)u = \varepsilon g(t) \tag{31}$$

і з'ясуємо умови існування та властивості інваріантного тора $u \in U_1(t,\varepsilon)$, який визначає перше наближення вказаного ітераційного процесу.

Нехай $t_\tau(t,\varepsilon)$, $t_0(t,\varepsilon) = t$ — розв'язок першого рівняння системи (31), а $\Omega_s^\tau(t,\varepsilon)$ ($\Omega_s^s(t,\varepsilon) = E_n$) — фундаментальна матриця системи рівнянь

$$du / d\tau = -P_1(t_\tau(t,\varepsilon),\varepsilon)u\ . \tag{32}$$

Оскільки коефіцієнти рівняння (3) за припущенням належать $C^2(\mathcal{T}_1)$, то $P_1(t,\varepsilon) \in C^2(\mathcal{T}_1)$, а тому $t_\tau(t,\varepsilon) - t$, $\Omega_s^\tau(t,\varepsilon) \in C^2(\mathcal{T}_1)$ для всіх $\tau, s \in R$. Загальний розв'язок системи рівнянь (32) позначимо

$$u = u(\tau,t,\varepsilon,u_0) = \Omega_0^\tau(t,\varepsilon)u_0\,. \tag{33}$$

Використавши нерівність (21), стандартним чином отримуємо оцінки

$$\left\|u(\tau,t,\varepsilon,u_0)\right\| \le \exp\{-\gamma(\tau - s)\}\left\|u(s,t,\varepsilon,u_0)\right\|,\ \tau \ge s,\ \ t \in \mathcal{T}_1,\ \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\,,$$

$$\left\|\Omega_0^\tau(t,\varepsilon)\right\| \le \sqrt{n}\exp\{-\gamma\tau\},\ \ \tau \ge 0,\ \ t \in \mathcal{T}_1,\ \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\,. \tag{34}$$

Функція

$$G_0(s,t,\varepsilon) = \begin{cases} \Omega_s^0(t,\varepsilon) & \text{при } s \le 0, \\ \quad 0 & \text{при } s > 0 \end{cases} \tag{35}$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ є функцією Гріна [9] задачі про інваріантний тор системи

$$dt / d\tau = \varepsilon a(t),\ \ du / d\tau = -P_1(t,\varepsilon)u\ ,$$

оскільки із рівності [9, с. 121]

$$\Omega_s^\tau(t_\theta(t),\varepsilon) = \Omega_{s+\theta}^{\tau+\theta}(t,\varepsilon) \tag{36}$$

для довільних $\tau, s, \theta \in R$ та оцінки (34) випливає, що $\left\|\Omega_s^0(t,\varepsilon)\right\| = \left\|\Omega_0^{-s}(t_{-s}(t,\varepsilon),\varepsilon)\right\| \le \sqrt{n}\exp\{\gamma s\}$ при $s \le 0$, а для функції (35) виконується нерівність

$$\left\|G_0(s,t,\varepsilon)\right\| \le \sqrt{n}\exp\{\gamma s\}\ ,\ \ s \le 0\ ,\ \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0]\,,\ \ t \in \mathcal{T}_1, \tag{37}$$

яка вказує на рівномірну обмеженість інтеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\|G_0(s,t,\varepsilon)\right\|ds$ по $t \in \mathcal{T}_1$ та $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\| G_0(s,t,\varepsilon) \right\| ds \le \sqrt{n} / \gamma .$$

Зауважимо, що із співвідношень (33), (34) та (36) отримується оцінка

$$\left\| \Omega_s^\tau(t,\varepsilon) \right\| \le \sqrt{n} \exp\left\{ -\gamma(\tau - s) \right\} \tag{38}$$

для всіх $\tau \ge s$, $\tau, s \in R$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$.

Згідно з теоремою 1 [9, с. 124] система рівнянь (31) має інваріантний тор

$$u = U_1(t,\varepsilon) = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} G_0(s,t,\varepsilon) g(t_s(t,\varepsilon)) ds , \ t \in \mathcal{T}_1, \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] , \tag{39}$$

$U_1(t,\varepsilon) \in C'(\mathcal{T}_1)$, якщо $a(t) \in C^2(\mathcal{T}_1)$, $g(t)$, $P_1(t,\varepsilon) \in C(\mathcal{T}_1)$. При цьому

$$\left| U_1(t,\varepsilon) \right|_0 \le \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\gamma} \left| g(t) \right|_0 , \ \varepsilon \in (0,\varepsilon_0] . \tag{40}$$

З'ясуємо гладкість інваріантного тора (39) і оцінимо мінімальне значення додатної сталої K , незалежної від t та ε і для якої виконується нерівність

$$\left| U_1(t,\varepsilon) \right|_1 \le \varepsilon K \left| g(t) \right|_1 \tag{41}$$

для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ і деякого $\varepsilon_1 > 0$.

