УДК 517.5

В. А. Сорич, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Н. М. Сорич, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ЛІНІЙНИХ КОМБІНАЦІЙ ФУНКЦІЙ ТА ЇХ ПОХІДНИХ В СЕНСІ О. І. СТЕПАНЦЯ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ПОЛІНОМАМИ З ПАРНИМ ЧИСЛОМ ВУЗЛІВ НА ПЕРІОДІ

Одержано асимптотичні рівності для величини сумісного наближення лінійних комбінацій диференційовних в сенсі О. І. Степанця функцій інтерполяційними многочленами.

Ключові слова: *інтерполяційний тригонометричний поліном, вузли інтерполяції, модифіковане ядро Діріхле.*

Вступ. Поряд із сумами Фур'є, в якості агрегатів, що використовуються в теорії наближення, розглядають всеможливі тригонометричні поліноми. Це викликано тим, що іноді суми Фур'є даної функції збігаються до неї дуже повільно, а іноді взагалі розбіжні, навіть якщо наближаюча функція є неперервною. Вказаний фактор заставляє шукати підходи побудови послідовності наближаючих поліномів, які б рівномірно збігалися на всьому просторі C неперервних функцій. При цьому швидкість збіжності того чи іншого методу наближення до наближаючої функції переважно пов'язана із її гладкістю (запасом диференційовності). Спроба знайти підходи до апроксимації функції не пов'язані із гладкістю останньої, а лише із її значеннями в окремих точках привела до розгляду інтерполяційних тригонометричних многочленів. Неоцінимий внесок в розвиток теорії інтерполяції функцій вніс академік С. М. Нікольський.

Постановка задачі. Нехай $\psi = \psi(k)$ — довільна фіксована послідовність дійсних чисел така, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \psi(k) \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{1}$$

де $\psi \in R$, є рядом Фур'є деякої сумовної функції $\Psi(t)$. Тоді множину функцій $f(x)$, для кожної з яких майже скрізь виконується рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x-t)\Psi(t)\,dt, \tag{2}$$

позначимо через L_{β}^{ψ} (див., напр., [1, с. 131—137]). При цьому функцію φ називають (ψ,β)-похідною функції f і позначають через $f_{\beta}^{\psi}(x)$, а функцію $f(x)$ — (ψ,β)-інтегралом функції φ та позначають через $I_{\beta}^{\psi}(\varphi;x)$. Якщо $f\in L_{\beta}^{\psi}$ і, крім того, $f_{\beta}^{\psi}\in\mathfrak{N}$, де $\mathfrak{N}$ — деяка підмножина з $L^{0}=\{f: f\in L, f\perp 1\}$, то записують, що $f\in L_{\beta}^{\psi}\mathfrak{N}$. Крім того, вважають $C_{\beta}^{\psi}=C\cap L_{\beta}^{\psi}$, $C_{\beta,\infty}^{\psi}=C_{\beta}^{\psi}U_{\infty}^{0}$, $L_{\beta,1}^{\psi}=L_{\beta}^{\psi}U_{1}^{0}$, де $U_{p}^{0}=\left\{f\in L_{p}:\|f\|_{p}\le 1, f\perp 1\right\}$, $p=1,\infty$.

Нехай, далі, $\psi_1(k),\psi_2(k)$ — довільні послідовності дійсних чисел, $\psi_1(0)=1$. В роботі [2] показано, що при виконанні умови $\overline{\psi}(k)=\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}\neq 0, k\in N$ та існуванні деякої функції $\Psi(x)$, для якої ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\psi_1(k)\cos kx+\psi_2(k)\sin kx \tag{3}$$

є її рядом Фур'є, тоді для кожної функції $f\in L^{\overline{\psi}}$ майже скрізь виконується рівність

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Psi(t)\,dt \overset{def}{=} \frac{a_0}{2}+\left(f^{\overline{\psi}}*\Psi\right)(x), \tag{4}$$

в якій $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$ — ($\overline{\psi}$-похідна функції f ($\overline{\psi}$-похідна співпадає із (ψ,β)-похідною, якщо $\dfrac{\psi_1(k)}{\overline{\psi}(k)}=\cos\dfrac{\beta\pi}{2}$, $\dfrac{\psi_2(k)}{\overline{\psi}(k)}=\sin\dfrac{\beta\pi}{2}$).

