УДК 517.977.56

Р. Р. Амирова*, аспирант,
К. Б. Мансимов,** д-р физ.-мат. наук

*Институт кибернетики НАН Азербайджана, г. Баку,
**Бакинский государственный университет, г. Баку

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ОСОБЫХ УПРАВЛЕНИЙ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ДВУМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

В работе рассматривается задача оптимального управления, описываемая системой двумерных разностных уравнений типа Вольтерра. Изучен случай вырождения дискретного условия максимума.

Ключевые слова: *необходимое условие оптимальности, система разностных уравнений Вольтерра, дискретный принцип максимума, особые управления, формула приращения.*

Введение. К настоящему времени, исходя из теоретических и прикладных требований, изучены различные задачи оптимального управления, описываемые разностными аналогами дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Среди задач оптимального управления особое место занимают задачи оптимального управления описываемые интегральными уравнениями Вольтерра, которые играют важную роль при моделировании многих реальных систем управления.

Как отмечено, например, в [1—8] уравнения Вольтерра широко используются при построении моделей ряда явлений механики, сплошной среды и биомеханики.

Уравнения Вольтерра с дискретным временем используются в некоторых численных схемах решения интегральных уравнений с непрерывным временем, а также при построении ряда математических моделей динамики популяций. В работах [8—11] и др. изучены задачи оптимального управления, описываемые интегральными уравнениями Вольтерра. Получены необходимые и достаточные условия оптимальности.

Работа посвящена постановке и исследованию одной задачи оптимального управления, описываемой системой двумерных разностных уравнений Вольтерра. Сначала доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума. Затем рассмотрен случай вырождения дискретного условия максимума (особый случай). Доказаны необходимые условия оптимальности особых в смысле принципа максимума Понтрягина управлений.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о минимуме функционала

$$S(u) = \varphi\left(z\left(t_1, x_1\right)\right) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{gathered} u(t,x) \in U \subset R^r, \\ (t,x) \in T \times X = \left\{(t,x): t = t_0, t_0+1, \ldots, t_1;\ x = x_0, x_0+1, \ldots, x_1\right\}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$z(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t} \sum_{s=x_0}^{x} f\left(t, x, \tau, s, z(\tau, s), u(\tau, s)\right), \quad (t,x) \in T \times X. \tag{3}$$

Здесь $\varphi(z)$ — заданная дважды непрерывно дифференцируемая скалярная функция, t_0, t_1, x_0, x_1 — заданы, $f(t,x,\tau,s,z,u)$ — заданная n-мерная вектор-функция непрерывная по совокупности переменных вместе с частными производными по z до второго порядка включительно, $u(t,x)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий, U — заданное непустое и ограниченное множество.

Каждую управляющую функцию, удовлетворяющую ограничению (2), назовем допустимым управлением, а пару $\left(u(t,x),\ z(t,x)\right)$ — допустимым процессом.

Уравнение (3) представляет собой разностный аналог двумерного интегрального уравнения Вольтерра. Предполагается, что каждому допустимому управлению $u(t,x)$ соответствует единственное дискретное решение уравнения (3).

Вопросы существования, единственности и ограниченности решений нелинейных одномерных разностных уравнений Вольтерра исследованы в работах [5; 12—14] и др.

Заметим, что различные аспекты многопараметрических и в частности двухпараметрических дискретных систем управления изучены в работах [15—22] и др.

Допустимое управление $u(t,x)$, доставляющее минимум функционалу (1) при ограничениях (2), (3), назовем оптимальным управлением, а соответствующий процесс $\left(u(t,x),\ z(t,x)\right)$ — оптимальным процессом.

Формула приращения критерия качества. Пусть $\left(u(t,x),\right.$ $\left.z(t,x)\right)$ — фиксированный допустимый процесс, и вдоль него множество

$$f(t,x,\tau,s,z,U) = \left\{\alpha : \alpha = f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),v\right),\ v \in U\right\} \tag{4}$$

выпукло при всех (t,x,τ,s).