Стандартним чином [9] з використанням (14) і (38) отримуються нерівності

$$\begin{gathered} \left| dt_\tau(t,\varepsilon) / dt \right| \le \exp\left\{ \varepsilon\alpha\tau \right\}, \ \tau \le 0, \\ \left\| dG_0(s,t,\varepsilon) / dt \right\| \le \frac{n}{|\alpha|} M_1 \exp\left\{ (\gamma + \varepsilon\alpha) s \right\}, \ s \le 0, \end{gathered} \tag{42}$$

де $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$,

$$\alpha = \min_{t\in\tau_1} \frac{da(t)}{dt}, \ M_1 = \left\{ \left| n\left[(ab)^{(1)} \right]^2 + (n-1)(a^{(1)})^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[(ab_i)^{(1)} \right]^2 \right|_0 \right\}^{1/2} , \tag{43}$$

які приводять до оцінки

$$\begin{gathered} \left| G_0(s,t,\varepsilon) g(t_s(t,\varepsilon)) \right|_1 \le M_2 \left| g(t) \right|_1 \exp\left\{ (\gamma + \varepsilon\alpha) s \right\} , \\ t \in \mathcal{T}_1, \ s \le 0 , \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0] , \end{gathered} \tag{44}$$

де

$$M_2 = {}^{nM_1}\!\big/_{|\,\alpha\,| + \sqrt{n}} . \tag{45}$$

Покладемо

$$\gamma = 0,5 + \varepsilon\,|\,\alpha\,|\,,\ \varepsilon_1 = 1/2(p_0 + |\,\alpha\,|)\,. \tag{46}$$

Тоді з урахуванням інтегрального представлення (39) та оцінки (44) функція $U_1(t,\varepsilon)$ для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ задовольняє нерівність (41) із $K = 2M_2$ і є неперервною по ε рівномірно відносно t.

Реалізація ітераційного процесу вимагає вивчення умов, при яких система рівнянь

$$dt\,/\,d\tau = \varepsilon a(t),\ \ dh\,/\,d\tau + \left[P_1(t,\varepsilon) + \varepsilon a(t)\,p_1(t,\varepsilon)E_n\right]h = \varepsilon g(t) \tag{47}$$

має інваріантний тор $h = u(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ для всіх скалярних функцій $p_1(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$, де $\varepsilon_2 = const > 0$, $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$.

Лема 2. Нехай a(t), $b_1(t), b_2(t), ..., b_n(t) \in C^2(\mathcal{T}_1)$, $p_1(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ — довільна скалярна функція така, що

$$\left|p_1(t,\varepsilon)\right|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}\left|g(t)\right|_0,\ \left|p_1(t,\varepsilon)\right|_1 \le 4\varepsilon M_2\left|g(t)\right|_1,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon_1]\,, \tag{48}$$

де стала M_2 визначена рівністю (45).

Тоді можна вказати додатне число $\varepsilon_2 \le \varepsilon_1$ таке, що система рівнянь (47) має інваріантний тор $h = u(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$, для якого виконуються нерівності

$$\left|u(t,\varepsilon)\right|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}\left|g(t)\right|_0,\ \left|u(t,\varepsilon)\right|_1 \le 4\varepsilon M_2\left|g(t)\right|_1 \tag{49}$$

для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_2]$.

Доведення. Розглянемо інтегральне рівняння

$$u = \varepsilon G a(t)\,p_1(t,\varepsilon)u + \varepsilon G g(t)\,, \tag{50}$$

де G — оператор, заданий на функціях $\varphi(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ рівністю

$$G\varphi(t,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} G_0(s,t,\varepsilon)\varphi(t_s(t,\varepsilon),\varepsilon)ds\,,$$

G_0 — функція Гріна (35), $t_s(t,\varepsilon)$, $t_0 = t$, — розв'язок першого рівняння системи (47). Очевидно, що інваріантний тор системи рівнянь (47) є періодичним розв'язком інтегрального рівняння (50) і навпаки: періодичний розв'язок рівняння (50) є інваріантним тором системи (47).

