УДК 519.9

О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук, професор,
О. П. Нечуйвітер, канд. фіз.-мат. наук

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків

3 D КОЕФІЦІЄНТИ ФУР'Є ТА ОПЕРАТОРИ КУСКОВО-СТАЛОЇ СПЛАЙН-ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ

У статті розглядається кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі Ліпшиця з використанням інтерфлетації функцій у випадку, коли інформація про функцію задана на площинах.

Ключові слова: *інтерфлетація, кубатурна формула, 3 D коефіцієнти Фур'є, клас Ліпшиця.*

1. Постановка задачі. При наближені функцій двох та трьох змінних симетричними відрізками ряду Фур'є виникає задача обчислення коефіцієнтів цього ряду за допомогою інформаційних операторів різних типів. В якості даних можуть бути значення функції у вузлових точках, значення функції на лініях або площинах, інтеграли від наближуваної функції вздовж вибраної системи ліній або площин, що перетинають досліджуваний об'єкт. Задачу наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є у випадках, коли початкова інформація задається різними інформаційними операторами, дозволяє ефективно розв'язувати апарат інтерфлетації функцій [1] на різних класах функцій. Нехай на класі Ліпшиця $C^3_{2,L,L,L}$ — клас функцій, який визначений на $G=[0,1]^3$ і задовольняє умові Ліпшиця по кожній змінній:

$$\left|f(x_1,y,z)-f(x_2,y,z)\right|\le L|x_1-x_2|,$$

$$\left|f(x,y_1,z)-f(x,y_2,z)\right|\le L|y_1-y_2|,$$

$$\left|f(x,y,z_1)-f(x,y,z_2)\right|\le L|z_1-z_2|.$$

Значення $f(x_k,y,z),\ f(x,y_j,z), f(x,y,z_s),\ \ k=\overline{1,m_1},\ \ j=\overline{1,m_2},$ $s=\overline{1,m_3}$ задані не більше, ніж на $N=m_1m_2m_3$ заданих площинах. Для наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є побудувати кубатурні формули на основі кусково-сталих інтерполянтів з використанням інтерфлетації функцій. Отримати оцінку похибки наближення.

2. Аналіз існуючих робіт. Задача наближеного обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних має як класичне розв'язання [2], так і з використанням теорії інтерлінації функцій на різних класах функцій у випадку різних інформаційних операторів [3]. В [4—6] викладений загальний підхід до побудови операторів фінітного тривимірного дискретно-неперервного та дискретного перетворення Фур'є на основі метода Файлона, кусково-сталих сплайнів і сплайн-інтерфлетації на класі диференційовних функцій. В [7] представлена кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на класі Ліпшиця $C^3_{2,L,L,L}$ у випадку, коли інформація про функцію задана у вузлових точках. Метою цієї роботи є побудова та отримання оцінки похибки наближення кубатурної формули для обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на основі кусково-сталої сплайн-інтерфлетації на деякому підкласі класа Ліпшиця $C^3_{2,L,L,L}$ у випадку, коли інформація про функцію задана на площинах $x = x_k$, $k = \overline{1,\ell}$, $y = y_j$, $j = \overline{1,\ell}$, $z = z_s$, $s = \overline{1,\ell}$, $m_1 = m_2 = m_3 = \ell$.

3. Кубатурна формула обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на основі кусково-сталої сплайн-інтерфлетації. На класі Ліпшиця $C^3_{2,L,L,L}$ виділимо підклас $C^3_{2,\tilde{L}}$. У цей підклас входять функції з класа $C^3_{2,L,L,L}$, для яких виконуються додаткові умови

