УДК 517.956.4+519.217.4

С. Д. Івасишен*, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Г. П. Івасюк,** канд. фіз.-мат. наук

*Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут", м. Київ,
**Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ФУНДАМЕНТАЛЬНІ РОЗВ'ЯЗКИ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ РІВНЯНЬ ФОККЕРА-ПЛАНКА-КОЛМОГОРОВА ДЕЯКИХ ВИРОДЖЕНИХ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ

Робиться короткий огляд результатів, які стосуються фундаментальних розв'язків задачі Коші для деяких ультрапараболічних рівнянь. Ці рівняння узагальнюють класичне рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова. Їх можна трактувати як рівняння Фоккера—Планка—Колмогорова відповідних вироджених дифузійних процесів.

Ключові слова: *дифузійний процес, рівняння Фоккера-Планка-Колмогорова, вироджене параболічне рівняння, фундаментальний розв'язок задачі Коші.*

У статті наводиться короткий огляд результатів, що стосуються побудови та дослідження властивостей фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) для деяких класів вироджених параболічних рівнянь, які можна трактувати як рівняння Фоккера—Планка—Колмогорова відповідних вироджених дифузійних процесів. При цьому висвітлюється зв'язок дифузійних процесів з параболічними рівняннями з частинними похідними другого порядку. Огляд ґрунтується в основному на працях [1—4].

1. У теорії марковських випадкових процесів дифузійні процеси (ДП) займають одне з центральних місць. Це спричинено тим, що, по-перше, ДП є досить точними моделями важливих фізичних процесів, зокрема моделлю руху дифундуючої частинки в рідині — явища, відкритого в 1828 р. англійським ботаніком Р. Броуном, а, по-друге, саме ДП є зв'язуючою ланкою між теорією випадкових процесів і теорією диференціальних рівнянь із частинними похідними (ДРЧП). При цьому чітко простежується взаємність впливів цих теорій: при вивченні властивостей ДП використовуються аналітичні результати з теорії ДРЧП і, навпаки, при вивченні задачі Коші та крайових задач для ДРЧП застосовуються імовірнісні методи.

Однією із важливих задач теорії ДП є розробка методів побудови ДП за відомими характеристиками дифузії: матриці дифузії A, вектора переносу a і коефіцієнта обриву a_0. З точки зору явища дифузії вектор переносу a — це макроскопічна швидкість руху рідини, а матриця дифузії A характеризує випадкові переміщення частинки, які є результатом зіткнень з молекулами рідини, що перебувають у тепловому русі. Природними питаннями, які тут виникають, є наступні питання. Які умови слід накласти на матричнозначну функцію A і векторну функцію a, щоб можна було побудувати ДП, для якого локальні характеристики руху (дифузійні коефіцієнти) збігалися б із заданими функціями A і a? Що означає факт існування локальних характеристик руху для деякого ДП?

Уперше на ці питання відповів А. М. Колмогоров у 1931 р. У праці [1] він виділив клас неперервних марковських процесів, які пізніше були названі дифузійними. Це процеси із значеннями в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, і функцією ймовірностей переходу $P(\tau,\xi;t,\Gamma)$, $0 \leq \tau < t$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, Γ — борельова множина в $\mathbb{R}^N$, для яких виконуються такі умови:

а) для будь-якого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{\{|x-\xi|>\varepsilon\}} P(t,\xi;t+\Delta t,dx) = 0,$$

б) існують такі функції a і A, що для деякого $\varepsilon > 0$

$$\begin{gathered}\lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{\{|x-\xi|<\varepsilon\}} (x-\xi) P(t,\xi;t+\Delta t,dx) = a(t,\xi), \\ \lim_{\Delta t \to 0} \int\limits_{\{|x-\xi|<\varepsilon\}} (x-\xi,\theta)^2 P(t,\xi;t+\Delta t,dx) = (A(t,\xi)\theta,\theta),\end{gathered} \tag{1}$$

де θ — довільна точка з $\mathbb{R}^N$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^N$.

Функції A і a, які визначені формулами (1), і є локальними характеристиками руху. Очевидно, що матриця A є невід'ємно визначеною. У згаданій праці А. М. Колмогоров показав, що ДП тісно пов'язані з ДРЧП другого порядку параболічного типу. А саме, якщо функція P визначає імовірність переходу ДП з матрицею дифузії A і вектором переносу a, то за певних умов функція

$$u(\tau,\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^N} \varphi(x) P(\tau,\xi;t,dx), \tau \in [0,t),\ \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

задовольняє рівняння

$$\partial_\tau u + \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{N} a_{jl}(\tau,\xi)\partial_{\xi_j}\partial_{\xi_l} u + \sum_{j=1}^{N} a_j(\tau,\xi)\partial_{\xi_j} u = 0 \tag{3}$$

та умову

$$\lim_{\tau \to t-} u(\tau,\xi) = \varphi(\xi),\ \xi \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

де a_{jl} — елементи матриці A, a_j — координати вектора a, а ξ_j — координати точки ξ.