Через $u(t,x;\,\varepsilon)$, обозначим произвольное допустимое управление такое, что соответствующее ему состояние процесса $z(t,x;\,\varepsilon)$ удовлетворяет соотношению

$$
\begin{aligned}
z(t,x;\,\varepsilon) &= \sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s:\varepsilon),u(\tau,s:\varepsilon)\right) \equiv \\
&\equiv \sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} \Big[f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s:\varepsilon),u(\tau,s)\right) + \\
&+\varepsilon\left[f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s:\varepsilon),v(\tau,s)\right) - f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s:\varepsilon),u(\tau,s)\right)\right]\Big],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ произвольное число, а $v(t,x) \in U$, $(t,x) \in T \times X$ произвольное допустимое управление.

Такое допустимое управление $u(t,x;\,\varepsilon)$ существует в силу выпуклости множества (4).

Пусть, по определению,

$$
y(t,x) = \left.\frac{\partial z(t,x:\varepsilon)}{\partial \varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}; \qquad Y(t,x) = \left.\frac{\partial^2 z(t,x:\varepsilon)}{\partial \varepsilon^2}\right|_{\varepsilon=0}. \tag{6}
$$

Используя (5) и учитывая гладкость вектор-функции $f(t,x,\tau,s,z,u)$, доказывается, что $y(t,x)$ и $Y(t,x)$ являются соответственно решениями линейных неоднородных разностных уравнений типа Вольтерра

$$
\begin{aligned}
y(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} \Big[& f_z\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right) y(\tau,s) + \\
& + \Delta_{v(\tau,s)} f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right) \Big],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
Y(t,x) = \sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x} \Big[& f_z\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right) Y(\tau,s) + \\
& + 2\,\Delta_{v(\tau,s)} f_z\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right) y(\tau,s) + \\
& + y'(\tau,s) f_{zz}\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right) y(\tau,s) \Big].
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Здесь, и в дальнейшем, используются обозначения типа

$$
\begin{aligned}
& \Delta_{v(\tau,s)} f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right) \equiv \\
& \equiv f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),\,v(\tau,s)\right) - f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right),
\end{aligned}
$$

(') штрих означает для векторов скалярное произведение, для матриц — операцию транспонирования.

При этом специальное приращение функционала (1), отвечающее допустимым управлениям $u(t,x;\,\varepsilon)$ и $u(t,x)$, записывается в виде

$$\Delta S_{\varepsilon}(u)=S\big(u(t,x;\varepsilon)\big)-S\big(u(t,x)\big)=\varepsilon\frac{\partial\varphi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z}y(t_1,x_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\times$$
$$\times y'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi'\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}y(t_1,x_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\frac{\partial\varphi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z}Y(t_1,x_1)+0\big(\varepsilon^2\big). \tag{9}$$

Положим

$$H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)=\sum_{\tau=t}^{t_1}\sum_{s=x}^{x_1}\psi'(\tau,s)\,f\big(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)-$$
$$-\varphi_z'\big(z(t_1,x_1)\big)f\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big).$$

Здесь $\psi=\psi(t,x)$ n-мерная вектор-функция сопряженных переменных, являющаяся решением уравнения

$$\psi(t,x)=H_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big). \tag{10}$$

Уравнение (10) является аналогом сопряженной системы [23—25] для задачи управления (1)—(3) и представляет собой линейное неоднородное разностное уравнение Вольтерра относительно $\psi(t,x)$.

Теорема 1. Специальное приращение критерия качества (1) можно представить в виде

$$\Delta S_{\varepsilon}(u)=-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Delta_{v(t,x)}H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\Bigg\{y'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}y(t_1,x_1)- \tag{11}$$
$$-\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}y'(t,x)H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)-$$
$$-2\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Delta_{v(t,x)}H_z'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)\Bigg\}+0\big(\varepsilon^2\big).$$

Доказательство.