Оцінимо норму оператора Gap_1 у просторах $C(\mathcal{T}_1)$ та $C^1(\mathcal{T}_1)$. Використовуючи співвідношення (37), (42), (45), (46), (48) для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ отримаємо

$$\left|Ga(t)\,p_1(t,\varepsilon)\right|_0 \le 8n\varepsilon\,|\,a\,|_0|\,g\,|_0\,,\ \left|Ga(t)\,p_1(t,\varepsilon)\right|_1 \le 16\varepsilon M_2^2\,|\,a\,|_1|\,g\,|_1\,.$$

Покладемо

$$\varepsilon_2 = \min\left\{\varepsilon_1; \frac{1}{8M_2}\left(\frac{2}{|a|_1 |g|_1}\right)^{1/2}\right\}. \qquad (51)$$

Тоді для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ $\varepsilon \left|Ga(t)p_1(t,\varepsilon)\right|_1 \le 1/2$ і рівняння (50) має в $C^1(\mathcal{T}_1)$ єдиний розв'язок

$$u(t,\varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \left[\varepsilon Ga(t)p_1(t,\varepsilon)\right]^K Gg(t),$$

який з урахуванням (44) задовольняє для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ нерівності (49) і є неперервним по ε рівномірно відносно t.

Покладемо у системі рівнянь (47) $p_1(t,\varepsilon) = U_{1,n}(t,\varepsilon)$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$. Нерівності (40) і (41) із $K = 2M_2$ вказують на виконання нерівностей (48), а тому згідно з лемою 2 для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ інваріантний тор $h = U_2(t,\varepsilon)$, $t \in \mathcal{T}_1$, системи (47) існує і задовольняє нерівності

$$\left|U_2(t,\varepsilon)\right|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}\left|g(t)\right|_0, \ \left|U_2(t,\varepsilon)\right|_1 \le 4\varepsilon M_2 \left|g(t)\right|_1, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_2].$$

Цього достатньо, щоб по другій ітерації знайти третю, поклавши у системі (47) $p_1(t,\varepsilon) = U_{2,n}(t,\varepsilon)$.

Припустимо, що для обраного $\varepsilon_2 > 0$ вже знайдені ітерації для $i = 1, 2, \ldots, k-1$ і що всі вони задовольняють нерівності виду (49). Наступне, k-е наближення визначається тоді із системи рівнянь (47), де $p_1(t,\varepsilon) = U_{k-1,n}(t,\varepsilon)$, як її інваріантний тор

$$h = U_k(t,\varepsilon), \ t \in \mathcal{T}_1, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_2]. \qquad (52)$$

Але оскільки для $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ $U_{k-1}(t,\varepsilon)$ задовольняє нерівності виду (49), то і стосовно $U_{k-1,n}(t,\varepsilon)$ виконуються нерівності виду (48), а тому згідно з лемою 2 тор (52) існує, причому

$$\left|U_k(t,\varepsilon)\right|_0 \le 4\varepsilon\sqrt{n}\left|g(t)\right|_0, \ \left|U_k(t,\varepsilon)\right|_1 \le 4\varepsilon M_2 \left|g(t)\right|_1, \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_2]. \qquad (53)$$

Метод повної математичної індукції гарантує, що для всіх $\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ довільна із ітерацій процесу визначена і задовольняє нерівності виду (53).

Доведемо збіжність ітераційного процесу. Для цього розглянемо різницю

$$w_{k+1}(t,\varepsilon) = U_{k+1}(t,\varepsilon) - U_k(t,\varepsilon), \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_2].$$

Оскільки функції $U_k(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то інваріантний тор відповідної системи рівнянь, який нею визначається, є гладким. Тому

$$\varepsilon a(t)\frac{dU_{k+1}(t,\varepsilon)}{dt}=-\left[P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)U_{k,n}(t,\varepsilon)E_n\right]U_{k+1}(t,\varepsilon)+\varepsilon g(t)$$

для всіх $t\in\mathcal{T}_1,\ k=0,1,2,\ldots,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$. Тоді вектор-функція $w_{k+1}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\varepsilon a(t)\frac{dw_{k+1}(t,\varepsilon)}{dt}=-\left[P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)U_{k,n}(t,\varepsilon)E_n\right]w_{k+1}-\varepsilon a(t)w_{k,n}U_k\,. \quad (54)$$

