УДК 519.718: 519.217

В. К. Ясинский*, д-р физ.-мат. наук, профессор,
А. Я. Довгунь,** асистент

*Черновицкий национальний университет
имени Юрия Федьковича, г. Черновцы,
**Буковинская государственная финансовая академия, г. Черновцы

УСТОЙЧИВОСТЬ ДИФФУЗИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ С УЧЕТОМ МАРКОВСКИХ ПАРАМЕТРОВ

Обоснован второй метод Ляпунова для диффузионных стохастических систем автоматического регулирования запаздывающего типа с марковскими параметрами, что является обобщением аналогичных результатов для стохастических диффузионных уравнений с последействием [5].

Ключевые слова: *автоматическое регулирование, винеровские возмущения, «непрямое» регулирование, абсолютная устойчивость.*

1. Основные определения

Пусть на вероятностном базисе $\left(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P\right)$ задан случайный процесс $x(t) \equiv x(t,\omega) \in R^n$ с помощью диффузионного стохастического дифференциально-функционального уравнения с марковскими возмущениями (ДСДФУ с МВ), которое является обобщенной моделью дифференциальных стохастических систем автоматического регулирования с учетом марковских возмущений [1], [2]

$$dx(t) = \left[a\left(t, x_t, \xi(t)\right) + g\varphi(\sigma) \right] dt + b\left(t, x_t, \xi(t)\right) dw(t), \quad t \geq t_0 \qquad (1)$$

с начальными условиями

$$x_{t_0} \equiv x\left(t_0 + \theta\right) = \psi(\theta), \ -h \leq \theta \leq 0\,, \qquad (2)$$

где $x_t \equiv x\left(t+\theta\right), -h \leq \theta \leq 0, \quad \xi(t) \equiv \xi\left(t,\omega\right) \in Y \quad \forall t \geq t_0$ — стохастически непрерывный однородный феллеровский марковский процесс с непрерывными справа реализациями y на компактном фазовом пространстве Y [3]; $a:[t_0,\infty) \times R^n\left([-\tau,0]\right) \times Y \to R^n$ — непрерывное отображение по аргументам; $b:[t_0,\infty) \times R^n\left([-\tau,0]\right) \times Y \to M_{n\times n}(R^n)$ — матрица порядка $n \times n$; $w(t)$ — n-измеримый процесс броуновского движения; $g \equiv \left(g_1, g_2, ..., g_n\right) \in R^n$, $l \equiv \left(l_1, l_2, ..., l_n\right) \in R^n$, $\sigma \equiv l^T x(t)$,

$0 \le \dfrac{\varphi(\sigma)}{\sigma} \le k$, $k \in (0,\infty)$, $\varphi(0) = 0$; $\varphi(\sigma) \ge 0 \quad \forall \sigma \in R^1$. Заметим, что $\psi(t), w(t)$ та $\xi(t)$ — попарно независимы.

Определение 1. Абсолютно непрерывный по переменной $t \ge t_0$ n-измеримый случайный процесс $x(t)$ называется сильным решением задачи (1), (2) на множестве $[t_0, T) \subset R_+$, если $\forall T_1 \subset [t_0, T)$, $t \in [t_0 - \tau, T_1)$ с вероятностью 1 выполняется равенство

$$x(t) = \begin{cases} \psi(t_0), \quad t = t_0, \\ \psi(0) + \int\limits_{t_0}^{t} a\left(s, x_s\right), \xi(s) ds + \int\limits_{t_0}^{t} g\varphi\left(l^T x_s\right) ds + \\ + \int\limits_{t_0}^{t} b\left(s, x_s, \xi(s)\right) dw(s), \quad t \in \left(t_0, T_1\right). \end{cases} \tag{3}$$

Если на произвольном отрезке $t \in [t_0, T)$ два произвольных решения (1), (2) равны друг другу с вероятностью единица, то полагают, что на этом множестве решение единственно с точностью до стохастической эквивалентности. В этом случае при условии $\xi(t_0) = y$ решение будем обозначать через $x(t, t_0, \psi, y)$.

Далее будем считать, что выполняется одно из следующих условий, налагаемых на правую часть ДСДФУ:

L1) глобальное условие Липшица:

$$\left|g\left(l^T\psi_1\right) - g\left(l^T\psi_2\right)\right| + \left|a\left(t, \psi_1, y\right) - a\left(t, \psi_2, y\right)\right| + \\ + \left\|b\left(t, \psi_1, y\right) - b\left(t, \psi_2, y\right)\right\| \le L\left\|\psi_1 - \psi_2\right\|$$

для всех $t \ge 0$, $y \in Y$ и $\psi_1, \psi_2 \in C_n([-\tau, 0])$, $\|\psi\| = \sup\limits_{-\tau \le \theta \le 0} |\psi(\theta)|$;

L2) усиленное глобальное условие Липшица: существует такая вероятностная мера ρ на σ-алгебре борелевых подмножеств отрезка $[-\tau, 0]$, что для всех $t \ge 0$, $y \in Y$ и $\psi_1, \psi_2 \in C_n([-\tau, 0])$

$$\left|g\left(l^T\psi_1\right) - g\left(l^T\psi_2\right)\right| + \left|a\left(t, \psi_1, y\right) - a\left(t, \psi_2, y\right)\right| + \\ + \left\|b\left(t, \psi_1, y\right) - b\left(t, \psi_2, y\right)\right\| \le L \int\limits_{-\tau}^{0} \left|\psi_1(\theta) - \psi_2(\theta)\right| \rho(d\theta) \equiv \left\|\psi_1 - \psi_2\right\|_\rho$$

L3) локальное условие Липшица:

$$\left|g\left(l^T\psi_1\right) - g\left(l^T\psi_2\right)\right| + \left|a\left(t, \psi_1, y\right) - a\left(t, \psi_2, y\right)\right| +$$

$$+\left\|b\left(t,\psi_1,y\right)-b\left(t,\psi_2,y\right)\right\|\le L_r\left\|\psi_1-\psi_2\right\|$$

при условии, что $\forall t\ge 0$, $y\in Y$, $r>0$ и $\psi_1,\psi_2\in U_r(0)\equiv$ $\equiv\left\{\psi\in C_n\left([-\tau,0]\right)\middle|\left\|\psi\right\|<r\right\}$;

L4) усиленное локальное условие Липшица:

$$\left|g\left(l^T\psi_1\right)-g\left(l^T\psi_2\right)\right|+\left|a\left(t,\psi_1,y\right)-a\left(t,\psi_2,y\right)\right|+$$
$$+\left\|b\left(t,\psi_1,y\right)-b\left(t,\psi_2,y\right)\right\|\le L_r\left\|\psi_1-\psi_2\right\|_\rho$$

для произвольных $t\ge 0$, $y\in Y$, $r>0$ и $\psi_1,\psi_2\in U_r(0)\equiv$ $\equiv\left\{\psi\in C_n\left([-\tau,0]\right)\middle|\left\|\psi\right\|_\rho<r\right\}$.

С ограничениями типа L3, L4, как правило, используется ограничение так называемого подлинейного роста

$$\left|g\left(l^T\psi\right)\right|+\left|a\left(t,\psi,y\right)\right|+\left\|b\left(t,\psi,y\right)\right\|\le K\left(\left\|\psi\right\|+\alpha(y)\right) \tag{4}$$

или

$$\left|g\left(l^T\psi\right)\right|+\left|a\left(t,\psi,y\right)\right|+\left\|b\left(t,\psi,y\right)\right\|\le K\left(\left\|\psi\right\|_\rho+\alpha(y)\right) \tag{5}$$

для всех $t\ge 0$, $y\in Y$ и $\psi\in C_n\left([-\tau,0]\right)$.

Ясно, что из глобальных условий L1 или L2 и условия

$$\sup_{t\ge 0}\left|a\left(t,0,y\right)\right|=\alpha(y)<\infty,\quad \sup_{t\ge 0}\left|b\left(t,0,y\right)\right|=\alpha(y)<\infty, \tag{6}$$

для $\forall y\in Y$ следуют соответственно условия (4), (5) [4].

Подставляя в правую часть ДСДФУ реализации $y\in Y$ марковского процесса $\xi(t)$ и используя результаты работы [4], легко убедиться в том, что глобальное условие Липшица L1 и условие (6) (или локальное условие L3 и условие (6)) гарантируют существование и единственность решения задачи (1), (2) на $[t_0,\infty)$ для произвольного $t_0\ge 0$ [13].

Введем понятие устойчивости тривиального решения $x(t)\equiv 0$ уравнения (1), как это сделано в работах [4—7], [9], [11-13], причем естественно допускать $\alpha=0$ в условии (6), т.е.

$$a\left(t,0,y\right)=0,\quad b\left(t,0,y\right)=0,\quad \varphi(0)=0\,, \tag{7}$$

а также считать, что существует единственное решение задачи (1), (2) на произвольном полуинтервале $[t_0,\infty)$, $t_0\ge 0$.