$$\left|f(x_1,y_1,z)-f(x_2,y_1,z)-f(x_1,y_2,z)+f(x_2,y_2,z)\right| \le$$
$$\le L^2\left|x_1-x_2\right|\left|y_1-y_2\right|,$$
$$\left|f(x_1,y,z_1)-f(x_2,y,z_1)-f(x_1,y,z_2)+f(x_2,y,z_2)\right| \le$$
$$\le L^2\left|x_1-x_2\right|\left|z_1-z_2\right|,$$
$$\left|f(x,y_1,z_1)-f(x,y_2,z_1)-f(x,y_1,z_2)+f(x,y_2,z_2)\right| \le$$
$$\le L^2\left|y_1-y_2\right|\left|z_1-z_2\right|,$$
$$\big|f(x_1,y_1,z_1)-f(x_2,y_1,z_1)-f(x_1,y_2,z_1)-f(x_1,y_1,z_2)+$$
$$+f(x_2,y_2,z_1)+f(x_2,y_1,z_2)+f(x_1,y_2,z_2)-f(x_2,y_2,z_2)\big| \le$$
$$\le \tilde{L}\left|x_1-x_2\right|\left|y_1-y_2\right|\left|z_1-z_2\right|.$$

Такі умови виконуются для ліпшицевих операторів суперпозиції Немицького [8].

Введемо позначення:

$$X_k = \left[x_{k-1}, x_k\right],\ Y_j = \left[y_{j-1}, y_j\right],\quad Z_s = \left[z_{s-1}, z_s\right],$$

$$h_{1k}(x) = \begin{cases} 1, x \in X_k \\ 0, x \notin X_k, \end{cases} \quad k = \overline{1,\ell};\ h_{2j}(y) = \begin{cases} 1, y \in Y_j, \\ 0, y \notin Y_j, \end{cases} \quad j = \overline{1,\ell};$$

$$h_{3s}(z) = \begin{cases} 1, z \in Z_s \\ 0, z \notin Z_s, \end{cases} \quad s = \overline{1,\ell},$$

$$x_k = k\Delta - \frac{\Delta}{2},\ y_j = j\Delta - \frac{\Delta}{2},\quad z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2},\quad k, j, s = \overline{1,\ell}\ ,\ \Delta = \frac{1}{\ell}\ .$$

Розглянемо оператори

$$J_1 f(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} f\left(\xi_k, y, z\right) h_{1k}(x),\quad \xi_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2},\ k = \overline{1,\ell},$$

$$J_2 f(x,y,z) = \sum_{j=1}^{\ell} f\left(x, \eta_j, z\right) h_{2j}\left(y\right),\quad \eta_j = \frac{y_{j-1} + y_j}{2},\ j = \overline{1,\ell}\ ,$$

$$J_3 f(x,y,z) = \sum_{s=1}^{\ell} f\left(x, y, \varsigma_s\right) h_{3s}\left(z\right),\quad \varsigma_s = \frac{\varsigma_{s-1} + \varsigma_s}{2},\ s = \overline{1,\ell}\ .$$

Нехай $Jf(x,y,z)$ — кусково-сталий оператор-інтерфлетант:

$$Jf(x,y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} f(x_k, y, z) h_{1k}(x) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y_j, z) h_{2j}(y) + \sum_{j=1}^{\ell} f(x, y, z_s) h_{3s}(z) -$$

$$-\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\ f(x_k, y_j, z) h_{1k}(x) h_{2j}(y) - \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\ f(x_k, y, z_s) h_{1k}(x) h_{3s}(z) -$$

$$-\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell}\ f(x, y_j, z_s) h_{2j}(y) h_{3s}(z) +$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f(x_k, y_j, z_s) h_{1k}(x) h_{2j}(y) h_{3s}(z)\ .$$

Кусково-сталий оператор-інтерфлетант $Jf\left(x,y,z\right)$ представляється через оператори $J_\mu f\left(x,y,z\right),\quad \mu = 1,2,3$ таким чином:

$$Jf\left(x,y,z\right) = J_1 f\left(x,y,z\right) + J_2 f\left(x,y,z\right) + J_3 f\left(x,y,z\right) -$$
$$-J_1 J_2 f\left(x,y,z\right) - J_2 J_3 f\left(x,y,z\right) - J_1 J_3 f\left(x,y,z\right) + J_1 J_2 J_3 f\left(x,y,z\right).$$

