2. Гнатюк Ю. В. Модифікація методу січних площин на випадок апроксимації компактнозначного відображення / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2005. — Вип. 3. — С. 245–251.
3. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация/ П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
4. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
5. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы)/ Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 774 с.

We generalized the method of cutting planes for the problem of the best at sense of the convex lipschitz function uniform approximation of continuous compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps.

Key words: *the compact-valued maps, the best in sense of the convex lipschitz function uniform approximation, the method of cutting planes.*

Отримано: 06.03.2012

УДК 517.5

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

КРИТЕРІЇ СИЛЬНОЇ ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ ОПУКЛОЇ ФУНКЦІЇ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНАМИ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

У статті встановлено критерії сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації компактнозначного відображення Γ-множинами однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні опуклої неперервної функції рівномірна апроксимація, сильна єдиність екстремального елемента, критерії.*

Вступ. У статті для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення Γ-множинами неперервних однозначних відображень встановлено деякі критерії сильної єдиності екстремального елемента, які узагальнюють на випадок вищеназваної задачі критерій сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні норми рівномірної апроксимації неперервної функції опуклими множинами інших неперервних функцій (див., наприклад, [1]).

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем комплексних (дійсних) чисел нормований простір, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\| = \max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X, $C(S,K(X))$ — множина багатозначних відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=K_s\in K(X)$ і які неперервні на S відносно метрики Хаусдорфа на $K(X)$, $V\subset C(S,X)$, p — задана на X опукла неперервна функція.

Задачею найкращої у розумінні функції p рівномірної апроксимації відображення $a\in C(S,K(X))$ множиною $V\subset C(S,X)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_a^*(V) = \inf_{g\in V}\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p(y-g(s)). \qquad (1)$$

Означення 1 (див. [2]). Елемент $g^*\in V$ такий, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^*(s)\right) = \alpha_a^*(V),$$

називається екстремальним елементом для величини (1).

Означення 2. Елемент $g^*\in V$ називається сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), якщо існує додатне число c таке, що

$$\max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p(y-g(s)) - \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y-g^*(s)\right) \ge c\left\|g-g^*\right\|, g\in V\,. \qquad (2)$$

Актуальність теми. Виникають задачі наближення, в яких міра відхилення між елементами лінійного нормованого простору оцінюється не з допомогою норми, а з допомогою деякої опуклої неперервної функції. Клас таких задач включає задачі наближення по нормі, переднормі, функціоналу Мінковського, сублінійному функціоналу, функціоналу повільного зростання та низку інших задач (див., наприклад, [3—5]). Вищеназвані задачі є частковими випадками задачі відшукання величини (1).

Результати загального характеру щодо сильної єдиності екстремального елемента, отримані при дослідженні задачі відшукання величини (1), становлять самостійний інтерес, а також слугуватимуть відправним пунктом для отримання відповідних результатів для конкретних задач, що включаються у схему її постановки, зіграють важливу роль при обґрунтуванні збіжності чисельних методів розв’язування цих задач.

Мета роботи. Встановити критерії сильної єдиності екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення Γ-множинами неперервних однозначних відображень.

Деякі означення та допоміжні твердження. Функцію

$$\Phi_a\left(g\right) = \max_{s\in S}\max_{y\in a(s)} p\left(y - g(s)\right),\ g \in C\left(S, X\right),$$

назвемо цільовою функцією задачі відшукання величини (1).

Твердження 1. Для кожного $a \in C\left(S, K\left(X\right)\right)$ цільова функція $\Phi_a\left(g\right)$, $g \in C\left(S, X\right)$, задачі відшукання величини (1) є опуклою та неперервною функцією на $C\left(S, X\right)$.

Через $\Phi_a^{/}\left(g^*, z\right)$ будемо позначати похідну функції Φ_a у точці $g^* \in C\left(S, X\right)$ за напрямком $z \in C\left(S, X\right)$.

Нехай X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, тобто простір X, розглядуваний лише над полем дійсних чисел, X_R^* — простір, спряжений з простором X_R.