Определение 2. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$ задачи (1), (2) назовем:

- стохастически устойчивым, если $\forall\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ существует такое $\delta>0$, что из неравенства $\left\|\psi\right\|<\delta$ следует $\forall t_0\ge 0$, $y\in Y$ неравенство

$$P\left\{\omega : \sup_{t\geq t_0}\left|x\left(t,t_0,\psi,y\right)\right| \geq \varepsilon_1\right\} < \varepsilon_2; \tag{8}$$

- асимптотически стохастически устойчивым, если выполняется (8) и существует такое $\delta_1 > 0$, что для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in Y$ и $\psi \in U_{\delta_1}(0)$

$$P\left\{\omega : \lim_{t\to\infty}\left|x\left(t,t_0,\psi,y\right)\right| = 0\right\} = 1; \tag{9}$$

- локально асимптотически стохастически устойчивым, если оно стохастически устойчиво и существуют такие $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$, что

$$\lim_{t\to\infty}\left|x\left(t,t_0,\psi,y\right)\right| = 0, \quad \forall t_0 \geq 0, \quad y \in Y, \quad \psi \in U_{\delta_1}(0)$$

при $\sup\limits_{t\geq t_0}\left|x\left(t,t_0,\psi,\xi\right)\right| < \delta_2$.

Определение 3. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ задачи (1), (2) назовем:

- p–устойчивым $(p \geq 1)$, если

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0}\sup_{t\geq t_0\geq 0} E\left\{\left|x\left(t,t_0,\psi,y\right)\right|^p\right\} = 0;$$

- асимптотически p–устойчивым, если оно p–устойчиво и существует такое $\delta > 0$, что

$$\lim_{t\to\infty} E\left\{\left|x\left(t,t_0,\psi,y\right)\right|^p\right\} = 0$$

для $\forall t_0 \geq 0$, $y \in Y$ и $\psi \in U_\delta(0)$.

Определение 4. Тривиальное решение $x(t) \equiv 0$ задачи (1), (2) назовем

- экспоненциально p–устойчивым, если существуют такие $\delta > 0$, $M > 0$ и $\gamma > 0$, что для произвольных $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in Y$ и $\psi \in U_\delta(0)$

$$E\left\{\left|x\left(t,t_0,\psi,y\right)\right|^p\right\} \leq Me^{-\gamma(t-t_0)}\|\psi\|^p; \tag{10}$$

- глобально экспоненциально p–устойчивым, если (10) выполняется для всех $t \geq t_0 \geq 0$, $y \in Y$ и $\psi \in C_n\left(\left[-\tau,0\right]\right)$;
- сильно экспоненциально p–устойчивым, если существуют такие $-\delta > 0$, $M > 0$ и $\gamma > 0$, что для всех $t \geq t_0 \geq 0$, $\xi \in Y$ и $\psi \in U_\delta(0)$

$$E\left\{\left\|x_t\left(t_0,\psi,y\right)\right\|^p\right\} \le Me^{-\gamma(t-t_0)}\left\|\psi\right\|^p; \tag{11}$$

- сильно глобально экспоненциально p–устойчивым, если неравенство (11) выполняется для всех $t \ge t_0 \ge 0$, $y \in Y$ и $\forall\,\psi \in C_n\left(\left[-\tau,0\right]\right)$.

2. Производная Ляпунова в силу решений стохастических дифференциально-функциональных уравнений Ляпунова-Красовского (1), (2)

Рассмотрим скалярный непрерывный функционал [4; 9] по всем переменным

$$V: R_+ \times C_n\left(\left[-\tau,0\right]\right)\times Y \to R^1, \tag{12}$$

для которого выполняется глобальное условие Липшица

$$\left|V\left(t,\psi_1,y\right)-V\left(t,\psi_2,y\right)\right| \le L\left\|\psi_1-\psi_2\right\| \tag{13}$$

для всех $\psi_1,\psi_2 \in C_n\left(\left[-\tau,0\right]\right)$ и условие глобальной ограниченности $\forall y \in Y$

$$\sup_{t\ge 0}\left|V\left(t,0,y\right)\right| = \alpha(y) < \infty. \tag{14}$$

При помощи решения (1), (2) и переходной вероятности $P\left(t,y,dz\right)$ марковского процесса $\xi(t)\in R^n$ определим линейный оператор [3]

$$\left(T(t)V\right)\left(s,\psi,y\right) \equiv \int_Y E\left\{V\left(s+t,x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),z\right)\right\}P\left(t,y,dz\right). \tag{15}$$

Теорема 1. Пусть функционал V непрерывен по совокупности переменных и выполняются соответствующие условия Липшица для коэффициентов (1). Тогда:

1) результат действия оператора $T(t)$ на $V\left(t,\psi,y\right)$ является непрерывной функцией по аргументам, т.е. $T: C(\tilde{Y}) \to C(\tilde{Y})$, где $\tilde{Y} \equiv [0,\infty)\times C_n[-\tau,0)\times Y$;

2) оператор $T(t), t \ge 0$ образует полугруппу:

$$T\left(t_1+t_2\right) = T(t_1)\cdot T(t_2), \quad \forall t_1,t_2 \ge 0; \tag{16}$$

3) семейство линейных операторов на фазовом пространстве $\tilde{Y}$ определяет стохастический непрерывный марковский процесс с непрерывными справа реализациями.

Доказательство. 1). При условии L1 можно получить неравенство

$$\left\|x_{t+s}\left(s,\psi_1,y\right)-x_{t+s}\left(s,\psi_2,y\right)\right\| \le \left\|\psi_1-\psi_2\right\|e^{Lt}$$

для произвольных $\psi_1, \psi_2 \in C_n\left(\left[-\tau, 0\right]\right)$ и $t \geq 0$, а вследствие стохастической непрерывности феллеровского марковского процесса $\xi(t)$ функция $T(t)V(s,\psi,y)$ непрерывна по совокупности аргументов $T : C(\tilde{Y}) \to C(\tilde{Y})$.

2) Вследствие единственности решения задачи (1), (2) и свойств переходной вероятности $P\left(t, y, dz\right)$ [2] получим

$$\left(T\left(t_1 + t_2\right)\right)V\left(s,\psi,y\right) =$$

$$= \int_Y E\left\{V\left(s + t_1 + t_2, x_{s+t_1+t_2}\left(s,\psi,y\right), z\right)\right\} P\left(t_1 + t_2, y, dz\right) =$$

$$= \int_Y\int_Y E\left\{V\left(s + t_1 + t_2, x_{s+t_1+t_2}\left(s + t_1, x_{t_2}\left(s,\psi,y\right), u\right), z\right)\right\} \times$$

$$\times P\left(t_1, y, du\right) P\left(t_2, u, dz\right),$$

но по определению

$$\int_Y E\left\{V\left(s_1 + t_2, x_{s_1+t_2}\left(s,\zeta,y\right), z\right)\right\} P\left(t_2, u, dz\right)\Bigg|_{\substack{s_1 = s+t_1 \\ \zeta = x_{s+t_1}(s,\psi,y),}} =$$

$$= \left(T(t_2)V\right)\left(s + t_1, x_{s+t_1}\left(s,\psi,y\right), u\right)$$

поэтому можно записать

$$\left(T\left(t_1 + t_2\right)\right)V\left(s,\psi,y\right) =$$

$$= \int_Y E\left\{\left(T(t_2)V\right)\left(s + t_1, x_{s+t_1}\left(s,\psi,y\right), u\right)\right\} P\left(t_1, y, du\right) =$$

$$= \left(T(t_1)T(t_2)V\right)\left(s,\psi,y\right)$$

для произвольных $t_1, t_2, s \geq 0$, $\forall y \in Y$ и $\forall \psi \in C_n([-\tau, 0])$, что и доказывает (16).

3) Поскольку непрерывная на отрезке $\left[-\tau + s, s + \Delta\right]$ функция аргумента t, заданная равенством [11], [13]

$$x\left(t,s,\psi\right) = \begin{cases} \psi(t-s), \quad \forall t \in [-\tau + s, s + \Delta], \\ \psi(0) + \int\limits_s^t a\left(\tau, x_\tau\left(s,\psi,y\right), y(\tau)\right) d\tau + \int\limits_s^t g\varphi\left(l^T x(\tau)\right) d\tau + \\ + \int\limits_s^t b\left(\tau, x_\tau\left(s,\psi,y\right), y(\tau)\right) dw(\tau), \quad \forall t \in [s, \Delta], \end{cases}$$

является равномерно непрерывной, то $\lim\limits_{t\to 0}\left\|x_t\left(s,\psi,y\right) - \psi\right\| = 0$. Отсюда, учитывая стохастическую непрерывность марковского процесса

$\xi(t)$ и непрерывность функционала $V(s,\psi,y)$ по совокупности переменных, следует соотношение

$$\lim_{t\downarrow 0} E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right)\right), y(t)\right\} = V\left(s,\psi,y\right)$$

для всех $s \geq 0$, $\forall y \in Y$ и $\forall \psi \in C_n([-\tau,0])$.

Остается воспользоваться теоремой 2.1 из [2, с. 79] и леммой 2.2 из [2, с. 83], чтобы получить утверждение 3 теоремы 1.