Лема [1]. Для $Jf\left(x,y,z\right)$ справедливі властивості:

$$Jf(x,y,z)\Big|_{x=x_k} = f(x_k, y, z)\ ,\ Jf(x,y,z)\Big|_{y=y_j} = f(x, y_j, z)\ ,$$

$$Jf(x,y,z)\Big|_{z=z_s} = f(x, y, z_s)\ ,$$

$$\left| f(x,y,z) - Jf(x,y,z) \right| = O\left(\frac{1}{\ell^3}\right) = O\left(\Delta^3\right).$$

Для обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є , зокрема інтегралу

$$I_1^3(m,n,p)=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\ ,$$

пропонується використовувати формулу:

$$\Phi_1^3=\int_0^1\int_0^1\int_0^1 Jf(x,y,z)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pz dxdydz\ .$$

Підставимо вираз для кусково-сталого оператора-інтерфлетанта та отримаємо відповідну кубатурну формулу, наприклад,

$$\Phi_1^3=\int_0^1\int_0^1\sum_{k=1}^{\ell} f(x_k,y,z)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin 2\pi mxdx\sin 2\pi nydy\sin 2\pi pzdz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x,y_j,z\right)\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\sin 2\pi nydy\sin 2\pi mxdx\sin 2\pi pzdz+$$

$$+\int_0^1\int_0^1\sum_{s=1}^{\ell} f\left(x,y,z_s\right)\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\sin 2\pi pzdz\sin 2\pi mxdx\sin 2\pi nydy-$$

$$-\int_0^1\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell} f\left(x_k,y_j,z\right)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin 2\pi mxdx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\sin 2\pi nydy\sin 2\pi pzdz-$$

$$-\int_0^1\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f\left(x_k,y,z_s\right)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin 2\pi mxdx\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\sin 2\pi pzdz\sin 2\pi nydy-$$

$$-\int_0^1\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f\left(x,y_j,z_s\right)\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\sin 2\pi nydy\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\sin 2\pi pzdz\sin 2\pi mxdx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{\ell}\sum_{s=1}^{\ell} f\left(x_k,y_j,z_s\right)\int_{x_{k-\frac12}}^{x_{k+\frac12}}\sin 2\pi mxdx\int_{y_{j-\frac12}}^{y_{j+\frac12}}\sin 2\pi nydy\int_{z_{s-\frac12}}^{z_{s+\frac12}}\sin 2\pi pzdz\ .$$

Теорема. Нехай $f(x,y,z)\in C^3_{2,\tilde{L}}$ та значення функції задані не більше, ніж на заданих $N=3\ell$ площинах $f\left(x_k,y,z\right)$, $f\left(x,y_j,z\right)$,

$f\left(x,y,z_s\right)$, $k,j,s=\overline{1,\ell}$. Для кубатурної формули $\Phi_1^3\left(m,n,p\right)$ виконується така оцінка похибки наближення

$$\rho\left(I_1^3(m,n,p),\Phi_1^3\right)=$$

$$=\left|\int_0^1\int_0^1\int_0^1\left(f(x,y,z)-Jf(x,y,z)\right)\sin 2\pi mx\sin 2\pi ny\sin 2\pi pzdxdydz\right|\le\frac{\widetilde{L}}{8\ell^3}.$$

Доведення. Введемо позначення:

$$J_1f(x,y,z)=\sum_{k=1}^{\ell}f\left(\xi_k,y,z\right)h_{1k}(x),\quad \xi_k=\frac{x_{k-1}+x_k}{2},\ k=\overline{1,\ell},$$

$$J_2f(x,y,z)=\sum_{j=1}^{\ell}f\left(x,\eta_j,z\right)h_{2j}\left(y\right),\quad \eta_j=\frac{y_{j-1}+y_j}{2},\ j=\overline{1,\ell},$$

$$J_3f(x,y,z)=\sum_{s=1}^{\ell}f\left(x,y,\varsigma_s\right)h_{3s}\left(z\right),\quad \varsigma_s=\frac{\varsigma_{s+1}+\varsigma_s}{2},\ s=\overline{1,\ell}.$$