Нехай пари $\overline{\psi}=(\psi_1(k);\psi_2(k))$, $\overline{\varphi}=(\varphi_1(k);\varphi_2(k))$ — пари довільних послідовностей дійсних чисел. Будемо говорити, що пара $\overline{\varphi}$ L-передує парі $\overline{\psi}$, якщо $L^{\overline{\psi}}\subseteq L^{\overline{\varphi}}$ і писати $\overline{\varphi}\overset{L}{\le}\overline{\psi}$. В [3] показано, що при $\overline{\psi}\neq 0, k\in N$, із-передування $\left(\overline{\varphi}\le\overline{\psi}\right)$ випливає, що для довільної функції $f(x)\in L^{\overline{\psi}}$ існує $f^{\overline{\varphi}}(x)$, причому $f^{\overline{\varphi}}(x)\in L^{\overline{\eta}}$, де пара $\overline{\eta}=(\eta_1(k);\eta_2(k))$ задовольняє умовам

$$\eta_1(k)=\frac{\psi_1(k)\varphi_1(k)+\psi_2(k)\varphi_2(k)}{\overline{\varphi}^{2}(k)}; \tag{5}$$

$$\eta_2(k)=\frac{\psi_2(k)\varphi_1(k)-\psi_1(k)\varphi_2(k)}{\overline{\varphi}^2(k)},$$

де, крім того, $S\left[\left(f^{\overline{\varphi}}\right)^{\overline{\eta}}\right]=S\left[\overline{\psi}\right]$.

Якщо ж тригонометричний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\eta_1(k)(k)\cos kt+\eta_2(k)(k)\sin kt,$$

де послідовності $\eta_1(k),\eta_2(k)$ задовольняють рівностям (5), є рядом Фур'є деякої сумовної функції $D_\eta(t)$, то $\overline{\varphi}^{L}\leq\overline{\psi}$. Розглядаючи множини $C^{\overline{\psi}}$ та бажаючи досягти неперервності «молодших» похідних, введемо поняття С-передування пар $\overline{\varphi}$ та $\overline{\psi}$ таким чином. Будемо писати $\overline{\varphi}^{C}\leq\overline{\psi}$ (пара $\overline{\varphi}$ С-передує парі $\overline{\psi}$), якщо для функції $f(x)\in C^{\overline{\psi}}$ існує неперервна $\overline{\varphi}$-похідна.

Розглянемо набір пар $\overline{\varphi}_i=(\varphi_{i,1}(k);\varphi_{i,2}(k))$, які C-передують парі $\overline{\psi}, i=\overline{1,m}$, при цьому для $f(x)\in C^{\overline{\psi}}$ $f^{\overline{\varphi}_i}(x)\in C^{\overline{\eta}_i}$, де послідовності $\eta_1(k)$, $\eta_2(k)$ вибрані згідно рівностей (5).

Нехай $f(x)$ — 2π-періодична неперервна функція, яка допускає подання (4), в якому $\operatorname{esssup}_t\left|f^{\overline{\psi}}(t)\right|\leq 1$.

Задача вивчення асимптотичної поведінки величини

$$\mathcal{E}_n^*\left(C_\infty^{\overline{\psi}};x\right)=\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left|f(x)-S_n^*(f;x)\right|,\ n\to\infty, \tag{6}$$

де $S_n^*(f;x)$ — інтерполяційний тригонометричний поліном n-го степеня, що співпадає із функцією $f(x)$ у вузлах $x_k^{(n)}=\frac{k\pi}{n}$, $k=0,\pm1,\pm2,\ldots,$ відноситься до циклу екстремальних задач Колмогорова—Нікольського.

У цій статті встановлюється поведінка при $n\to\infty$ величини

$$\mathcal{E}_{n,m}^*\left(C_\infty^{\overline{\psi}};x\right)=\sup_{f\in C_\infty^{\overline{\psi}}}\left|\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n)\left(f^{\overline{\varphi}_i}(x)-S_n^*\left(f^{\overline{\varphi}_i};x\right)\right)\right|, \tag{7}$$

яка характеризує сумісне наближення $\overline{\varphi}_i$ — похідних функції $f(x)$ інтерполяційними многочленами з парним числом вузлів на періоді.