Определение 5. Слабый инфинитезимальный оператор функционала $V: R_+ \times C_n[-\tau,0] \times Y \to R^1$ определяется [2], [11], [13] на решениях задачи (1), (2), если для всех $s \geq 0$, $y \in Y$ и $\forall \psi \in C_n([-\tau,0])$ найдется такое $\Delta > 0$, что существует

$$\sup_{0<t\leq\Delta} \frac{1}{t}\left| E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi(t)\right\} - V\left(s,\psi,\xi\right)\right| \leq K < \infty$$

равномерно по аргументам ψ и z некоторой окрестности точки (ψ,ξ), а также существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\left[E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi(t)\right\} - V\left(s,\psi,\xi\right)\right] \equiv (LV)\left(s,\psi,y\right) \qquad (17)$$

Пусть $\psi \in U_r(0) \subset C_n([-\tau,0])$ и $\tau_r \equiv \inf\{t \in R_+ \left| x(t+s,s,\psi,\xi)\right| > r\}$ – первый момент выхода случайного процесса $\left\{x\left(t+s,s,\psi,y\right)\right\}$ из области $U_r(0)$. Если это неравенство никогда не выполняется, то будем считать $\tau_r = \infty$. Ясно, что событие $\{\omega : \tau_r > t\}$, определяемое только значениями решения задачи (1), (2) момента времени t, является марковской случайной величиной [2].

Если обозначить $\tau_r(t) \equiv \min\{\tau_r, t\}$, то формулу Дынкина [2, ф. (5.8), с. 191] можно записать для этого случая в виде

$$\begin{aligned} &E\left\{V\left(s+\tau_r(t)\right), x_{s+\tau_r(t)}\left(s,\psi,y\right), \xi\left(\tau_r(t)\right)\right\} = \\ &= V\left(s,\psi,\xi\right) + E\left\{\int_0^{\tau_r(t)} (LV)\left(s+\tau, x_{s+\tau}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi(\tau)d\tau\right\} \end{aligned} \qquad (18)$$

для произвольного $V \in D(L)$ и $\forall t \geq s \geq 0$, $y \in Y$ и $\forall \psi \in U_r(0)$.

Лемма 1. Если непрерывный функционал $V: R_+ \times C([-\tau,0]) \times$ $\times Y \to R$ удовлетворяет условиям (13), (14), то слабый инфинитезимальный оператор L по определению 5 можно представить в виде трех операторов, действующих соответственно по первому, второму и третьему аргументам

$$LV = L_1 V + \tilde{L}_2 V + \tilde{L}_3 V, \qquad (19)$$

если функционал V находится в области определения каждого из этих операторов.

Доказательство. Для вычисления оператора L по формуле (17) используются только локальные характеристики процесса, который задает полугруппу $T(t)$, т.е. $x_{s+t}(s,\psi,y)$ и $\xi(t)=y$ по достаточно малым $t>0$. Поэтому оператор L полностью определяется правой частью ДСДФУ и слабым инфинитезимальным оператором $\tilde{L}_3$ марковского процесса $\xi(t)$.

Условия (13), (14) для всех $s\ge 0$, $\xi\in Y$ и $\forall\psi\in C_n([-\tau,0])$ гарантируют существование

$$\sup_{0<t\le\Delta}\frac{1}{t}\left|E\left\{V\left(s,\psi,\xi(t)\right)\right\}-V\left(s,\psi,y\right)\right|\le K<\infty,$$

$$\sup_{0<t\le\Delta}\frac{1}{t}\left|V\left(s,x_{t+s}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)-V\left(s,\psi,y\right)\right|\le K<\infty,$$

а также существование пределов

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}[E\left\{V\left(s,\psi,\xi(t)\right)\right\}-V\left(s,\psi,y\right)]\equiv\left(\tilde{L}_3V\right)\left(s,\psi,y\right), \qquad (20)$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left[V\left(s,x_{t+s}\left(s,\psi,y\right),y\right)-V\left(s,\psi,y\right)\right]\equiv(\tilde{L}_2V)\left(s,\psi,y\right), \qquad (20_{а})$$

$$\lim_{t\downarrow 0}\frac{1}{t}\left[V\left(s+t,\psi,y\right)-V\left(s,\psi,y\right)\right]\equiv\frac{\partial}{\partial t}V\left(s,\psi,y\right)\equiv(L_1V)(s,\psi,y) \quad (20_{б})$$

где предел (20) — оператор $\tilde{L}_3$, действующий на $V(s,\psi,y)$ по третьему аргументу как слабый инфинитезимальный оператор марковского процесса $\xi(t)$ [3]; предел ($20_{б}$) — это инфинитезимальный оператор на решениях ДСДФУ [4];

$$\left(\tilde{L}_2V\right)\left(s,\psi,y\right)=\left(\left(\nabla V\right)\left(s,\psi,y\right),a\left(s,\psi,y\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\mathbf{s}p\left(\left(\nabla^2V\left(s,\psi,y\right)\right),b\left(s,\psi,y\right)b^T\left(s,\psi,y\right)\right),$$

где ∇V — вектор, компоненты которого равны V_{φ_i}; ∇^2V — матрица размерности $n\times n$, составленная из вторых производных Фреше $V_{\varphi_i\varphi_j}$ [10]; $\mathbf{s}pA$ — след матрицы A; b^T — транспонированная матрица b. **Лемма 1 доказана**.

Определение 6. Оператор $(LV)(s,\psi,y)$ назовем слабым инфинитизимальным оператором Ляпунова (СИОЛ) на решении ДСДФУ, если функционал $V:R_+\times C([-\tau,0])\times Y$ непрерывен по переменных

s,ψ,y, ограничен на каждом множестве $[t_1,t_2]\times U_r(0)\times Y$ и выполняются условия определения 5.

Пусть $P\left\{\omega:\lim\limits_{r\to\infty}\tau_r(t)=t\right\}=1$ и существуют математические ожидания

$$E\left\{V\left(s+t,x_{s+t}\left(s,\psi,y\right)\right),\xi(t)\right\}<\infty$$

и

$$\sup_{0\le u\le t}E\left\{(LV)\left(s+u,x_{s+u}\left(s,\psi,y\right)\right),\xi(u)\right\}<\infty.$$

Это дает возможность перейти к пределу в формуле Дынкина (18), которая будет иметь вид

$$\begin{gathered}E\left\{V\left(s+t,x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\}=V\left(s,\psi,y\right)+\\+\int_0^t E\left\{\left(LV\right)\left(s+u,x_{s+u}\left(s,\psi,y\right),\xi(u)\right)\right\}du,\end{gathered}\tag{21}$$

где для вычисления LV используются только лишь локальные характеристики марковского процесса $\xi(t)$, а именно инфинитезимальный оператор $\tilde{L}_3$, и решения ДСДФУ, а именно оператор $\tilde{L}_2$ с (20_a).

Замечание 1. Если выполняется локальное условие Липшица L3) и условие (6), то формулу Дынкина (18) можно использовать только до марковского момента времени $\tau=\lim\limits_{r\to\infty}\tau_r$, поскольку нет гарантии существования решения задачи (1), (2) на полуинтервале $[s,\infty)$. Но если по некоторым переменным s,ψ,y с вероятностью 1 время $\tau=\infty$ и существуют соответствующие математические ожидания, тогда можно использовать формулу Дынкина (21) для всех $t>0$.

Определение 7. В условиях определения 6 верхней производной Ляпунова выражение

$$\lim_{\Delta\downarrow 0}\sup_{0<t\le\Delta}\frac{1}{t}\left[E\left\{V\left(s+t,x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\}-V\left(s,\psi,y\right)\right]\equiv(LV)(s,\psi,y),$$

если для всех достаточно малых $\Delta>0$ в каждой окрестности $U_r(0)\times Y$ выполняется неравенство

$$\frac{1}{\Delta}\left|E\left\{V\left(s+\Delta,x_{s+\Delta}\left(s,\psi,y\right),\xi(\Delta)\right)\right\}-V\left(s,\psi,y\right)\right|<g_r\left(s,\psi,y\right),\tag{22}$$

где $g_r\left(s,\psi,y\right)$ является непрерывной функцией своих аргументов, ограничена по второму аргументу ψ в каждой сфере $U_r(0)$.

Лемма 2. [2] Если выполняются условия леммы 1, то выполняется неравенство Дынкина

$$E\left\{V\left(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}\left(s,\psi,\xi(\tau_r(t))\right), \xi\left(\tau_r(t)\right)\right\} \leq$$

$$\leq V\left(s,\psi,y\right)+E\left\{\int_0^{\tau_r(t)} (LV)\left(s+u, x_{s+u}\left(s,\psi,y\right), \xi(u)\right) du\right\}. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим

$$V_\Delta\left(s,\psi,\xi\right) \equiv \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta E\left\{V\left(s+u, x_{s+u}\left(s,\psi,y\right), \xi(u)\right)\right\} du.$$

Поскольку Y — компакт [3, 11], а решение задачи (1), (2) за промежуток времени $u \leq \Delta$ при условии L1 и (6) не выходит из сферы $U_r(0)$ для некторого $r > 0$, то функционал V_Δ существует для $V(s,\psi,y)$, ограниченного на множестве вида $[s, s+\Delta] \times U_r(0) \times Y$. Но функционал $V_\Delta \in D(L)$ и

$$(LV_\Delta)\left(s,\psi,\xi\right) = \frac{1}{\Delta}\left[E\left\{V\left(s+\Delta, x_{s+\Delta}\left(s,\psi,y\right), \xi(\Delta)\right)\right\} - V\left(s,\psi,y\right)\right]$$

для всех $s \geq 0$, $y \in Y$ и $\forall \psi \in C_n([-\tau,0])$.