Умножая обе части соотношений (7), (8) слева скалярно на $\psi(t,x)$, а затем суммируя обе части полученных соотношений по t (x) от t_0 (x_0) до t_1 (x_1) получим

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\times\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\left[f_z\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)\times\right.\right. \tag{12}$$

$$\left.\left.\times y(\tau,s)+\Delta_{u(\tau,s)}f\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)\right]\right],$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)Y(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\left[f_z\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)\times\right.\right. \tag{13}$$

$$\times Y(\tau,s)+2\,\Delta_{u(\tau,s)}f_z\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)y(\tau,s)+$$

$$\left.\left.+y'(\tau,s)\,f_{zz}\left(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)y(\tau,s)\right]\right].$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма. Пусть $L(t,x,\tau,s)$ и $K(t,x,\tau,s)$ заданные $(n\times n)$ матричные функции. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}L(m,\ell,t,x)K(t,x,\tau,s)\right]=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{m}\sum_{x=x_0}^{\ell}\left[\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell}L(m,\ell,\tau,s)K(\tau,s,t,x)\right].$$

Лемма представляет собой двумерный аналог дискретного аналога формулы Фубини из [1; 7].

Используя эту лемму и полагая

$$M\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)=\sum_{\tau=t}^{t_1}\sum_{s=x}^{x_1}\psi'(\tau,s)\,f\left(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\right),$$

тождества (12), (13) преобразуются к виду

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)\,y(t,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[M_z'\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)y(t,x)+\right. \tag{14}$$

$$\left.+\Delta_{v(t,x)}M\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)\right],$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)Y(t,x)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[M_z\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)Y(t,x)+\right.$$

$$+2\Delta_{v(t,x)}M_z'\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)y(t,x)+ \tag{15}$$

$$\left.+y'(t,x)M_{zz}\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)y(t,x)\right].$$

Далее из (7), (8) ясно, что

$$y(t_1,x_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Big[f_z\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)y(t,x)+$$
$$+\Delta_{v(t,x)}f\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)\Big].$$
$$Y(t_1,x_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\Big[f_z\big(t_1,x_1,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)Y(\tau,s)+ \tag{16}$$
$$+2\,\Delta_{v(\tau,s)}f_z\big(t_1,x_1,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)y(\tau,s)+$$
$$+y'(\tau,s)f_{zz}\big(t_1,x_1,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)y(\tau,s)\Big].$$

Принимая во внимания тождества (14)—(16) в (9) приходим к разложению

$$\Delta S_\varepsilon(u)=\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi'\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z}\Big[f_z\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)y(t,x)+$$
$$+\Delta_{v(t,x)}f\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)\Big]+\frac{\varepsilon^2}{2}y'(t_1,x_1)\frac{\partial^2\varphi'\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z^2}\times$$
$$\times y(t_1,x_1)+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\frac{\partial\varphi\big(z(t_1,x_1)\big)}{\partial z}\Big[f_z\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)Y(t,x)+$$
$$+2\,\Delta_{v(\tau,s)}f_z\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)y(t,x)+$$
$$+y'(t,x)f_{zz}\big(t_1,x_1,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)\Big]+\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)y(t,x)-$$
$$-\varepsilon\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Big[M_z'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)+$$
$$+\Delta_{v(t,x)}M\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)\Big]+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\psi'(t,x)Y(t,x)-$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Big[M_z'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)Y(t,x)+$$
$$+2\,\Delta_{v(t,x)}M_z'\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)+$$
$$+y'(t,x)M_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)\Big]+0\big(\varepsilon^2\big).$$