Елемент $\varphi \in X_R^*$ називається субградієнтом функції p в точці $x_0 \in X$, якщо

$$p\left(x\right) - p\left(x_0\right) \geq \varphi\left(x - x_0\right), x \in X$$

(див., наприклад, [6, с. 58]).

Множину субградієнтів функції p в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial p\left(x_0\right)$ (див., наприклад, [6, с. 58]).

Оскільки p є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial p\left(x_0\right)$ є непорожньою опуклою слабко* компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [5, с. 327]).

Для $x_0 \in X$ будемо позначати через

$$\partial_{\mathbb{C}}\, p\left(x_0\right) = \left\{f : f \in X^*,\ \operatorname{Re} f \in \partial p\left(x_0\right)\right\}.$$

Зрозуміло (див., наприклад, [7, с. 269]), що

$$\partial_{\mathbb{C}}\, p\left(x_0\right) = \left\{f : f\left(x\right) = \varphi\left(x\right) - i\varphi\left(ix\right),\ x \in X, \varphi \in \partial p\left(x_0\right)\right\}.$$

Легко переконатися, що у випадку, коли $p\left(x\right) = \left\|x\right\|$, $x \in X$, для $x_0 \in X$ має місце рівність

$$\partial_{\mathbb{C}} p\left(x_0\right)=\partial_{\mathbb{C}}\left\|x_0\right\|=\left\{f: f \in X^*, f\left(x_0\right)=\left\|x_0\right\|\right\}.$$

Для $g^* \in C(S, X)$ покладемо

$$S_a\left(g^*\right)=\left\{s: s \in S, \max_{y \in a(s)} p\left(y-g^*(s)\right)=\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p\left(y-g^*(s)\right)=\Phi_a\left(g^*\right)\right\},$$

а для $s \in S_a\left(g^*\right)$ покладемо

$$a\left(s, g^*\right)=\left\{y: y \in a(s), p\left(y-g^*(s)\right)=\max_{y \in a(s)} p\left(y-g^*(s)\right)=\Phi_a\left(g^*\right)\right\}.$$

Твердження 2. Якщо $g^*, z \in C(S, X)$ і $\Phi_a^{/}\left(g^*, z\right) \geq 0$, то справедлива рівність

$$\Phi_a^{/}\left(g^*, z\right)=\max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max_{y \in a\left(s, g^*\right)} \max_{f \in \partial_{\mathbb{C}} p\left(y-g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f(-z(s)).$$

Основні результати.

Теорема 1. Сильно єдиний екстремальний елемент для величини (1) є єдиним екстремальним елементом для цієї величини.

Означення 3 [8]. Множину M лінійного над полем дійсних чисел простору Y будемо називати Γ-множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо для кожного $\varepsilon>0$ і кожного $y \in M$ існує $t \in(0, \varepsilon)$ таке, що $y_0+t\left(y-y_0\right) \in M$.

Легко переконатися, що до Γ-множин відносно точки відносяться, зокрема, зіркові відносно цієї точки, в тому числі і опуклі множини.

Має місце наступний критерій сильної єдиності екстремального елемента для величини (1).

Теорема 2. Нехай $g^* \in V$ і V є Γ-множиною відносно g^* (зірковою відносно $g^* \in V$, опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб виконувалась така умова

$$\inf_{g \in V \backslash\left\{g^*\right\}} \Phi_a^{/}\left(g^*, \frac{g-g^*}{\left\|g-g^*\right\|}\right)>0. \tag{3}$$

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1). Переконаємося, що має місце співвідношення (3). Оскільки g^* є сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), то справедлива нерівність (2). Нехай

$g \in V \setminus \left\{ g^* \right\}$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$. З урахуванням того, що V є Γ-множиною відносно g^*, існує $t_k \in \left(0, \varepsilon_k\right)$ таке, що $g^* + t_k\left(g - g^*\right) \in V$.