Таким образом,

$$E\left\{V\left(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi\left(\tau_r(t)\right)\right\} = V_\Delta\left(s,\psi,\xi\right)+$$

$$+E\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^{\tau_r(t)} \left[E\left\{V\left(s+\Delta+u, x_{s+\Delta+u}\left(s+u, x_{s+u}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi(\Delta+u) - \right.\right.\right.\right. \tag{24}$$

$$\left.\left. - V\left(s+u, x_{s+u}(s,\psi,y)\right), \xi(u)\right)\right] du\right\},$$

где $\tau_r(t)$ — первый момент выхода решения (1), (2) из $U_r(0)$. После перехода к пределу в (24) слева и справа по теореме Фубини получим неравенство (23). **Лемма 2 доказана.**

Определение 8. Если функционал $V: R_+ \times C_n([-\tau,0]) \times Y \to R^1$ непрерывный по всем аргументам и удовлетворяет условиям

$$c_1\left|\psi(0)\right|^{p_1} \leq V\left(s,\psi,y\right) \leq c_2\left\|\psi\right\|^{p_2} \tag{25}$$

для некоторых $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \geq p_1 > 0$ и всех $s \in R_+$, $\xi \in Y$ та $\psi \in C_n([-\tau,0])$, а также $V \in D(L)$ (або $V \in D(\tilde{L})$), то такой функционал назовем функционалом Ляпунова-Красовского.

Замечание 2. Неравенство (22) определения 7 может быть слишком жестким. В частности, этому неравенству не удовлетворяет простейший функционал $\tilde{V}(s,\psi,\xi) = \|\psi\|$. Тогда условие (22) можно ослабить. Используя полугрупповое свойство оператора $T(t)$, можно записать выражение

$$E\left\{V_\Delta\left(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi\left(\tau_r(t)\right)\right\} =$$

$$= E\left\{V_\Delta\left(s+s_1, x_{s+s_1}\left(s,\psi,y\right)\right), \xi(s_1)\right\} +$$

$$+E\left\{\frac{1}{\Delta}\int_0^{\tau_r(t)}\left[E\left\{V\left(s+s_1, x_{s+\Delta+u}\left(s+u, x_{s+u}\left(s,\psi,y\right)\right)\right), \xi\left(\Delta+u\right)\right\} - \right.\right. \tag{26}$$

$$\left.\left. -V\left(s+u, x_{s+u}(s,\psi,y), \xi(u)\right)\right]du\right\},$$

где $s_1 \in [-\tau, t_1]$, а момент времени t_1 выбран так, чтобы за это время решение не вышло из $U_r(0)$. Ясно, что должны выполняться условия, обеспечивающие существование такого t_1. Пусть также выполняются условия, гарантирующие выполнение оценки

$$\sup\left\{\left|a\left(u,\psi,y\right)\right| + \left|g\varphi\left(l^T x(t)\right)\right|\right\} = c_{1r} < \infty, \quad \sup\left|b\left(u,\psi,y\right)\right| = c_{2r} < \infty,$$

где верхняя грань определяется для всех $u \geq s$, $y \in Y$ и $\psi \in U_r(0)$.

Тогда для всех $u_1 \in [\tau, \tau_2)$, $u_2 \in [\tau, \tau_2)$ решение (1), (2) удовлетворяет условие Липшица

$$\left|x\left(s+u_1, s,\psi,y\right) - x\left(s+u_2, s,\psi,y\right)\right| \leq c_r \left|u_1 - u_2\right|.$$

Для того, чтобы перейти к пределу под знаком интеграла в (26), достаточно, чтобы выполнялось неравенство (22) только для тех $\psi \in U_r(0)$, которые удовлетворяют условию Липшица. Легко видеть, что этому условию Липшица функционал $\tilde{V}(s,\psi,\xi) = \|\psi\|$ удовлетворяет, причем

$$(\tilde{L}\tilde{V})(s,\psi,\xi) = \begin{cases} 0, & |\psi(0)| < \|\psi\|; \\ \max\left\{0, \dfrac{1}{|\psi(0)|}\psi^T(0) \times \right. & \\ +\left[a\left(s,\psi,\xi\right) + g\varphi\left(l^T x(t)\right)\right] + & \\ \left. +\dfrac{1}{|\psi(0)|}\left|b(s,\psi,\xi)\psi(0)\right|\right\}, & \psi \in S_0, \end{cases} \tag{27}$$

где $S_0 \equiv \left\{\psi \in C\left(\left[-\tau, 0\right]\right)\middle|, \|\psi\| = |\psi(0)|\right\}$.

Если $P\{\omega : \lim\limits_{r\to 0}\tau_r(t) = t\} = 1$, то имеет место неравенство

$$E\left\{\left\|x_{t+s}\left(s,\psi,y\right)\right\|\right\} \le$$

$$\le E\left\{\left\|x_{s+\tau}\left(s,\psi,y\right)\right\|\right\} + \int\limits_{\tau}^{t} E\left\{(\tilde{L}V)\left(s+u, x_{s+u}\left(s,\psi,y\right),\xi(u)\right)\right\}du,$$

которое вместе с (27) можно использовать для анализа решений (1), (2).

Необходимо также заметить, что в момент τ_r первого выхода решения из сферы $U_r(0)$ всегда выполняется равенство $\left|x\left(s+\tau_r,\psi,y\right)\right| = \left\|x_{s+\tau_r}\left(s,\psi,y\right)\right\|$, т.е. $x_{s+\tau_r} \in S_0$, а значит для всех $s \ge 0$, $y \in Y$ и $\forall\,\psi \in U_r(0)$

$$(\tilde{L}\tilde{V})\left(s+\tau_r, x_{s+\tau_r(t)}\left(s,\psi,y\right),\xi(\tau_r)\right) =$$

$$= \frac{1}{r}x^T\left(s+\tau_r,s,\psi,y\right)a\left(s+\tau_r, x_{s+\tau_r}\left(s,\psi,y\right),\xi(\tau_r)\right) +$$

$$+\frac{1}{r}\left|b\left(s+\tau_r, x_{s+\tau_r}\left(s,\psi,y\right),\xi(\tau_r)\right)x\left(s+\tau_r,s,\psi,y\right)\right|.$$

Полученные результаты позволяют исследовать устойчивость решений задачи (1), (2) по определениям 2, 3 и 4.

3. Общие теоремы Ляпунова об устойчивости

Вначале установим вспомогательные неравенства для решения задачи (1), (2).

Лемма 3. Если выполняются условия $L3$ и (4), то решение задачи (1), (2) допускает оценку для всех $T \ge 0$, $s \ge 0$, $y \in Y$ и $\psi \in C_n([-\tau,0])$

$$\sup_{-r\le t\le T}\left|x\left(t+s,s,\psi,y\right)\right| \le \left(\left\|\psi\right\| + \alpha K\cdot T\right)e^{K\cdot T}; \tag{28}$$

$$\sup_{t_1,t_2\in[s,s+T]}\left|x\left(t_2,s,\psi,y\right) - x\left(t_1,s,\psi,y\right)\right| \le$$
$$\le K\left[\left(\left\|\psi\right\| + \alpha K\cdot T\right)e^{K\cdot T} + \alpha\right]\cdot\left|t_1 - t_2\right|. \tag{29}$$

Доказательство. Условие L3 и (4) гарантируют существование и единственность решения задачи (1), (2) на полуинтервале $[s,\infty)$ [13]. Из условия (4) легко получить оценку

$$\sup_{-r\le t\le u}\left|x\left(t+s,s,\psi,y\right)\right| \le \left(\left\|\psi\right\| + K\left(\int\limits_{0}^{u}\sup_{-\tau\le s_1\le t}\left|x\left(s+s_1,s,\psi,y\right)\right|ds + \alpha T\right)\right),$$

откуда по лемме Гронуолла следует оценка (28).

Теперь, используя вторую строку (3) для произвольных $t_2 > t_1$ из отрезка $[s, s+t]$, получим

$$\left|x\left(t_2, s, \psi, y\right) - x\left(t_1, s, \psi, y\right)\right| \le K\left(\int_{t_1}^{t_2} \left\|x_t\left(s, \psi, y\right)\right\| + \alpha\right)dt \le$$

$$\le K\left[\left(\|\psi\| + \alpha K \cdot t\right)e^{KT} + \alpha\right](t_2 - t_1),$$

что и доказывает лемму 3. **Лемма 3 доказана.**

Отметим, что в случае $a(s,0,\xi) \equiv 0$, $b(s,0,\xi) = 0$, $\varphi(0) = 0$ формулы упрощаются за счет $\alpha = 0$.