Отсюда, группируя подобные члены и принимая во внимания выражение функции Гамильтона—Понтрягина, будем иметь

$$\Delta S_{\varepsilon}(u) = -\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H_z'\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right) y(t,x) -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} H_z'\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right) Y(t,x) +$$

$$+\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \psi'(t,x) y(t,x) + \frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \psi'(t,x) Y(t,x) -$$

$$-\varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H'\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right) +$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2} y'(t_1,x_1) \frac{\partial^2 \varphi'\left(z(t_1,x_1)\right)}{\partial z^2} y(t_1,x_1) -$$

$$-\varepsilon^2 \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H_z'\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right) y(t,x) -$$

$$-\frac{\varepsilon^2}{2} \sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} y'(t,x) H_{zz}\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right) y(t,x) + 0\left(\varepsilon^2\right).$$

Отсюда, с учетом того, что $\psi(t,x)$ является решением уравнения (10) приходим к разложению (11). Теорема доказана.

Необходимые условия оптимальности. Из разложения (11) в силу произвольности $\varepsilon \in [0,1]$, сразу следует утверждение.

Теорема 2. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)$ в задаче (1)—(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\sum_{t=t_0}^{t_1} \sum_{x=x_0}^{x_1} \Delta_{v(t,x)} H\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right) \le 0 \tag{17}$$

выполнялось для всех $v(t,x) \in U$, $(t,x) \in T \times X$.

Теорема 2 представляет собой аналог дискретного принципа максимума Понтрягина [22—25] для рассматриваемой задачи и является необходимым условием оптимальности первого порядка.

Поэтому число неоптимальных управлений, удовлетворяющих условию максимума (17), может оказаться достаточно большим. Кроме того, не исключена возможность вырождения условия оптимальности (17) (см., напр., [26]).

Изучим случай вырождения необходимого условия оптимальности (17).

Определение 1. Допустимое управление $u(t,x)$ назовем особым в смысле принципа максимума Понтрягина управлением в задаче (1)—(3), если соотношение

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Delta_{v(t,x)}H\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)=0 \tag{18}$$

выполняется для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in T\times X$.

Из определения ясно, что для особых управлений условие максимума теряет свое содержательное значение. Поскольку в этом случае функция Гамильтона—Понтрягина не зависит от параметров управления.

Особые управления, по определению, удовлетворяют необходимым условиям оптимальности первого порядка и следовательно для их анализа с точки зрения оптимальности нужны условия оптимальности второго, а иногда и более высокого порядка [26].

Поэтому возникает необходимость в дальнейшем исследовании особых управлений.

Из разложения (11), с учетом (18), следует следующее утверждение.

Теорема 3. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t,x)$ в задаче (1)—(3) необходимо, чтобы неравенство

$$\begin{gathered}
y'(t_1,x_1)\varphi_{zz}\big(z(t_1,x_1)\big)y(t_1,x_1)-\\
-\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Big[y'(t,x)H_{zz}\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)+\\
+2\,\Delta_{v(t,x)}H'_z\big(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\big)y(t,x)\Big]\ge 0
\end{gathered} \tag{19}$$

выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in T\times X$.

Здесь $y(t,x)$ является решением уравнения в вариациях (7).

Неравенство (19) является довольно общим необходимым условием оптимальности особых управлений.

Опираясь на это неравенство, в некоторых случаях удается получить конструктивно проверяемые необходимые условия оптимальности особых, в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений явно выраженные через параметры задачи (1)—(3).

Уравнение в вариациях (7) является линейным неоднородным двумерным разностным уравнением типа Вольтерра.