З урахуванням (2) тоді

$$\Phi_a\left(g^* + t_k\left(g - g^*\right)\right) - \Phi_a\left(g^*\right) \ge c\left\| g^* + t_k\left(g - g^*\right) - g^* \right\| = ct_k \left\| g - g^* \right\|.$$

Звідки

$$c \le \frac{1}{\left\| g - g^* \right\|} \lim_{k \to \infty} \frac{\Phi_a\left(g^* + t_k\left(g - g^*\right)\right) - \Phi_a\left(g^*\right)}{t_k} =$$

$$= \frac{1}{\left\| g - g^* \right\|} \Phi_a^{/}\left(g^*, g - g^*\right) = \Phi_a^{/}\left(g^*, \frac{g - g^*}{\left\| g - g^* \right\|}\right).$$

Тому

$$\inf_{g \in V \setminus \left\{ g^* \right\}} \Phi_a^{/}\left(g^*, \frac{g - g^*}{\left\| g - g^* \right\|}\right) \ge c > 0.$$

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай має місце співвідношення (3). Позначимо ліву частину цього співвідношення через c. Тоді $c > 0$ і для всіх $g \in V$, $g \ne g^*$, виконується нерівність

$$\Phi_a^{/}\left(g^*, g - g^*\right) \ge c\left\| g - g^* \right\|. \tag{4}$$

З другого боку для всіх $g \in V \setminus \left\{ g^* \right\}$

$$\begin{aligned} \Phi_a^{/}\left(g^*, g - g^*\right) &= \inf_{t > 0} \frac{\Phi_a\left(g^* + t\left(g - g^*\right)\right) - \Phi_a\left(g^*\right)}{t} \le \\ &\le \frac{\Phi_a\left(g^* + 1\left(g - g^*\right)\right) - \Phi_a\left(g^*\right)}{1} = \Phi_a\left(g\right) - \Phi_a\left(g^*\right) \end{aligned} \tag{5}$$

(див., наприклад, [5, с. 328]).

З (4), (5) випливає, що

$$\Phi_a\left(g\right) - \Phi_a\left(g^*\right) \ge c\left\| g - g^* \right\|, \; g \in V.$$

Згідно з означенням 2 елемент g^* є сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведена.

Теорема 3. Нехай V є Γ-множиною відносно $g^* \in V$ (зірковою відносно $g^* \in V$ або опуклою множиною). Для того щоб елемент g^*

був екстремальним для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного $g \in V$ існували елементи $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \le 0 .$$

Теорема 4. Нехай $g^* \in V$ і V є Γ-множиною відносно g^* (зірковою відносно $g^* \in V$, опуклою множиною). Для того щоб елемент g^* був сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\inf_{g \in V \setminus \left\{g^*\right\}} \frac{\max\limits_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max\limits_{y \in a\left(s, g^*\right)} \max\limits_{f \in \partial_{\mathbb{C}} p\left(y - g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(g^*(s) - g(s)\right)}{\left\|g - g^*\right\|} > 0. \qquad (6)$$

Доведення. *Необхідність.* Нехай $g^* \in V$ є сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1). Згідно з теоремою 2

$$\inf_{g \in V \setminus \left\{g^*\right\}} \frac{\Phi_a^{/}\left(g^*, g - g^*\right)}{\left\|g - g^*\right\|} > 0. \qquad (7)$$

Звідси випливає, що $\Phi_a^{/}\left(g^*, g - g^*\right) > 0$, $g \in V \setminus \left\{g^*\right\}$.

Згідно з твердженням 2 тоді для всіх $g \in V \setminus \left\{g^*\right\}$

$$\Phi_a^{/}\left(g^*, g - g^*\right) = \max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max_{y \in a\left(s, g^*\right)} \max_{f \in \partial_{\mathbb{C}} p\left(y - g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(g^*(s) - g(s)\right). \qquad (8)$$

З (7), (8) випливає (6).