Теорема 2. Пусть:

1) $a(s,0,\xi) \equiv 0$, $b(s,0,\xi) = 0$, $\varphi(0) = 0$;
2) выполняются условия L3 и (5);
3) существует функционал $V(s,\psi,y)$, для которого выполняется оценка (25)

$$c_1\left|\psi(0)\right|^{p_1} \le V\left(s,\psi,y\right) \le c_2\left\|\psi\right\|^{p_2}$$

для $c_1, c_2 > 0$, $p_2 \ge p_1 > 0$, всех $s \in R_+$, $y \in Y$, $\psi \in C_n\left(\left[-\tau, 0\right]\right)$ и для некоторых $c_3 > 0$ і $p \in (0, p_1]$ выполняется неравенство

$$(LV)\left(s,\psi,y\right) \le -c_3\left|\psi(0)\right|^p, \tag{30}$$

$$\forall s \ge 0,\ y \in Y \text{ та } \forall\, \psi \in C_n([-\tau, 0]).$$

Тогда тривиальное решение задачи (1), (2) асимптотически $p-$ устойчиво.

Доказательство. Поскольку $P\left\{\omega : \lim\limits_{r\to\infty}\tau_r(t) = t\right\} = 1$ для всех $t > 0$, то вместо $\tau_r(t)$ можно использовать t. В соответствии с формулами (24) и (28), для $t \ge \tau$ получим неравенство

$$c_1 E\left\{\left|x\left(t+s, s, \psi, y\right)\right|^{p_1}\right\} \le E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right), \xi(t)\right)\right\} \le$$

$$\le c_2 E\left\{\left\|x_{s+\tau}\left(s,\psi,y\right)\right\|^{p_2}\right\} - c_3\int_\tau^t E\left\{\left|x\left(s+u, s, \psi, y\right)\right|^p\right\}du \le$$

$$\le c_2\left\|\psi\right\|^{p_2} e^{p_2 kT} - c_3\int_\tau^t E\left\{\left|x\left(s+u, s, \psi, y\right)\right|^p\right\}du.$$

Отсюда следует p-устойчивость для $p \le p_1$ и сходимость интеграла для $t_0 \le s < \infty$

$$\int_s^\infty E\left\{\left|x\left(s+u,s,\psi,y\right)\right|^p\right\}du<\infty.$$

Таким образом, из сходимости интеграла следует стремление к нулю p-го момента решения задачи (1), (2), что и доказывает утверждение теоремы 2. **Теорема 2 доказана.**

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 с $p_2=p_1=p>0$, то тривиальное решение задачи (1), (2) глобально экспоненциально устойчиво.

Доказательство. Обозначим через $u(t)\equiv\left(T(t)V\right)\left(s,\psi,y\right)$ и перепишем формулу (23) для случая $\tau_r(t)=t$ і $t_2>t_1\geq\tau$ в виде

$$u(t_2)\leq u(t_1)-\int_{t_1}^{t_2}E\left\{(\tilde{L}V)\left(s+t,x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\}dt.$$

Если V удовлетворяет условиям теоремы 2, то из предыдущей формулы и очевидного неравенства

$$(\tilde{L}V)\left(s,\psi,y\right)\leq -c_3\left|\psi(0)\right|^p\leq-\frac{c_3}{c_1}V\left(s,\psi,y\right)$$

получим

$$u(t_2)-u(t_1)\leq-\frac{c_3}{c_1}\int_{t_1}^{t_2}u(t)dt.$$

Отсюда

$$E\left\{\left|x\left(s+t,s,\psi,y\right)\right|^p\right\}\leq\frac{1}{c_1}E\left\{V\left(s+t,x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\}\leq$$

$$\leq\frac{1}{c_1}e^{-\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)}E\left\{V\left(s+\tau,x_{s+\tau}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\}\leq\frac{c_2}{c_1}e^{-\frac{c_3}{c_1}(t-\tau)}\cdot e^{p_2Kh\|\psi\|^p}$$

для всех $\psi\in C_n([-\tau,0])$, $s\geq0$, $y\in Y$ и $t\geq\tau$. **Теорема 3 доказана.**

Теорема 4. Если выполняется локальное условие L3 Липшица, условие (7) и существует функционал Ляпунова-Красовского, удовлетворяющий условиям теоремы 2, то тривиальное решение задачи (1), (2) асимптотически стохастически устойчиво.

Доказательство. Пусть τ_r — момент первого выхода решения из сферы $U_r(0)$. Тогда для произвольных $t\geq0$ и $r>0$ из формулы (18) и определения функционала V очевидно выполняются неравенства

$$c_1E\left\{\left|x\left(s+\tau_r(t),s,\psi,y\right)\right|^p\right\}\leq$$

$$\leq E\left\{V\left(s+\tau_r(t), x_{s+\tau_r(t)}\left(s,\psi,y\right),\xi(\tau_r(t)\right)\right\} \leq$$

$$\leq V\left(s,\psi,y\right) \leq c_1\left\|\psi\right\|^p .$$

Поскольку $\lim_{r\to\infty}\tau_r(t)=t$, существует

$$E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\} < \infty$$

для всех $t\geq 0$, $\psi\in C_n([-\tau,0])$, $s\geq 0$, $y\in Y$. Пусть F_t — минимальная σ -алгебра, относительно которой измеримы все $\xi(s)$ для $s\in[0,t]$. Тогда $V(s+t,x_{s+t}(s,\psi,y),\xi(t))$ является F_t -измеримым, а марковское свойство для произвольного $u\in[0,t]$ дает

$$E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\varsigma,y\right),\xi(t)\right)\Big|_{F_u}\right\} =$$

$$= E\left\{V\left(s_1+\left(t-u\right), x_{s_1+(t-u)}\left(s,\varsigma,z\right),\xi\left(t-u\right)\right)\right\}\Bigg|_{\substack{s_1=s+u\\ z=y(u)\\ \varsigma=x_{s+u}(s,\psi,y)}} .$$

Поэтому из неравенства (30) получим

$$E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\Big|_{F_u}\right\} \leq E\left\{V\left(s+u, x_{s+u}\left(s,\psi,y\right),\xi(u)\right)\right\},$$

т.е. $\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right),F_t\right\}$ — неотрицательный супермартингал для $t\geq 0$ [1], [3]. Значит, существует предел

$$\lim_{t\to\infty}V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right) = \eta(\omega) \geq 0$$

с вероятностью 1. Из неравенств (25) и (30) можно получить оценки

$$E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\} \leq$$

$$\leq c_2\left\|\psi\right\|^p - c_3\int_0^t E\left\{\left|x\left(s+s_1,s,\psi,y\right)\right|^p\right\}ds_1 \leq$$

$$\leq c_2\left\|\psi\right\|^p - \frac{c_3}{c_1}\int_0^t E\left\{V\left(s+s_1, x_{s+s_1}\left(s,\psi,y\right),\xi(s_1)\right)\right\}ds_1,$$

то есть

$$E\left\{\eta(\omega)\right\} = \lim_{t\to\infty}E\left\{V\left(s+t, x_{s+t}\left(s,\psi,y\right),\xi(t)\right)\right\} \leq c_2\left\|\psi\right\|^p \lim_{t\to\infty}e^{-\frac{c_3}{c_1}t} = 0$$

и отсюда $P\{\omega : \eta(\omega) = 0\} = 1$.

Теперь, учитывая основное неравенство для супермартингалов [4], получим

$$P\left\{\omega : \sup_{t \ge T} \left| x\left(s+t, s, \psi, y\right) \right| \ge \varepsilon \right\}$$

$$\le P\left\{\omega : \sup_{t \ge T} \frac{1}{T} V\left(s+t, x_{s+t}\left(s, \psi, y\right), \xi(t)\right) \ge \varepsilon^p \right\} \le$$

$$\le \frac{1}{c_1 \varepsilon^p} E\left\{V\left(s+T, x_{s+T}\left(s, \psi, y\right), \xi(T)\right)\right\} \le \frac{c_2 \|\psi\|^p}{c_1 \varepsilon^p} e^{-\frac{c_3}{c_1} \cdot T}$$

для всех $T > 0$, $\varepsilon > 0$, $\psi \in C_n([-\tau, 0])$, $s \ge 0$, $y \in Y$.

Остается рассмотреть предел при $T \to \infty$ и теорема 4 доказана.