Тоді

$$Jf\left(x,y,z\right)=J_1f\left(x,y,z\right)+J_2f\left(x,y,z\right)+J_3f\left(x,y,z\right)-$$
$$-J_1J_2f\left(x,y,z\right)-J_2J_3f\left(x,y,z\right)-J_1J_3f\left(x,y,z\right)+J_1J_2J_3f\left(x,y,z\right).$$

Для похибки $Rf\left(x,y,z\right)=f(x,y,z)-Jf(x,y,z)$ справедлива тотожність

$$Rf\left(x,y,z\right)=f\left(x,y,z\right)-J_1f\left(x,y,z\right)-J_2f\left(x,y,z\right)-J_3f\left(x,y,z\right)+$$
$$+J_1J_2f\left(x,y,z\right)+J_2J_3f\left(x,y,z\right)+J_1J_3f\left(x,y,z\right)-J_1J_2J_3f\left(x,y,z\right)=$$
$$=\left[I-J_1-J_2-J_3+J_1J_2+J_2J_3+J_1J_3-J_1J_2J_3\right]f\left(x,y,z\right)=$$
$$=\left[I-J_1+I-J_2+I-J_3+\right.$$
$$\left.+J_1J_2-I+J_2J_3-I+J_1J_3-I+I-J_1J_2J_3\right]f\left(x,y,z\right)=$$
$$=\left[\left(I-J_1\right)\left(I-J_2\right)\left(I-J_3\right)\right]f(x,y,z)=R_3R_2R_1f(x,y,z)$$

де $R_\mu f\left(x,y,z\right)=f(x,y,z)-J_\mu(x,y,z),\ \mu=1,2,3.$ Отже, $\left|Rf\left(x,y,z\right)\right|\le$ $\le\left|R_3R_2R_1f(x,y,z)\right|$. У кожній області G_k,

$$G_k:\left[x_{k-\frac{1}{2}},x_{k+\frac{1}{2}}\right],x_k=k\Delta-\frac{\Delta}{2},\ k=\overline{1,\ell}\ \ \Delta=\frac{1}{\ell},\ x_{\frac{1}{2}}=0,\ x_{\ell+\frac{1}{2}}=1,$$

$$y\in\left[0,1\right],\ z\in\left[0,1\right];$$

$$G_j:\left[y_{j-\frac{1}{2}},y_{j+\frac{1}{2}}\right],y_j=j\Delta-\frac{\Delta}{2},\ j=\overline{1,\ell}\ \ \Delta=\frac{1}{\ell},\ y_{\frac{1}{2}}=0,\ y_{\ell+\frac{1}{2}}=1,$$

$$x \in [0,1],\ z \in [0,1];$$

$$G_s : \left[z_{s-\frac{1}{2}}, z_{s+\frac{1}{2}} \right], z_s = s\Delta - \frac{\Delta}{2},\ s = \overline{1,\ell}\ \ \Delta = \frac{1}{\ell},\ z_{\frac{1}{2}} = 0,\ z_{\ell+\frac{1}{2}} = 1,$$

$$x \in [0,1],\ y \in [0,1]$$

маємо:

$$\left| R_1 f(x,y,z) \right| \le \left| f(x,y,z) - f(x_k,y,z) \right| \le L\left| x - x_k \right| \le L\frac{\Delta}{2},$$

$$\left| R_2 f(x,y,z) \right| \le \left| f(x,y,z) - f(x,y_j,z) \right| \le L\left| y - y_j \right| \le L\frac{\Delta}{2},$$

$$\left| R_2 f(x,y,z) \right| \le \left| f(x,y,z) - f(x,y,z_s) \right| \le L\left| z - z_s \right| \le L\frac{\Delta}{2}.$$

Отже, в кожному кубі

$$\left[x_{k-\frac{1}{2}}, x_{k+\frac{1}{2}} \right] \times \left[y_{j-\frac{1}{2}}, y_{j+\frac{1}{2}} \right] \times \left[z_{s-\frac{1}{2}}, z_{s+\frac{1}{2}} \right]$$