Допоміжні твердження. Тригонометричний інтерполяційний многочлен $S_n^*(f;x)$ аналогічно як і інтерполяційний многочлен $\tilde{S}_n(f;x)$, який співпадає із функцією $f(x)$ в точках $\frac{2k\pi}{2n+1}$ (див., напр., [4, с. 127—130], [5, с. 39—42]) записується формулою

$$S_n^*(f;x) = n^{-1}\sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*\left(x - x_k^{(n)}\right) f\left(x_k^{(n)}\right), \tag{8}$$

де $D_n^* = D(t) - \frac{\cos nt}{2} = \frac{\sin nt \cdot ctg\frac{t}{2}}{2}$ — модифіковане ядро Діріхле степеня n, а $D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos kt = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$ — ядро Діріхле степеня n. Тоді інтерполяційний многочлен лінійної комбінації $\overline{\varphi}_i$ — похідних функції $f(x) \in C_\infty^{\overline{\psi}}$ матиме вигляд

$$\begin{aligned} S_n^*\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n) f^{\overline{\psi}_i}; x\right) &\overset{\text{def}}{=} S_n^*(F;x) = \\ &= n^{-1}\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n)\sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*\left(x - x_k^{(n)}\right) f\left(x_k^{(n)}\right). \end{aligned} \tag{8`}$$

Через $E_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right)$ позначимо точну верхню межу найкращих наближень функцій $f(x)$ із класу $C_\infty^{\overline{\psi}}$ тригонометричними поліномами $t_{n-1}(x)$ степеня $n-1$ в метриці простору C, тобто

$$E_n\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right) = \sup_{f \in C_\infty^{\overline{\psi}}} \left\| f(x) - t_{n-1}(x) \right\|_C .$$

У випадку кількості доданків $m=1$ на відомих класах W^r величина (7) досліджена С. М. Нікольським ([6]), а при довільній кількості доданків на класах W_β^r — авторами [7].

Має місце лема, приведена в роботі [7, с. 139].

Лема. Для функції Лебега $\tilde{L}_n^*(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1}\left|D_n^*\left(x-x_k^{(n)}\right)\right|$ інтерполяційного многочлена $S_n^*(f;x)$ має місце асимптотична рівність

$$\tilde{L}_n^*(x)=\frac{2}{\pi}\ln n\cdot\left|\sin nx\right|+\mathcal{O}(1). \tag{9}$$

Основні результати. Нехай

$$E_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}\right)=\sup_{f(x)\in C_\infty^{\bar{\psi}}}\inf_{t_{n-1}}\left\|\sum_{i=1}^{m}\bar{\varphi}_i(n)f^{\bar{\varphi}_i}(x)-t_{n-1}(x)\right\|_C \tag{10}$$

точна верхня межа найкращих наближень комбінацій $\bar{\varphi}_i$ — похідних функції $f(x)\in C_\infty^{\bar{\psi}}$ тригонометричними многочленами степеня $n-1$ (див., напр., [8, с. 3—54]).

Теорема. Нехай функція $f(x)\in C_\infty^{\bar{\psi}}$, пари $\bar{\varphi}_i$ C — передують парі $\bar{\psi}$, при цьому має місце рівність

$$\begin{gathered}E_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}\right)=\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\bar{\varphi}_i(n)\times\right.\\ \left.\times\left(\eta_{i,1}(k)\cos kt+\eta_{i,2}(k)\sin kt\right)sign\,\sin(nt+\gamma)\,dt\right|,\end{gathered} \tag{11}$$

тоді для величини $\mathcal{E}_{n,m}^*\left(C_\infty^{\bar{\psi}};x\right)$ справедлива асимптотична рівність

$$\mathcal{E}_{n,m}^*\left(C_\infty^{\bar{\psi}};x\right)=\frac{4}{\pi}E_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}\right)\ln n\cdot\left|\sin nx\right|+\mathcal{O}(1)E_{n,m}\left(C_\infty^{\bar{\psi}}\right),n\to\infty. \tag{12}$$

Доведення. Враховуючи співвідношення (8`), для лінійної комбінації $F(x)$ маємо

$$\begin{gathered}S_n^*(F;x)=S_n^*\left(\sum_{i=1}^{m}\bar{\varphi}_i(n)f^{\bar{\psi}_i};x\right)=\\ =n^{-1}\sum_{i=1}^{m}\bar{\varphi}_i(n)\sum_{k=-n}^{n-1}D_n^*\left(x-x_k^{(n)}\right)f^{\bar{\psi}_i}\left(x_k^{(n)}\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Оскільки $S_n^*(t_{n-1};x)=t_{n-1}(x)$ і оператор S_n^* — лінійний, то для довільної функції $f(x)\in C_\infty^{\bar{\psi}}$ отримаємо

$$\begin{gathered}\left|\rho_n(F;x)\right|=\left|F(x)-S_n^*(F;x)\right|=\left|F(x)-t_{n-1}^*(x)+t_{n-1}^*(x)-S_n^*(F;x)\right|=\\ =\left|F(x)-t_{n-1}^*(x)-S_n^*\left(F-t_n^*;x\right)\right|\le\left|F(x)-t_{n-1}^*(x)\right|+\left|S_n^*\left(F-t_{n-1}^*;x\right)\right|,\end{gathered} \tag{14}$$