Достатність. Нехай для $g^* \in V$ має місце співвідношення (6). Тоді для кожного $g \in V \setminus \left\{g^*\right\}$

$$\max_{s \in S_a\left(g^*\right)} \max_{y \in a\left(s, g^*\right)} \max_{f \in \partial_{\mathbb{C}} p\left(y - g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(g^*(s) - g(s)\right) > 0 .$$

Тому для кожного $g \in V \setminus \left\{g^*\right\}$ існують $s_g \in S_a\left(g^*\right)$, $y_g \in a\left(s_g, g^*\right)$, $f_g \in \partial_{\mathbb{C}} p\left(y_g - g^*\left(s_g\right)\right)$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) < 0 .$$

Згідно з теоремою 3 g^* є екстремальним елементом для величини (1). Звідси випливає, що $\Phi_a(g) \ge \Phi_a\left(g^*\right)$, $g \in V$.

Нехай $g \in V \setminus \left\{ g^* \right\}$, $\varepsilon_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

З урахуванням того, що V є Γ-множиною відносно g^*, існує $t_k \in \left(0, \varepsilon_k\right)$ таке, що $g^* + t_k\left(g - g^*\right) \in V$. Тому

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\Phi_a\left(g^* + t_k\left(g - g^*\right)\right) - \Phi_a\left(g^*\right)}{t_k} = \Phi_a^/\left(g^*, g - g^*\right) \geq 0.$$

Відповідно до твердження 2 тоді

$$\max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{y\in a\left(s,g^*\right)} \max_{f\in\partial_{\mathbb{C}} p\left(y-g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(g^*(s) - g(s)\right) = \Phi_a^/\left(g^*, g - g^*\right).$$

Тому співвідношення (6) набере вигляду

$$\inf_{g\in V\setminus\left\{g^*\right\}} \Phi_a^/\left(g^*, \frac{g - g^*}{\left\|g - g^*\right\|}\right) > 0.$$

Згідно з теоремою 2 g^* є сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1).

Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай V є скінченновимірним підпростором простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\Phi_a^/\left(g^*, z\right) > 0, \ z \in S_V,$$

де $S_V = \left\{z : z \in V, \|z\| = 1\right\}$.

Наслідок 1 можна сформулювати у такій еквівалентній формі.

Наслідок 2. Нехай V є скінченновимірним підпростором простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\max_{s\in S_a\left(g^*\right)} \max_{y\in a\left(s,g^*\right)} \max_{f\in\partial_{\mathbb{C}} p\left(y-g^*(s)\right)} \operatorname{Re} f\left(z(s)\right) > 0, \ z \in S_V.$$

Наслідок 3. Нехай $p(x) = \|x\|$, $x \in X$, V є скінченновимірним підпростором простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був сильно єдиним екстремальним елементом для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$\max_{s\in S_a(g^*)} \max_{y\in a(s,g^*)} \max_{\{f: f\in X^*,\ f(y-g^*(s))=\|y-g^*(s)\|\}} \operatorname{Re} f\left(z(s)\right) > 0,\ z \in S_V .$$

Висновок. Для задачі найкращої у розумінні опуклої функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення Γ-множинами неперервних однозначних відображень встановлено критерії сильної єдиності екстремального елемента.

Список використаних джерел:

1. Покровский А. В. О наилучшем несимметричном приближении в пространствах непрерывных функций / А. В. Покровский. — К., 2005. — 48 с. — (Препр. / НАН Украины. Ин-т математики НАН Украины).
2. Гнатюк В. О. Теореми існування екстремального елемента для задачі найкращої у розумінні опуклої неперервної функції рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова Національної академії наук України, Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю.Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 5. — С. 60–76.
3. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — Т. 4, №5. — С. 608–613.
4. Демьянов В. Ф. Приближенные методы решения экстремальных задач / В. Ф. Демьянов, А. М. Рубинов. — Л. : Изд-во Ленинградского университета, 1968. — 178 с.
5. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
6. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
7. Кадец В. М. Курс функционального анализа : учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В. М. Кадец. — Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2006. — 607 с.
8. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАНУ. — 2005. — №6. — С. 19–23.

In this article criterions of the strong uniqueness of the extremal element for the problem of the best at sense of the convex function uniform approximation of continuous compact-valued maps by Γ-set of continuous single-valued maps are established.

Key words: *the compact-valued maps, the best in sense of the convex function uniform approximation, of the strong uniqueness of the extremal element, criterions.*

Отримано: 16.03.2012