Інваріантний тор $h=w_{k+1}(t,\varepsilon)$, $t\in\mathcal{T}_1,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$, системи рівнянь

$$\frac{dt}{d\tau}=\varepsilon a(t),\ \frac{dh}{d\tau}=-\left[P_1(t,\varepsilon)+\varepsilon a(t)U_{k,n}(t,\varepsilon)E_n\right]h+\varepsilon g_k(t,\varepsilon)\,, \quad (55)$$

де

$$g_k(t,\varepsilon)=-a(t)w_{k,n}(t,\varepsilon)U_k(t,\varepsilon)\,, \quad (56)$$

згідно з лемою 1 є періодичним розв'язком рівняння (54), якщо $h\in C^1(\mathcal{T}_1)$. З урахуванням нерівностей (53) система рівнянь (55) задовольняє умовам леми 2, у відповідності з якою для $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$

$$\left|w_{k+1}(t,\varepsilon)\right|_0\le 4\varepsilon\sqrt{n}\left|g_k(t,\varepsilon)\right|_0,\ \left|w_{k+1}(t,\varepsilon)\right|_1\le 4\varepsilon M_2\left|g_k(t,\varepsilon)\right|_1.$$

Використавши (53) та (56), отримаємо

$$\left|w_{k+1}(t,\varepsilon)\right|_0\le 16\varepsilon^2 n\,|a|_0\,|g|_0\,|w_k|_0\,,$$

$$\left|w_{k+1}\right|_1\le 48\varepsilon^2 M_2^2\,|a|_1|g|_1\left|w_k\right|_1,\quad \varepsilon\in(0,\varepsilon_2]\,.$$

Покладемо, враховуючи (51),

$$\varepsilon_3=\min\left\{\varepsilon_1;\frac{1}{24M_2}\left(\frac{6}{|a|_1|g|_1}\right)^{1/2}\right\}. \quad (57)$$

Тоді для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$

$$\left|w_{k+1}(t,\varepsilon)\right|_l\le\frac{1}{2}|w_k(t,\varepsilon)|_l$$

і

$$\left|w_{k+1}(t,\varepsilon)\right|_l\le\left(\frac{1}{2}\right)^k|w_1(t,\varepsilon)|_l,\quad k=0,1,2,\ldots,\quad l=0,1\,,$$

що забезпечує збіжність послідовності $U_k(t,\varepsilon)$, $k=0,1,2,\ldots$, в $C^1(\mathcal{T}_1)$. А тому з урахуванням повноти простору $C^1(\mathcal{T}_1)$ [10, с. 52] існує функція $U(t,\varepsilon)$, яка належить $C^1(\mathcal{T}_1)$ для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$ і така, що $\lim\limits_{k\to\infty}U(t,\varepsilon)=U(t,\varepsilon)$ рівномірно по $t\in\mathcal{T}_1,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_3]$. Здійснивши граничний перехід у нерівностях (53), отримаємо

$$\left|U(t,\varepsilon)\right|_0\le 4\varepsilon\sqrt{n}\left|g(t)\right|_0,\ \left|U(t,\varepsilon)\right|_1\le 4\varepsilon M_2\left|g(t)\right|_1,\ t\in\mathcal{T}_1,\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_3]\,, \quad (58)$$

звідки випливає неперервність по ε в точці $\varepsilon = 0$ функції $U(t,\varepsilon)$ та її похідної по t рівномірно відносно $t \in \mathcal{T}_1$.

Отже, система рівнянь (22) має інваріантний тор $u = U(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$, $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$, для якого виконуються нерівності (58). Тому згідно з лемою 1 система рівнянь (13) має періодичний розв'язок $u = U(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$, а з урахуванням (12) система рівнянь (10) має розв'язок

$$z(t,\varepsilon) = U(t,\varepsilon) + b(t) \tag{59}$$

Знайдемо $\varepsilon_4 \in (0,\varepsilon_3]$ таке, що для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_4]$ виконуються всі нерівності (8). Використавши (58) і (59), отримаємо

$$\varepsilon_4 = \min\left\{\varepsilon_3; \frac{-|b|_0 + \left[|b|_o^2 + 8\sqrt{n}\,|g|_0\right]^{1/2}}{8\sqrt{n}\,|g|_0}\right\}. \tag{60}$$

Таким чином, матриці $V(t,\varepsilon)$, $W(t,\varepsilon)$, визначені (6), належать $C^1(\mathcal{T}_1)$, якщо $\varepsilon \in (0,\varepsilon_3]$ і не вироджені для всіх $t \in \mathcal{T}_1$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_4]$. Тому система рівнянь (5) зводиться до рівносильної системи (9).