Используя схему работ [1; 3—7] доказывается, что решение уравнения в вариациях (7) $y(t,x)$ допускает представление

$$y(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\Big[\Delta_{v(\tau,s)}f\big(t,x,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)+$$
$$+\sum_{\alpha=\tau}^{t}\sum_{\beta=s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)\Delta_{v(\tau,s)}f\big(\alpha,\beta,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\Big]. \qquad (20)$$

Здесь $R(t,x,\tau,s)$ является решением линейного неоднородного матричного разностного уравнения

$$R(m,\ell,t,x)=\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell}R(m,\ell,\tau,s)f_z\big(\tau,s,t,x,z(t,x),u(t,x)\big)-$$
$$-f_z\big(m,\ell,t,x,z(t,x),u(t,x)\big). \qquad (21)$$

При помощи схемы, например, работы [1] доказывается, что $R(m,\ell,t,x)$ является также решением уравнения

$$R(m,\ell,t,x)=\sum_{\tau=t}^{m}\sum_{s=x}^{\ell}f_z\big(m,\ell,\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)R(\tau,s,t,x)-$$
$$-f_z\big(m,\ell,t,x,z(t,x),u(t,x)\big). \qquad (22)$$

Матричную функцию $R(m,\ell,t,x)$ по аналогии с работами [1; 3—7] назовем резольвентой уравнения в вариациях (7), а уравнения (21), (22) — уравнениями резольвенты.

Предположим, что правая часть системы (3) $f(t,x,\tau,s,z,u)$ имеет вид:

$$f(t,x,\tau,s,z,u)=A(t,x,\tau,s)\,g(\tau,s,z,u). \qquad (23)$$

Тогда представление (20) принимает вид

$$y(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\Big[A(t,x,\tau,s)\Delta_{v(\tau,s)}g\big(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)+$$
$$+\sum_{\alpha=\tau}^{t}\sum_{\beta=s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)A(\alpha,\beta,\tau,s)\Delta_{v(\tau,s)}g\big(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\Big]=$$
$$=\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\left\{\left[A(t,x,\tau,s)+\sum_{\alpha=\tau}^{t}\sum_{\beta=s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)A(\alpha,\beta,\tau,s)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\Delta_{v(\tau,s)}g\big(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\big)\right\}.$$

Полагая

$$Q(t,x,\tau,s)=A(t,x,\tau,s)+\sum_{\alpha=\tau}^{t}\sum_{\beta=s}^{x}R(t,x,\alpha,\beta)A(\alpha,\beta,\tau,s),$$

эту формулу записываем в виде

$$y(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}Q(t,x,\tau,s)\Delta_{v(\tau,s)}g\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right). \qquad (24)$$

Из представления (24) ясно, что

$$y(t_1,x_1)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}Q(t_1,x_1,\tau,s)\Delta_{v(\tau,s)}g\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right).$$

Поэтому получаем, что

$$y'(t_1,x_1)\varphi_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)y(t_1,x_1)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}\Delta_{v(\tau,s)}g\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)'\varphi_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)\times \qquad (25)$$

$$\times\Delta_{v(\alpha,\beta)}g\left(\alpha,\beta,z(\alpha,\beta),u(\alpha,\beta)\right).$$

Далее ясно, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\Delta_{v(t,x)}H'_z\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)y(t,x)=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\Delta_{v(t,x)}H'_z\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)Q(t,x,\tau,s)\times\right. \qquad (26)$$

$$\left.\times\Delta_{v(\tau,s)}g\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)\right].$$

Наконец, используя схемы, например работ [20; 21], доказывается тождества

$$\sum_{t=t_0}^{t_1}\sum_{x=x_0}^{x_1}y'(t,x)H_{zz}\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)y(t,x)=$$

$$=\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}\Delta_{v(\tau,s)}g'\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)\times$$

$$\times\left\{\sum_{t=\max(\tau,\alpha)}^{t_1}\sum_{x=\max(s,\beta)}^{x_1}Q'(t,x,\tau,s)\times\right. \qquad (27)$$

$$\left.\times H_{zz}\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)Q(t,x,\alpha,\beta)\right\}\times$$

$$\times\Delta_{v(\alpha,\beta)}g\left(\alpha,\beta,z(\alpha,\beta),u(\alpha,\beta)\right).$$