4. Модельная задача 1. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом автономных линейных стохастических систем автоматического регулирования с марковскими параметрами

Полученые теоретические результаты имеют место для линейных стохастических дифференциальных уравнений автоматического регулирования диффузионного типа с марковскими параметрами вида [15]

$$dx(t) = \left[A\left(\xi(t)\right) x(t) + g\varphi(\sigma) \right] dt + B\left(\xi(t)\right) x(t) dw(t), \tag{31}$$

с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0$$

где матрицы $A(y), B(y) \in M_{n \times n}(R^n)$, элементами которых являются действительные числа при каждом $\xi(t) \in Y$, а $\xi(t)$ — однородный марковский процесс с конечным числом состояний $Y = \left\{y^1, y^2, \ldots, y^n\right\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$P(\tau) \equiv \left\{ P\left\{\xi + \tau\right\} = y^j \mid \xi(t) = y^i \right\} = e^{\pi\tau}, \tag{32}$$

$\pi = [\alpha_{ij}]$ с условиями

$$\alpha_{ij} \ge 0;\ i \ne j;\ \alpha_{ii} = -\sum_{i \ne j} \alpha_{ij} \quad (*)$$

Пусть детерминированная система автоматического регулирования при каждом фиксированном $\xi(t) = y^i \in Y$ [17]

$$dx(t) = \left[A(y^i) x(t) + g\varphi(\sigma) \right] dt \tag{33}$$

имеет одно состояние равновесия, причем A и $A + kgl^T$ — гурвицевы матрицы.

Для получения условий устойчивости следует взять стохастический функционал Ляпунова-Красовского

$$v\left(x,y^{i}\right)=x^{T}H\left(y^{i}\right)x+\chi\int\limits_{0}^{\sigma(x)}\varphi(z)dz \tag{34}$$

где симметричная положительно определенная матрица $H(y^{i})$ есть решением матричного уравнения Сильвестра при каждом фиксированном $\xi(t)=y^{i}\in Y$

$$A^{T}\left(y^{i}\right)H+HA\left(y^{i}\right)+B^{T}\left(y^{i}\right)HB\left(y^{i}\right)=-G \tag{35}$$

где G произвольная положительно определенная матрица.

Тогда СИОЛ $Lv(x,y^{i})$ имеет вид [16; 17] при каждом фиксированном $\xi(t)=y^{i}\in Y$

$$\begin{gathered}Lv\left(x,y^{i}\right)=x^{T}\left[A^{T}\left(y^{i}\right)H+HA\left(y^{i}\right)+B^{T}\left(y^{i}\right)HB\left(y^{i}\right)\right]x+\\+\varphi(\sigma)\left[g^{T}H+\chi l^{T}A\left(y^{i}\right)\right]x+x^{T}Hg\varphi(\sigma)+\\+\frac{1}{2}\chi\varphi(\sigma)x^{T}B^{T}\left(y^{i}\right)ll^{T}B\left(y^{i}\right)x+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}v\left(x,y^{j}\right).\end{gathered} \tag{36}$$

Поскольку $\sigma\equiv l^{T}x(t),\ t\geq t_{0}\geq 0$, нелинейная дифференцированная функция, которая удовлетворяет условие

$$\left(k\sigma-\varphi(\sigma)\right)\varphi(\sigma)>0,\ k>0,\ \varphi(0)=0,\ \varphi(\sigma)\geq 0. \tag{37}$$

Поскольку условие (37) дает неравенство

$$l^{T}x\varphi(\sigma)-\frac{\varphi^{2}(\sigma)}{k}>0, \tag{38}$$

тогда

$$\begin{gathered}Lv\left(x,y^{i},\sigma\right)\leq x^{T}\left[A^{T}\left(y^{i}\right)H\left(y^{i}\right)+H\left(y^{i}\right)A\left(y^{i}\right)+\right.\\\left.+B^{T}\left(y^{i}\right)H\left(y^{i}\right)B\left(y^{i}\right)+\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}H\left(y^{i}\right)\right]x+\\+\varphi^{T}(\sigma)\left[g^{T}H\left(y^{i}\right)+\frac{1}{2}\chi l^{T}A\left(y^{i}\right)+\frac{1}{2}l^{T}\right]x+\\+\varphi(\sigma)\left[H\left(y^{i}\right)g+\frac{1}{2}\chi A^{T}\left(y^{i}\right)l+\frac{1}{2}l\right]x^{T}+\varphi^{T}(\sigma)\left[\chi l^{T}g-\frac{1}{k}\right]\varphi(\sigma)\\+\frac{1}{2}\chi\varphi(\sigma)x^{T}B^{T}\left(y^{i}\right)ll^{T}B\left(y^{i}\right)x+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}v\left(x,y^{j}\right)\chi\int\limits_{0}^{\sigma(x)}\varphi(z)dz\ .\end{gathered}$$

Последнее неравенство запишем в векторно-матричной форме [17]

$$Lv\left(x, y^i\right) \le -\tilde{x}^T \tilde{C}\tilde{x} + \chi \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v\left(x, y^j\right) \int_0^{\sigma(x)} \varphi(z)dz \tag{39}$$

где $\tilde{x}^T \equiv \tilde{x}^T(t) \equiv \left(x(t), \phi, \sqrt{\varphi}x(t)\right)^T$; $\tilde{C} \equiv C\left(y^i\right)$; $\chi < 0$; $A \equiv A\left(y^i\right)$; $H \equiv H\left(y^i\right)$; $B \equiv B\left(y^i\right)$;

$$\tilde{C} \equiv \begin{bmatrix} A^T H + HA + B^T HB & Hg + \frac{1}{2}\chi A^T l + \frac{1}{2} l & 0_{n\times n} \\ (Hg + \frac{1}{2}\chi A^T l + \frac{1}{2} l)^T & \chi l^T g - \frac{1}{k} & 0_{1\times n} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} & \frac{1}{2}\chi B^T l l^T B \end{bmatrix} \tag{40}$$

СИОЛ $Lv\left(x, y^i, \sigma\right) < 0$ на решениях (1), (2) тогда и только тогда, когда симметричная матрица $\Delta \equiv A^T H + HA + B^T HB$ отрицательно определена, а блочная симметрическая матрица $\tilde{C}$ неположительно определена (обозначать будем $\tilde{C} \le 0$).

1. Матрица Δ отрицательно определена тогда и только тогда, когда матрица $H \equiv H\left(y^i\right)$ есть решением матричного уравнения Сильвестра (35), где в качестве *G* может быть взята единичная матрица *I*.

2. Матрица $\tilde{C}$ (40) неположительно определена лишь в случае неположительной определенности матриц-блоков, которые стоят на ее главной диагонали, а именно: матрица $\frac{1}{2}\chi B^T l l^T B$ неположительно определена тогда и только тогда, когда число $\chi < 0$; число $\chi l^T g - \frac{1}{k} < 0$, что эквивалентно условию

$$l^T g > 0 . \tag{41}$$

Таким образом, для неположительной определенности блочной матрицы $\tilde{C}$ (40) при условиях $\chi < 0$, (35) и (41) требуется также неположительная определенность следующей матрицы

$$\tilde{C}_1 \equiv \begin{bmatrix} -G & Hg + \frac{1}{2}\chi A^T l + \frac{1}{2} l \\ \left(Hg + \frac{1}{2}\chi A^T l + \frac{1}{2} l\right)^T & \chi l^T g - \frac{1}{k} \end{bmatrix} \le 0_{(n+1)\times(n+1)} . \tag{42}$$

Требование (41) фактически означает гурвицевость матрицы $A+kgl^T$, которая характеризирует экспоненциальную устойчивость матрицы А [18].

3. Запишем условия положительной определенности функционала Ляпунова-Красовского (35) на линейной характеристике гурвицевого угла $\varphi(\sigma)=k\sigma$:

$$v\big|_{\varphi(\sigma)=\sigma} = x^T Hx + \chi\int_0^\sigma kydy = x^T Hx + \frac{1}{2}\chi kz^2\Big|_{z=0}^{z=l^T x} =$$

$$= x^T\left(H + \frac{1}{2}\chi kll^T\right)x > 0$$

откуда и получаем положительнуя определенность матрицы

$$H+\frac{1}{2}\chi kll^T > 0_{(n+1)\times(n+1)}.$$

Домножим это неравенство слева на l^T и справа на l, получим эквивалентное скалярное неравенство

$$l^T Hl+\frac{1}{2}\chi k\left(l^T l\right)^2 > 0,$$

откуда

$$-\frac{2l^T Hl}{k\left(l^T l\right)^2} < \chi < 0. \tag{43}$$

4. Согласно пункту 3) второе слагаемое в (39) для Lv $\chi\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\int_0^{\sigma(x)}\varphi(z)dz$ на линейной характеристике гурвицевого угла $\varphi(\sigma)=k\sigma$ отрицательна в силу отрицательности $\chi<0$, а матрица

$$\sum_{j=1}^{k}\alpha_{ij}\frac{1}{2}\chi kll^T > 0. \tag{44}$$

5. Таким образом, условие отрицательной определенности $Lv<0$ требует отрицательною определенность матрицы $A^T H+HA+B^T HB=-I$ (35) и выполнения неравенства

$$\det\tilde{C}_1 < 0. \tag{45}$$

Раскрываем этот определитель по последнему столбцу:

$$\left[Hg+\frac{1}{2}\left(\chi A^T l+I\right)+\frac{1}{2}l\right]^T\left(A^T H+HA+B^T HB\right)^{-1}\times$$
$$\times\left[Hg+\frac{1}{2}\left(\chi A^T l+I\right)+\frac{1}{2}l\right] < \chi l^T g-\frac{1}{k}. \tag{46}$$

Таким образом выполняются все условия теоремы 2 про асимптотическую p-устойчивость. При p=2 имеем асимптотическую устойчивость в среднем квадратическом.