4. Розглянемо останнє рівняння системи (9):

$$\varepsilon a(t) y_{n+1} = -\left\{1 + \varepsilon a(t)\left[U_n(t,\varepsilon) - b_1(t)\right]\right\} y_{n+1} + f(t), \tag{61}$$

де U_n — остання компонента вектор-функції $U(t,\varepsilon)$.

Згідно з лемою 1 якщо система рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = \varepsilon a(t), \\ \dfrac{dy_{n+1}}{d\tau} = -\left\{1 + \varepsilon a(t)\left[U_n(t,\varepsilon) - b_1(t)\right]\right\} y_{n+1} + f(t), \end{cases} \tag{62}$$

для деякого $\varepsilon_5 \in (0,\varepsilon_4]$ має інваріантний тор $y_{n+1} = v(t,\varepsilon) \in C^1(\mathcal{T}_1)$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_5]$, тоді рівняння (61) має гладкий періодичний розв'язок.

Покладемо

$$\varepsilon_5 = \min\left\{\varepsilon_4; \frac{-\left(|ab_1|_0 + |\alpha|\right) + \left[\left(|ab_1|_0 + |\alpha|\right)^2 + 8|a|_0\sqrt{n}\,|g|_0\right]^{1/2}}{8|a|_0\sqrt{n}\,|g|_0}\right\}, \tag{63}$$

де число α визначене в (43). Тоді з урахуванням першої нерівності (58) для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_5]$, $t \in \mathcal{T}_1$

$$1-\varepsilon\left\{|\,a(t)\,|_0\left[\left|U_n(t,\varepsilon)\right|_0-\left|b_1(t)\right|_0\right]+|\alpha|\right\}\geq\frac{1}{2},$$

а розв'язок рівняння (61) має вид

$$y_{n+1}^0(t,\varepsilon)=\int_{-\infty}^{\infty}\bar{G}_0(s,t,\varepsilon)f(t_s(t,\varepsilon))ds,\ 0<\varepsilon\leq\varepsilon_5,$$

де

$$\bar{G}_0(s,t,\varepsilon)=\begin{cases}\exp\left\{-\int_s^0\left\{1+\varepsilon a(t_\tau(t,\varepsilon))\left[U_n(t_\tau(t,\varepsilon),\varepsilon)-b_1(t_\tau(t,\varepsilon))\right]\right\}d\tau\right\}, & s\leq 0,\\ 0, & s>0,\end{cases}$$

$t_\tau(t,\varepsilon)$, $t_0(t,\varepsilon)=t$, — розв'язок першого рівняння системи (62). При цьому $y_{n+1}^0(t,\varepsilon)\in C^1(\mathcal{T}_1)$ для всіх $\varepsilon\in(0,\varepsilon_5]$, $y_{n+1}^0(t,0)=f(t)$, $\left|y_{n+1}^0(t,\varepsilon)\right|_0\leq 2\left|f(t)\right|_0$, а тому

$$y_{n+1}^0(t,\varepsilon)=f(t)+\bar{y}^0(t,\varepsilon),\ \bar{y}^0(t,0)=0. \qquad (64)$$

В результаті система рівнянь (9) зводиться до такого виду

$$Y_1^{(1)}=\left[B(t)+B_1(t,\varepsilon)\right]Y_1+f_1(t,\varepsilon),\ \varepsilon\in(0,\varepsilon_5], \qquad (65)$$

де

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1\\ -b_n & -b_{n-1} & -b_{n-2} & \dots & -b_1\end{pmatrix},\ B_1=\begin{pmatrix}0 & 0 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 0\\ U_1 & U_2 & \dots & U_n\end{pmatrix}, \qquad (66)$$

$$f_1(t,\varepsilon)=col\left(0,\dots,0,y_{n+1}^0(t,\varepsilon)\right),\ Y_1=col\left(y_1,y_2,\dots,y_n\right).$$