Принимая во внимания тождества (25)—(27) в неравенстве (19) приходим к соотношению

$$\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\sum_{\alpha=t_0}^{t_1}\sum_{\beta=x_0}^{x_1}\Delta_{v(\tau,s)}g'\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)M\left(\tau,s,\alpha,\beta\right)\times$$
$$\times\Delta_{v(\alpha,\beta)}g\left(\alpha,\beta,z(\alpha,\beta),u(\alpha,\beta)\right)+$$
$$+2\sum_{\tau=t_0}^{t_1}\sum_{s=x_0}^{x_1}\left[\sum_{\tau=t_0}^{t}\sum_{s=x_0}^{x}\Delta_{v(t,x)}H'_z\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)\times\right. \tag{28}$$
$$\left.\times Q(t,x,\tau,s)\Delta_{v(\tau,s)}g\left(\tau,s,z(\tau,s),u(\tau,s)\right)\right]\le 0\,.$$

Здесь по определению

$$M\left(\tau,s,\alpha,\beta\right)=-Q'(t_1,x,\tau,s)\varphi_{zz}\left(z(t_1,x_1)\right)Q(t_1,x_1,\alpha,\beta)+$$
$$+\sum_{t=\max(\tau,\alpha)}^{t_1}\sum_{x=\max(s,\beta)}^{x_1}Q'(t,x,\tau,s)\times \tag{29}$$
$$\times H_{zz}\left(t,x,z(t,x),u(t,x),\psi(t,x)\right)Q(t,x,\alpha,\beta).$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 4. Если множество (4) выпуклое, то для оптимальности особого, в смысле принципа максимума Понтрягина, управления $u(t,x)$ в задаче (1)—(3), (23) необходимо, чтобы неравенство (28) выполнялось для всех $v(t,x)\in U$, $(t,x)\in T\times X$.

Заключение. В работе доказано необходимое условие оптимальности в форме дискретного условия максимума, а затем исследован особый случай, т.е. случай вырождения дискретного принципа максимума. Установлено, необходимое условие оптимальности, особых в смысле принципа максимума Понтрягина, управлений.

Список использованной литературы:

1. Колмановский В. Б. Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. — 2001 — № 4. — С. 47–56.
2. Lakshmikantham V. Theory of difference equations / V. Lakshmikantham, D. Trigiante. — Academic Press, 1988.
3. Колмановский В. Б. О предельной периодичности решений некоторых систем Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. — 2001. — Т. 5. — С. 36–43.
4. Ивинская Е. В. Об ограниченности решений некоторых разностных уравнений Вольтерра / Е. В. Ивинская, В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 8. — С. 86–97.
5. Song Y. Perturbation theory for discrete Volterra equations / Y. Song, C. T. H. Baker // Journ. Difference Equ. Appl. — 2003. — Vol. 9, № 10. — P. 969–987.