де $t_n^*(x)$ — многочлен найкращого наближення функції $F(x)$ в метриці простору *C*.

Із співвідношення (13) отримаємо

$$\left|S_n^*\left(F-t_n^*;x\right)\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=-n}^{n-1} D_n^*\left(x-x_k^{(n)}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n) f^{\varphi_i}\left(x_k^{(n)}\right)-t_n^*\left(x_k^{(n)}\right)\right)\right| \le$$
$$\le \left\|\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n) f^{\overline{\varphi}_i}(x)-t_n^*(x)\right\|_C \cdot \frac{1}{n}\sum_{k=-n}^{n-1}\left|D_n^*\left(x-x_k^{(n)}\right)\right| = E_n(F)\cdot \tilde{L}_n^*(x), \quad (15)$$

де $E_n(F)$ — величина найкращого наближення функції *F* в просторі *C*, а саме

$$E_n(F) = \inf_{t_{n-1}}\left\|F(x)-t_{n-1}(x)\right\|_C .$$

Із нерівностей (14)—(15) робимо висновок

$$\left|\rho_n(F;x)\right| \le \left(1+\tilde{L}_n^*(x)\right)E_n(F). \quad (16)$$

Оскільки згідно (10)

$$E_n(F) \le E_{n,m}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right),$$

то для величини $\mathcal{E}_{n,m}^*\left(C_\infty^{\overline{\psi}};x\right)$ отримуємо нерівність

$$\mathcal{E}_{n,m}^*\left(C_\infty^{\overline{\psi}};x\right) \le \left(1+\tilde{L}_n^*(x)\right)E_{n,m}\left(C_\infty^{\overline{\psi}}\right). \quad (18)$$

Для завершення доведення теореми досить тепер побудувати функцію $f(x)\in C_\infty^{\overline{\psi}}$, на якій досягається знак рівності в (18).

Покладаємо

$$f_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\psi_1(k)\cos kt+\psi_2(k)\sin kt\right) sign\sin\left(n(t-x)+\gamma\right)dt, \quad (19)$$

де γ задовольняє (11). Тоді лінійна комбінація $F(x)$ запишеться у вигляді

$$F_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n)\left(\eta_{i,1}(k)\cos kt+\eta_{i,2}(k)\sin kt\right)\times$$
$$\times sign\sin\left(n(t-x)+\gamma\right)dt. \quad (20)$$

Використовуючи розвиток в ряд Фур'є функції $sign\sin nt$, із співвідношення (20) отримаємо

$$F_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i(n)\times\left(\frac{\eta_{i,1}\left(n(2k+1)\cos\left((2k+1)nx+\gamma\right)\right)}{2k+1}+\right.$$

$$+\frac{\eta_{i,2}\left(n\left(2k+1\right)\right)\sin\left(\left(2k+1\right)nx+\gamma\right)}{2k+1}\Bigg).$$

Із умови теореми, а також співвідношень (19)—(21), випливає, що функція $f\left(x\right)\in C_{\infty}^{\overline{\psi}}$ та $F_n\left(x\right)$ приймає в точках $x_k^{(n)}$ значення $\pm E_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}\right)$ почергово:

$$F_n\left(\frac{j\pi}{n}\right)=$$

$$=\left(-1\right)^j\frac{8}{?}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\eta_{i,1}\left(n\left(2k+1\right)\sin\left(2k+1\right)\gamma+\eta_{i,2}\left(n\left(2k+1\right)\right)\cos\left(2k+1\right)\gamma\right)}{2k+1}=$$

$$=\left(-1\right)^j\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{i=1}^{m}\overline{\varphi}_i\left(n\right)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\eta_{i,1}\left(k\right)\cos kt+\eta_{i,2}\left(k\right)\sin kt\ \right)sign\,\sin\left(nt+\gamma\right)dt\,.$$

Крім того $\left|F_n\left(x\right)\right|\le E_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}\right)$.