Нехай $G^0(t,s)$ — функція Гріна [11] оператора $L^0z=\frac{d}{dt}z-B(t)z$ така, що

$$\left\|G^0(t,s)\right\|\leq M_0\exp\left\{-\gamma_0\,|\,t-s\,|\right\},\ -\infty<t,s<\infty, \qquad (67)$$

де M_0 і γ_0 додатні сталі. Тоді рівняння (65) рівносильне інтегральному рівнянню

$$Y_1^{(1)}=TB_1(t,\varepsilon)Y_1+Tf_1(t,\varepsilon), \qquad (68)$$

де T — оператор, заданий на функціях $\psi(t,\varepsilon)\in C^0(\mathcal{T}_1)$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_5]$, рівністю $T\psi(t,s)=\int_{-\infty}^{\infty}G^0(t,s)\psi(s,\varepsilon)ds$. Якщо рівняння (68) має розв'язок, тоді він є обмеженим на R а також періодичним [11, с. 46] розв'язком системи (65).

Оцінюючи норму оператора $TB_1(t,\varepsilon)$ в просторі $C^0(\mathcal{T}_1)$, використаємо співвідношення (66), (58) та (67). В результаті для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_5]$ отримаємо

$$\left|TB_1(t,\varepsilon)\right|_0 \le 8\varepsilon\sqrt{n}M_0\,|\,g(t)\,|_0\,/\gamma_0\,.$$

Покладемо

$$\varepsilon^0 = \min\left\{\varepsilon_5; \frac{\gamma_0}{16\sqrt{n}M_0\,|\,g(t)\,|_0}\right\}. \tag{69}$$

Тоді для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ $\left|TB_1(t,\varepsilon)\right|_0 \le 1/2$ і рівняння (68) має єдиний розв'язок

$$Y_1^0(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[TB_1(t,\varepsilon)\right]^k Tf_1(t,\varepsilon)\,,$$

для якого виконується оцінка

$$\left|Y_1^0(t,\varepsilon)\right|_0 \le 4M_0\left|f(t)\right|_0/\gamma_0\,,\ \varepsilon \in (0,\varepsilon^0]\,. \tag{70}$$

Рівняння (4) рівносильне системі рівнянь

$$Y_0^{(1)} = B(t)Y_0 + f_0(t)\,, \tag{71}$$

де

$$Y_0(t) = col\left(y, y^{(1)},\ldots,y^{(n-1)}\right),\ f_0(t) = col\left(0,\ldots,0,f(t)\right). \tag{72}$$

При цьому єдиний періодичний розв'язок її має вид

$$Y_0(t) = Tf_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G^0(t,s)f_0(s)ds\,,$$

а періодичний розв'язок рівняння (4) визначається рівністю

$$y_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G_1^0(t,s)f_0(s)ds\,, \tag{73}$$

де $G_1^0(t,s)$ — перший рядок матричної функції Гріна $G^0(t,s)$.

Із співвідношень (70), (66), (64), (71) і (73) отримується рівність

$$Y_1^0(t,\varepsilon) = Tf_0 + \overline{Y}_1^0(t,\varepsilon) = Y_0(t) + \overline{Y}_1^0(t,\varepsilon)\,, \tag{74}$$

де вектор-функція $\overline{Y}_1^0(t,\varepsilon)$ неперервна по ε і $\overline{Y}_1^0(t,0) = 0$. Отже, для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ система рівнянь (5) має періодичний розв'язок

$$X_0(t,\varepsilon) = W(t,\varepsilon)\begin{pmatrix} Y_1^0(t,\varepsilon) \\ y_{n+1}^0(t,\varepsilon)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_1^0(t,\varepsilon) \\ W_{n+1}(t,\varepsilon)\begin{pmatrix} Y_1^0(t,\varepsilon) \\ y_{n+1}^0(t,\varepsilon)\end{pmatrix}\end{pmatrix},$$

де W_{n+1} — ($n+1$)-й рядок матриці $W(t,\varepsilon)$. А тому періодичним розв’язком вихідного рівняння (3) є перша компонента вектора $Y_1^0(t,\varepsilon)$, яка з урахуванням рівностей (73), (74) має такий вид:

$$x_0(t,\varepsilon) = y_0(t) + \overline{Y}_{11}^0(t,\varepsilon),$$

де $\overline{Y}_{11}^0(t,\varepsilon)$ — перша компонента вектора $\overline{Y}_1(t,\varepsilon)$, яка прямує до нуля при $\varepsilon \to 0$.