маємо $\left| Rf(x,y,z) \right| \le L^3 \dfrac{\Delta^3}{8} = \tilde{L}\dfrac{\Delta^3}{8}.$

Таким чином,

$$\rho\left(I_1^3(m,n,p), \Phi_1^3 \right) =$$

$$= \left| \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x,y,z) - Jf(x,y,z) \right) \sin 2\pi mx \sin 2\pi ny \sin 2\pi pz dxdydz \right| \le$$

$$\le \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left| f(x,y,z) - Jf(x,y,z) \right| dxdydz =$$

$$= \sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{\ell} \int_{x_{k-\frac{1}{2}}}^{x_{k+\frac{1}{2}}} \int_{y_{j-\frac{1}{2}}}^{y_{j+\frac{1}{2}}} \int_{z_{s-\frac{1}{2}}}^{z_{z+\frac{1}{2}}} \left| R_3 R_2 R_1 f(x,y,z) \right| dxdydz \le$$

$$\le L^3 \frac{\Delta^3}{8} \ell^3 \Delta^3 = \tilde{L}\frac{\Delta^3}{8} \cdot \frac{1}{\Delta^3} \Delta^3 = \tilde{L}\frac{\Delta^3}{8} = \frac{\tilde{L}}{8\ell^3}.$$

Теорема доведена.

4. Висновки. Для наближеного обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є на деякому підкласі класу Ліпшиця вперше побудована кубатурна формула на основі кусково-сталого оператора-інтерфлетанта у випадку, коли інформація про функції задана на лініях $x = x_k$,

$k = \overline{1,\ell}$, $y = y_j$, $j = \overline{1,\ell}$, $z = z_s$, $s = \overline{1,\ell}$, $m_1 = m_2 = m_3 = \ell$. Побудована кубатурна формула зводить обчислення 3 D коефіцієнтів Фур'є до 2 D. Отримані оцінки похибки наближення. Наступним кроком у даних дослідженнях буде питання про якість побудованої кубатурної формули, тобто чи належить дана кубатурна формула до оптимальних або близьких до них.

Список використаних джерел:

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. — Харків : Основа, 2002. — 544 с.
2. Задирака В. К. Цифровая обработка сигналов / В. К. Задирака, С. С. Мельникова. — К. : Наук. думка, 1993. — 294 с.
3. Литвин О. М. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер. — Харків : ХНУРЕ, 2008. — 136 с.
4. Литвин О. М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Радиоэлектроника и информатика. — Харьковский национальный университет радиоэлектроники, 2004. — С. 130—133.
5. Литвин О. М. Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. — УкрДАЗТ, 2005. — С. 19—23.
6. Литвин О. М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Вестник Национального технического университета «ХПИ» : сборник научных тудов. Темтический выпуск, «Автоматика и приборостроение». — Харьков, 2005. — С. 90—130.
7. Литвин О. М. Потрійні інтеграли від щвидкоосцилюючих функцій на класі $C^3_{2,L,L,L}$ та інтерфлетація функцій / О. М. Литвин, О. П. Нечуйвітер // Інформатика та системні науки (ІСН-2010) : матеріали Всеукраїнської конференції 18—20 березня 2010 р. / за ред. д.ф.-м.н., проф. О. О. Ємця. — Полтава : РВВ ПУСКУ, 2010. — С. 108—110.
8. Чистяков В. В. Абстрактные операторы суперпозиции на отображениях ограниченной вариации двух вещественных переменных / В. В. Чистяков // Сибирский математический журнал. — 2005. — Т. 46, № 3. — С. 698—717.

The paper is devoted to formula of the evaluating of three dimensions of Fourier's coefficients with using spline-interflatation on the Lipshiz class in case when information about function is a set of flats.

Key words: *Interflatation, cubature formula, three dimensions of Fourier's coefficients, Lipshiz class.*

Отримано: 19.04.2011