Теорема 5. (критерий асимптотической устойчивости в l.i.m. тривиального решения (31)).

Пусть выполняются условия:

1) существует положительное решение $H(y^i)$ матричного уравнения (35) при $G = I$;
2) матрицы $A(y^i)$ и $A(y^i) + kgl^T$ — гурвицевы; $l^T g > 0$; при каждой реализации $\xi(t) = y^i$, $i = \overline{1,k}$;
3) выполняется матричное неравенство (42) с выбором $\chi < 0$ при условии (43);
4) выполняются неравенства (44) и (46).

Тогда положение равновесия $x(t) \equiv 0$ стохастической динамической системы (31) с начальным условием $x\left(t_0\right) = x_0$ асимптотически устойчиво в среднем квадратическом.

Модельная задача 2. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом автономных стохастических дифференциально-разностных систем Лурье-Постникова автоматического регулирования с марковскими возмущениями (АСДРСсМВ)

На вероятностном базисе $(\Omega, F.F \equiv \{F_t, t \geq t_0\}, P)$ задано сильное решение $x(t) \equiv x(t,\omega) : [t_0, \infty) \times \Omega \to R^n$ (АСДРСсМВ)

$$\begin{aligned} dx(t) &= \left[A\left(\xi(t)\right)x(t) + A_1\left(\xi(t)\right)x\left(t-\tau\right) + g\varphi(\sigma)\right]dt + \\ &+ \left[B\left(\xi(t)\right)x(t) + B_1\left(\xi(t)\right)x\left(t-\tau\right)\right]dw(t), \quad \forall t \geq t_0, \ \tau > 0 \end{aligned} \tag{47}$$

с начальными условиями

$$x(t) = x_0, \quad -\tau \leq t \leq 0, \ \tau > 0 . \tag{48}$$

где матрицы $A(y)$, $A_1(y)$, $B(y)$, $B_1(y) \in M_{n\times n}(R^n)$, элементами которых являются действительные числа при каждом $\xi(t) \in Y$, а $\xi(t)$ - однородный марковский процесс с конечным числом состояний $Y = \left\{y^1, y^2, \dots, y^n\right\}$ и матрицей переходных вероятностей (32) с условиями (*).

Пусть детерминированная система автоматического регулирования при каждом фиксированном $\xi(t) = y^i \in Y$

$$dx(t) = \left[A\left(\xi(t)\right)x(t) + A_1\left(\xi(t)\right)x\left(t-\tau\right) + g\varphi(\sigma)\right]dt \tag{49}$$

имеет одно состояние равновесия, причем A и $A+kgl^T$ — гурвицевы матрицы.

Для исследования устойчивости в l.i.m. выбираем функционал Ляпунова-Красовского вида [19]

$$v\left(x_t, y^i\right) = x^T H\left(y^i\right) + \\ +\gamma \int\limits_{t-\tau}^{t} x^T(\theta) H\left(y^i\right) x(\theta) d\theta + \chi \int\limits_{0}^{\sigma(x)} \varphi(z) dz; \quad -\tau \le \theta \le 0 \tag{50}$$

где симметричная положительно определенная матрица $H(y^i)$ есть решением матричного уравнения Сильвестра

$$A^T\left(y^i\right)H + HA\left(y^i\right) + \gamma H + B^T\left(y^i\right)HB\left(y^i\right) = -G \tag{51}$$

при каждом фиксированном $\xi(t) = y^i \in Y$.

Используя леммы 1 и 2 [19, с. 426], вычислим СИО L от функционала Ляпунова-Красовского (50):

$$\begin{gathered}(LV)(x, y^i) = \left[A\left(y^i\right)x(t) + A_1\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right)\right]^T H\left(y^i\right)x(t) + \\ +x^T H\left(y^i\right)\left[A\left(y^i\right)x(t) + A_1\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right)\right] + \\ +\left[B\left(y^i\right)x(t) + B_1\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right)\right]^T H(y^i) \times \left[B\left(y^i\right)x(t) + B_1\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right)\right] + \\ +\varphi(\sigma)\left[g^T H\left(y^i\right) + \frac{1}{2}\chi \cdot \ell^T A\left(y^i\right)\right]x(t) + \\ +\varphi(\sigma)\left[g^T H\left(y^i\right) + \frac{1}{2}\chi \ell^T A_1\left(y^i\right)\right]x\left(t-\tau\right) + \\ +\varphi(\sigma)x^T(t)\left[H\left(y^i\right)g + \frac{1}{2}\chi A^T\left(y^i\right)\ell\right] + \\ +\varphi(\sigma)x^T\left(t-\tau\right)\left[H\left(y^i\right)g + \frac{1}{2}\chi A_1^T\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right)\right] + \\ +\chi\varphi(\sigma)\ell^T g\varphi(\sigma) + \frac{1}{2}\chi\varphi(\sigma)\left[B^T\left(y^i\right)\ell\ell^T B\left(y^i\right)x(t) + \right. \\ \left. +B_1\left(y^i\right)\ell\ell^T B_1\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right)\right] + \\ +\gamma x^T(t)H\left(y^i\right)x(t) - \gamma x^T\left(t-\tau\right)H\left(y^i\right)x\left(t-\tau\right),\end{gathered} \tag{52}$$

Рассмотрим правую часть равенства (52) как квадратическую форму физических переменных $\{x(t)\}\subset\mathbb{R}^n$, $\{x(t-\tau)\}\subset\mathbb{R}^n$ и фиктивных фазових переменных $\{\varphi(\sigma)\}$, $\left\{\sqrt{\varphi(\sigma)}x(t)\right\}$, $\left\{\sqrt{\varphi(\sigma)}x\left(t-\tau_i\right)\right\}$.

Итак, запишем равенство (52) у векторно-матричном виде:

$$\left(LV\right)\left(x,y^i\right)=\tilde{x}^T S(H)\tilde{x}(t), \tag{53}$$

где $\tilde{x}^T(t)=\left(x(t),x\left(t-\tau\right)\right),\varphi(\sigma),\sqrt{\varphi(\sigma)}x(t),\sqrt{\varphi(\sigma)}x\left(t-\tau\right)^T$, $S\equiv S\left(y^i\right)$, $A\equiv A\left(y^i\right)$; $A_1\equiv A_1\left(y^i\right)$; $B\equiv B\left(y^i\right)$, $B_1\equiv B_1\left(y^i\right)$; $H\equiv H\left(y^i\right)$.

$$S(H)=\begin{bmatrix} S_{11}(H) & S_{12}(H) & S_{13}(H) & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1}\\ S_{21}(H) & S_{22}(H) & S_{23}(H) & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1}\\ S_{31}(H) & S_{32}(H) & S_{33}(H) & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & S_{44}(H) & S_{45}(H) & 0_{n\times 1}\\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & S_{54}(H) & S_{55}(H) & 0_{n\times 1}\\ 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & S_{66}(H) \end{bmatrix} \tag{53}$$

с соответственными элементами

$$\left.\begin{array}{c} S_{11}=A^TH+HA+\gamma H+B^THB;\\ S_{12}=HA_1+B^THB_1;\ S_{21}=A_1^TH+B_1^THB;\\ S_{22}=-\phi H+B_1^THB_1;\ S_{33}=\chi\cdot\ell^T\cdot g\\ S_{44}=\dfrac{1}{2}\chi B^T\ell\ell^TB;\ S_{55}=\dfrac{1}{2}\chi B_1^T\ell\ell^TB_1;\\ S_{66}=\chi E;\ S_{31}=g^TH+\dfrac{1}{2}\chi\ell^TA;\\ S_{13}=Hg+\dfrac{1}{2}\chi A^T\ell;\ S_{45}=\dfrac{1}{4}\ell\ell^TBB_1;\\ S_{54}=\dfrac{1}{4}BB_1\ell^T\ell;\\ S_{ij}=0_{n\times n};\ i\neq j;\ i=1,2,3;\ j=4,5;\\ S_{ij}=0_{n\times n};\ i\neq j;\ i=4,5;\ j=1,2,3. \end{array}\right\} \tag{54}$$

СИО $(LV)(x,y^i)$ отрицательный на решениях $\left\{x(t)\equiv x\left(t,\omega\right)\right\}\subset\mathbb{R}^n$ (АСДРСсМВ) (47), (48) тогда и только тогда, когда S_{11} отрицательно определенная:

$$S_{11}<0_{n\times n}, \tag{55}$$

а блочная матрица $S(H)$ неположительно определенная, то есть

$$S(H) \le 0_{(5n+1)(5n+1)} . \qquad (56)$$

Условие (56) выполняется, если положительно определененные матрицы-блоки, которые стоят на ее главной диагонали. Исследуем диагональные матрицы.