У підсумку отримуємо наступне твердження.

Теорема. Нехай стосовно рівнянь (3) та (4) виконуються умови:

1) $a(t),\ b_1(t), b_2(t), \ldots, b_n(t) \in C^2(\mathcal{T}_1), f(t) \in \mathrm{C}(\mathcal{T}_1)$;

2) існує функція Гріна $G^0(t,s)$ диференціального оператора, породженого однорідною системою рівнянь, рівносильною рівнянню (4), така що виконується нерівність (67).

Тоді існує додатне число $\varepsilon^0 > 0$, визначене співвідношеннями (51), (57), (60), (63), (69), таке що для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon^0]$ та будь-якої неоднорідності $f(t)$ рівняння (3) має періодичний розв'язок $x_0(t,\varepsilon)$, неперервний по ε рівномірно відносно t і такий, що $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_0(t,\varepsilon) = y_0(t)$, де $y_0(t)$ — періодичний розв’язок рівняння (4).

Висновки. У статті зроблено крок у напрямку дослідження глобальних властивостей лінійних звичайних диференціальних рівнянь довільного порядку, не розв’язаних відносно похідної старшого порядку (рівняння (3) із фіксованим параметром).

Встановлено, що сингулярно-функціональне збурення диференціального рівняння вищих порядків при достатньо малих значеннях параметра приводить до регулярного збурення гладкого періодичного розв’язку незбуреного рівняння для довільної періодичної неоднорідності.

Список використаних джерел:

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Э. Камке. — М. : Наука, 1966. — 703 с.
2. Вазов В. Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. — М. : Мир, 1968. — 464 с.
3. Самойленко А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К. : Вища шк., 2000. — 294 с.
4. Мозер Ю. Быстро сходящийся метод итераций и нелинейные дифференциальные уравнения / Ю. Мозер // УМН. — 1968. — Т.23, №4. — С. 179–238.
5. Еременко В. А. Периодические решения линейных вырожденных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка / В. А. Еременко //

Диференціальні рівняння, теорія функцій та їх застосування : міжнар. наук. конф., 16-21 черв. 2008 р. : тези доп. — Мелітополь, 2008. — С. 48–49.
6. Єрьоменко В. Періодичні розвязки сингулярно збурених лінійних звичайних диференціальних рівнянь третього порядку / В. Єрьоменко, А. Алілуйко // Вісник Тернопільського державного технічного університету. — 2009. — № 4. — С. 181–187.
7. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1973. — 832 с.
8. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / [Н. П. Еругин, И. З. Штокало и др.]. — К. : Вища шк., 1974. — 472 с.
9. Самойленко А. М. Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы / А. М. Самойленко. — М. : Наука, 1987. — 304 с.
10. Треногин В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 496 с.
11. Красносельский М. А. Нелинейные почти периодические колебания / М. А. Красносельский, В. Ш. Бурд, Ю. С. Колесов. — М. : Наука, 1970. — 352 с.

We establish sufficient conditions for the existence of periodic solutions of function-singular perturbations of linear higher-order differential equations for arbitrary periodic inhomogeneity.

Key words: *periodic solution, function-singular perturbations of linear ordinary higher-order differential equations.*

Отримано: 20.03.2012

УДК 517.965

О. І. Іолтухівська, аспірант

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПРО НЕРІВНІСТІ ТИПУ ВЕНДРОФА ДЛЯ РОЗРИВНИХ ФУНКЦІЙ

Розглянуто інтегро-сумарні нерівності Вендрофа. Отримано нову оцінку для функції, що задовольняє нерівності типу Вендрофа для функцій двох незалежних змінних.

Ключові слова: *інтегро-сумарна нерівність, неперервна функція, невід'ємна функція, нерівність Вендрофа.*

Вступ. Поняття інтегро-сумарної нерівності було введене в роботі Самойленка А. М. та Борисенка С. Д. [1] в 1985 р., для нерівностей типу

$$u(t) < \varphi(t) + \int_{t_0}^{t} K\left(t, s, u(s)\right) ds + \sum_{t_0 < t_k < t} \psi(t, t_k) \mu_k \left(u(t_k - 0)\right), \qquad (1)$$