6. Choi S. K. Asymptotik behavior of nonlinear Volterra difference systems / S. K. Choi, Y. H. Goo, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. — 2007. — Vol. 44, № 1. — P. 177–184.
7. Zouyousefain M. Stability results for difference equations of Volterra type / M. Zouyousefain, S. Leela // Applid. Math. Comput. — 1990. — Vol. 36, № 1. — P. 51–61.
8. Бутковский А. Г. Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1965. — 628 с.
9. Винокуров В. Р. Оптимальное управление системами, описываемыми интегральными уравнениями / В. Р. Винокуров // Изв. вузов. Сер. мат. — 1967. — № 7. — С. 21–33.
10. Carlson D. A. An elementary proof of the maximum principle for optimal control problems governed by a Volterra integral equations / D. A. Carlson // Journal Optimiz. Theory and Appl. — 1987. — Vol. 54, № 1. — P. 43–61.
11. Абдуллаев А. А. Необходимые условия оптимальности второго порядка для процессов, описываемых системой нелинейных интегральных уравнений типа Вольтерра / А. А. Абдуллаев, К. Б. Мансимов // Автоматика и телемеханика. — 2000. — № 1. — С. 3–11.
12. Choi K. S. Existence and boundedness of solutions for Volterra discrete equations / K. S. Choi, Y. H. Goo, N. J. Koo // Journal of the Chungcheong mathematical society. — 2006. — Vol. 19, № 3. — P. 237–244.
13. Elaydi S. N. Global stability of nonlinear Volterra difference system / S. N. Elaydi, V. L. Kocic // Differential Equations Dynam. Systems. — 1994. — Vol. 2. — P. 87–90.
14. Baker C. T. H. Discrete Volterra equations – Discrete Volterra Operators, Fixed Point Theorems and their Application / C. T. H. Baker, Y. Song // Numerical Analysis Report. — 2002. — № 398. — 22 p.
15. Гайшун И. В. Условия разрешимости и управляемость линейных двухпараметрических дискретных систем / И. В. Гайшун, В. В. Горячкин // Дифференц. уравнения. — 1988. — Т. 24, № 12. — С. 2047–2051.
16. Гайшун И. В. Дифференциально-разностные двухпараметрические системы управления / И. В. Гайшун // Дифференц. уравнения. — 1994. — Т. 30, № 6. — С. 821–938.
17. Дымков М. П. Задача оптимального управления двухпараметрической системой в гильбертовом пространстве / М. П. Дымков, И. В. Гайшун // Вычисл. и приклад. мат. — 1996. — Вып. 80. — С. 10–23.
18. Васильев О. В. Об оптимальных процессах в двухпараметрических дискретных системах / О. В. Васильев, Ф. М. Кириллова // Докл. АН СССР. — 1967 — Т. 173, № 1. — С. 17–19.
19. Дымков М. П. Экстремальные задачи в многопараметрических системах управления / М. П. Дымков. — Мн. : БГЭУ, 2005. — С. 363.
20. Мансимов К. Б. Оптимизация одного класса дискретных двухпараметрических систем / К. Б. Мансимов // Дифференц. уравнения. — 1991. — Т. 27, № 2. — С. 359–361.
21. Мансимов К. Б. Необходимые условия оптимальности второго порядка в дискретных двухпараметрических системах / К. Б. Мансимов // Изв. АН Азербайджана. Сер. физ.-техн. и мат. наук. — 1998. — № 2. — С. 56–60.

22. Мансимов К. Б. Дискретные системы / К. Б. Мансимов. — Баку : Изд-во БГУ, 2002. — 114 с.
23. Габасов Р. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — Мн. : Изд-во БГУ. — 400 с.
24. Пропой А. И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов / А. И. Пропой. — М. : Наука, 1973. — 256 с.
25. Ащепков Л. Т. Оптимальное управление разрывными системами / Л. Т. Ащепков. — Новосибирск, 1987 — 272 с.
26. Габасов Р. Особые оптимальные управления / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова. — М. : Наука, 1973. — 256 с.

In this work there is considered an optimal control problem for Volterra discrete systems. Necessary conditions of optimality are derived.

Key words: *necessary optimality condition, system of Volterra difference equations, discrete maximum principle, singular control, increment formula.*

Отримано: 02.03.2012

УДК 517.9

С. М. Бак*, канд. фіз.-мат. наук,
К. Є. Рум'янцева,** канд. пед. наук

*Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця,
**Вінницький інститут економіки Тернопільського національного економічного університету, м. Вінниця

КОРЕКТНІСТЬ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ НЕСКІНЧЕННОЇ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ З КУБІЧНИМ ПОТЕНЦІАЛОМ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи диференціальних рівнянь, яка описує нескінченний ланцюг лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів. Отримано результат про існування та єдиність глобального розв'язку задачі Коші у випадку кубічного потенціалу.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, задача Коші, глобальний розв'язок, кубічний потенціал.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор лінійно взаємодіє з чотирма своїми