Матрица $S_{11} < 0_{n\times n}$ тогда и только тогда, когда положительно определенная матрица $H > 0$ есть решениям обобщенного алгебраического матричного уравнения Сильвестра (51) [18] , которое эквивалентно матричному уравнению

$$\left(A + \frac{1}{2}\gamma E\right)^T H + H\left(A + \frac{1}{2}\gamma E\right) + B^T HB = -G , \qquad (57)$$

где $G = G^T > 0$ – произвольная случайная положительно определенная матрица.

Согласно исследованиям ([34], С. 80-98) решение H матричного уравнения (51) существует, если $\gamma > 0$. А для этого необходимо и достаточно, чтоб матрица A была экспоненциально устойчивой с показателем экспоненты $\beta > 0$, то есть

$$0 < \gamma < 2\beta . \qquad (58)$$

Покажем, что $\beta \ge h\ell^T g$.

Матрицы $S_{44} = \frac{1}{2}\chi B^T \ell\ell^T B$ и $S_{55} = \frac{1}{2}\chi B_1^T \ell\ell^T B_1$ неположительно определенные тогда и только тогда, когда число $\chi < 0$.

Дальше, если $\chi < 0$, то число $S_{33} = \chi \cdot \ell^T \cdot g < 0$ тогда и только тогда, когда коэфициенты обратной связи, то есть вектори l и g , удовлетворяют условию

$$\ell^T g > 0 . \qquad (60)$$

Таким образом, для отрицательно определенной блочной матрицы $S(H)$ на физических переменных $\{x(t)\}$ и $\left\{x\left(t-T\right)\right\}$ кроме условий $0 < \gamma < 2\beta$, $\chi < 0$, (60) и существования положительно определенного матричного решения $\mathrm{H} > 0$ обобщенного уравнения (51) нужно, чтоб матрица $S_1(H)$ была неположительно определенной, то есть

$$S_1(H) \le 0_{n\times n} , \qquad (61)$$

что и имеем с матрицы S , если вместо S_{11} поставим $-Q$.

Условие $\ell^T g > 0$ значит то, что матрица $A + h\ell^T g$ должна быть не просто экспоненциально устойчивой с показателем $\beta > 0$, но и экспоненциально устойчивой с показателем $\beta > 0$ не меньше, чем число $h\ell^T g$.

Вычислим нижнюю оценку для отрицательного числа $\chi < 0$. Для этого рассмотрим значение функционала $V(x, y^i)$ на линейной характеристике гурвицевого угла $\varphi(\sigma) = h\sigma$. Если использовать теорему Лагранжа о среднем значении и ввести для этого $\theta^* \in [t, t-T]$, будем иметь

$$\begin{aligned} V\left(x, y^i\right) &= x^T(t)Hx(t) + \gamma \int\limits_{t-T}^{t} x^T\left(\theta^*\right)Hx\left(\theta^*\right)d\theta^* + \chi\int\limits_0^{\sigma} hydy = \\ &= x^T(t)Hx(t) + \gamma\tau x^T\left(\theta^*\right)Hx\left(\theta^*\right) + \frac{1}{2}\chi h x^T(t)\ell\cdot\ell^T x(t) = \\ &= x^T(t)\left(H + \frac{1}{2}\chi h\ell\ell^T\right)x(t) + \gamma\tau x^T\left(\theta^*\right)Hx\left(\theta^*\right) = \\ &= \begin{bmatrix} x(t) \\ x\left(\theta^*\right) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} H + \frac{1}{2}\chi h\ell\ell^T & 0_{n\times n} \\ 0_{n\times n} & \varphi\tau H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x\left(\theta^*\right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{62}$$

Для $\chi < 0$ функционал (50) положительный, если положительно определенная матрица

$$H + \frac{1}{2}\chi h\ell\ell^T > 0_{n\times n}. \tag{63}$$

С этого матричного неравенства после умноження на ℓ^T и справа на ℓ получим скалярное неравенство

$$\ell^T H\ell + \frac{1}{2}\chi h\left(\ell^T\ell\right)^2 > 0. \tag{64}$$

С неравенства (64) запишем оценку для нижней границы числа $\chi < 0$, то есть

$$-\frac{2\ell^T H\ell}{h\left(\ell^T\ell\right)^2} < \chi < 0, \tag{65}$$

где $H > 0$ решение обобщенного уравнения Сильвестра (51).

Отметим, что оценка нижней границы для $\chi < 0$ (65) не является достаточной для выполнения матричного неравенства (63), а только необходимой. По-этому оценка (65) есть приближенным ориентиром для вибора χ ([18], лемма 3, с. 172—173).

Величина $-\dfrac{2}{h\ell^T H^{-1}\ell}$ есть нижней границей числа $\chi < 0$, которую невозможно улучшить.

Это значит, что искомое число χ в функционале (50) берется с интервала

$$-\frac{2}{h\ell^T H^{-1}\ell} < \chi < 0\,. \qquad (66)$$

Отметим, что неравенство (65) совпадает с неравенством (66) тогда, когда вектор параметров обратной связи l есть собственным вектором матрицы $H > 0$ — решения обобщенного уравнения Сильвестра (51).

Таким образом, в результате анализа матрицы S получим следуючее утверждение:

Теорема 6. (Критерий абсолютной устойчивости для АСД-РСсМВ (47)).

Положение равновесия (тривиальное решение $x(t) \equiv 0$) стохастической динамической системы (47), (48) абсолютно асимптотически устойчиво в середнем квадратическом, если выполняются следующие условия:

1) матрица A — экспоненциально устойчивая с показателем экспоненты $\beta > 0$;
2) матрица $A + A_1 + hg\ell^T$ — гурвицева;
3) векторы параметров обратной связи l и g удовлетворяют неравенство $0 < h\ell^T g \le \beta$;
4) существует положительно определенное решение $H > 0$ обобщенного матричного уравнения Сильвестра (51), в котором положительное число γ берется с интервала $0 < \gamma < 2\beta$ так, чтоб оно было около числа 2β ($\gamma \to 2\beta$);
5) виполняется неравенство (61) , то есть

$$S_1 \equiv \begin{bmatrix} -G & S_{12} & S_{13} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times 1} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & S_{44} & S_{45} & 0_{n\times 1} \\ 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & S_{54} & S_{55} & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & 0_{1\times n} & S_{66} \end{bmatrix} \le 0\,, \qquad (67)$$

где $G = G^T > 0$ положительно определенная матрица;

6) параметр $\chi < 0$ вычисляется с условия (65).

Замечание 1. Если случайные возмущения отсутствуют в стохастическом дифференциально — разностном уравнении (47), то есть $B = B_1 = 0_{n\times n}$, то легко можно получить критерий абсолютной с запозданием и нелинейностью устойчивость для детерминированной системы автоматического регулирования с запаздыванием [19]:

$$dy(t) = Ay(t) + A_1 y\left(t - \tau\right) + g\varphi(\sigma) .$$

Список использованной литературы:

1. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1982. — 612 с.
2. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
3. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
4. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 497 с.
5. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. — 222 с.
6. Колмановский В. Б. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием / В. Б. Колмановский, В. Р. Носов. — М. : Наука, 1981. — 448 с.
7. Королюк В. С. Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями / В. С. Королюк // Укр. мат. журн. — 1991. — № 9. — С. 1176—1181.
8. Королюк В. С. Курс теорії ймовірностей, випадкових процесів та математичної статистики / В. С. Королюк, В. К. Ясинський. — К. : ТВіМС, 2005. — 526 с.
9. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 328 с.
10. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. — М. : ИЛ, 1962. — 829 с.
11. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 1989. — 421 с.
12. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. — 328 с.
13. Королюк В. С. Ймовірність. Статистика. Випадкові процеси : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т.3: Випадкові процеси. Комп'ютерний практикум. — 798 с.
14. Grossman S. E. Asymptotic Behavior and Exponential Stability Criteria for Differential delay Equations / S. E. Grossman, I. A. Yorke // I. Differen. Equent. — 1972. — № 2. — P. 236—253.
15. Понин Л. Л. Об устойчивости решений стохастических дифференциально-разностных уравнений / Л. Л. Понин, Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский // Сб. исследований по теории дифференциальных и разностных уравнений. — Рига : ЛГУ им. П. Стучки, 1974. — С. 29—73.
16. Царьков Е. Ф. Структура производящего оператора полугруппы ковариационных операторов решения стохастических функционально-дифферен-

циальных уравнений / Е. Ф. Царьков // Латвийский математический ежегодник. — Рига : Зинатне, 1972. — Т. 21. — С. 99—107.
17. Ясинський В. К. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський. — К. : Вид-во «ТВиМС», 2005. — 580 с.
18. Кореневский Д. Г. Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии / Д. Г. Кореневский. — К. : Наук. думка, 1989. — 208 с.
19. Свердан М. Л. Стохастичні динамічні системи із скінченною післядією / М. Л. Свердан, Э. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Зелена Буковина, 2000. — 560 с.

The second method of Lyapunov was justified for stochastic diffusion of automatic control systems with delay and Markov parameters, which is a generalization of similarresults for stochastic diffusion equations with delay [5].

Key words: *the automatic regulation, the Wiener perturbations, the "nondirect" regulations , the Poisson perturbations, the absolute firmness.*

Отримано: 14.04.2011