Отже,

$$\left|F_n\left(x\right)-S_n^*\left(F;x\right)\right|=\tilde{L}_n^*\left(x\right)E_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}\right)+\mathcal{O}\left(1\right)E_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}\right).\qquad(22)$$

Співвідношення (9), (18), (22) доводять теорему. **Теорема доведена**.

Зауважимо, що в деяких конкретних випадках величини $E_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}\right)$ знайдені. Зокрема, на класах Вейля—Надя $W_{\beta,\infty}^r$ точне значення величини

$$E_{n,m}\left(W_{\beta,\infty}^r\right)=\sup_{f(x)\in W_{\beta,\infty}^2}\inf_{t_{n-1}}\left\|\sum_{i=1}^{m}n^{-r_i}f_{\beta_i}^{(r_i)}\left(x\right)-t_{n-1}\left(x\right)\right\|_C$$

при деяких обмеженнях на параметри r_i, β_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$ знайдені в [8]. На класах згорток із узагальненими ядрами Пуассона $\mathcal{P}_{\beta,\infty}^q(t)=\sum_{k=1}^{\infty}q^k\cos\left(kt+\frac{\beta\pi}{2}\right)$, $q\in\left(0,1\right)$, $\beta\in R$, для аналогу величини $E_{n,m}\left(C_{\infty}^{\overline{\psi}}\right)$ вказані точні значення в [9], а в роботі [10] ця задача розв'язана для класів згорток періодичних функцій, які можуть бути регулярно продовжені у фіксовану смугу комплексної площини. В кожному з цих випадків асимптотичну рівність (12) доведеної вище теореми можемо конкретизувати.

Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Методы теории приближений : в 2-х ч. / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. 1. — 427 с.
2. Степанец А. И. Скорость сходимости рядов Фурье на класах $\overline{\psi}$ -интегралов / А. И. Степанец // Укр. мат. журн. — 1997. — Т. 49, №8. — С. 1069—1114.
3. Сорич В. А. Умови L -передування $\overline{\psi}$ -похідних / В. А. Сорич, Н. М. Сорич, А. В. Сорич // Наук. пр. Кам'янець-Подільського держ. пед. ун-ту : зб. за підсумками звіт. наук. конф. викл. і асп. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Поділ. держ. пед. ун-т, 2002. — Т. 2. — Вип. 1. — С. 13—18.
4. Степанец А. И. Методы теории приближений : в 2-х ч. / А. И. Степанец. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. — Ч. II. — 468 с.
5. Степанец А. И. Классификация и приближение периодических функций / А. И. Степанец. — К. : Наук. думка, 1987. — 268 с.
6. Никольський С. М. Асиптотическая оценка остатка при приближении интерполяционными тригонометрическими полиномами / С. М. Никольський // ДАН СССР. — 1941. — Т. 31, №3. — С. 215—218.
7. Сорич В. А. Наближення деяких лінійних комбінацій функцій та їх похідних в сенсі Вейля-Надя інтерполяційними тригонометричними поліномами з парним числом вузлів на періоді / В. А. Сорич, Н. М. Сорич // Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. — Вип. 3. — С. 137—145.
8. Сорич В. А. Наилучшее совместное приближение функций и их производных / В. А. Сорич. — К., 1989. — С. 3-54. — (Препринт / Ін-т математики АН УРСР; 89.19).
9. Сорич В. А. Найкраще наближення лінійної комбінації ядер Пуассона / В. А. Сорич, Н. М. Сорич // Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації : зб. наук. пр. за матеріалами всеукр. наук.-метод. конф. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський держ. ун-т, 2004. — С. 60—69.
10. Третяк О. А. Найкраще сумісне наближення класів функцій, що аналітично продовжуються в смугу / О. А. Третяк // Зб. матеріалів наук. досл. студ. і магістрантів Кам'янець-Подільського держ. ун-ту. Фізико-математичні науки. — Кам'янець-Подільський : Кам’янець-Поділ. держ. ун-т, 2007. — Вип. 4. — С. 95—99.

We obtained the asymptotical equations for the joint approximation of linear combinations of functions, which have derivative introduced by Stepanet, by interpolate trigonometric polinomials.

Key words: *interpolate trigonometric polinomial, interpolate knots, Dirihlis modifical kernel.*

Отримано: 26.05.2011