Крім рівняння (3), в праці [1] одержане так зване пряме рівняння, яке є формально спряженим до рівняння (3). При цьому рівняння (3) називають оберненим.

Зауважимо, що пряме рівняння для деяких окремих випадків дещо раніше одержане фізиками Фоккером і Планком, які вивчали явище дифузії. Тому його називають і рівнянням Фоккера—Планка або рівнянням Фоккера—Планка—Колмогорова.

Результати А. М. Колмогорова вказували шлях, ідучи яким, можна знайти розв'язок задачі про побудову ДП за заданими дифузійними характеристиками. Цей шлях передбачає наявність низки важливих аналітичних результатів, пов'язаних із вивченням задачі Коші (3), (4). Насамперед це:

1) існування ФРЗК;
2) властивості ФЗРК (оцінки ФРЗК та його похідних, додатність, нормальність, формула згортки);
3) властивості інтеграла Пуассона та об'ємного потенціала, породжених ФРЗК;
4) умови інтегрального зображення розв'язків;
5) коректна розв'язність задачі Коші у відповідних функціональних просторах.

Природним є прагнення одержувати такі результати за мінімальних припущень на коефіцієнти рівняння.

Розвитком і застосуванням аналітичних методів побудови ДП за їх локальними характеристиками за різних припущень займалось чимало авторів, серед них такі, як Н. Вінер, А. М. Колмогоров, В. Феллер, М. В. Крилов, Х. Танака, І. І. Гіхман, А. В. Скороход, М. І. Портенко. Їх зусиллями отримані не тільки різні твердження про існування ДП за досить загальних припущень на дифузійні коефіцієнти, але й різні узагальнення самого поняття ДП (див., наприклад, [5]).

Зауважимо, що рівняння (3) є параболічним. Якщо воно є невиродженим, то невиродженим слід вважати відповідний ДП, а якщо воно вироджується, то й ДП є виродженим.

2. Розглянемо випадок вироджених ДП, які пов'язані з так званими виродженими параболічними рівняннями типу Колмогорова, які є природними узагальненнями класичного рівняння дифузії з інерцією А. М. Колмогорова, що вперше виникло при вивченні моделей броунівського руху.

У класичній теорії броунівського руху, яку розвинули А. Ейнштейн і М. Смолуховський [6] нехтується інерцією броунівської частинки, тобто фактично вважається, що маса цієї частинки дорівнює нулю. У цій теорії броунівська частинка не має скінченної швидкості. За такого припущення моделлю броунівського руху вільної частинки є вінеровський випадковий процес, а для фізичної системи — неперервний марковський процес у просторі її координат.

Недиференційовність броунівських траєкторій в теорії Ейнштейна—Смолуховського тісно пов'язана із введеною у цій теорії ідеалізацією (нехтування інерцією), що робить цю теорію непридатною на дуже малих проміжках часу. У застосуванні до найпростішого випадку броунівського руху вільної частинки теорія, що враховує вже й інерцію частинки, була в 1930 р. розвинута Г. Е. Уленбеком і Л. С. Орнштейном [7]. У цій уточненій теорії траєкторії частинок виявляються вже диференційовними, але вони не мають другої похідної, так що тепер нескінченним є прискорення частинки.

У 1934 р. А. М. Колмогоров [2] узагальнює уточнену теорію броунівського руху на довільну фізичну систему з n степенями вільності. Врахування інерції досягається тим, що стан системи задається значеннями n координат $q_1,...,q_n$. Моделлю броунівського руху системи є неперервний марковський процес у $2n$-вимірному фазовому просторі координат і швидкостей.

У праці [2] припускається, що коли відомі значення $q := \left(q_1,...,q_n\right)$ і $\dot{q} := \left(\dot{q}_1,...,\dot{q}_n\right)$ у момент часу t, то може бути визначена густина ймовірності $G\left(t,q,\dot{q};t',q',\dot{q}'\right)$ можливих значень q' і $\dot{q}'$ координат системи і їх похідних за часом у довільний момент часу $t' > t$. Вважається, що G не залежить від поведінки системи перед моментом t (відсутня післядія, процес є марковським). Доводиться, що функція G є ФРЗК диференціального рівняння Фоккера—Планка

$$\partial_{t'} g = -\sum_{j=1}^{n} \dot{q}'_j \partial_{q'_j} g - \sum_{j=1}^{n} \partial_{\dot{q}'_j} \left(f_j\left(t',q',\dot{q}'\right) g\right) + \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{\dot{q}'_j} \partial_{\dot{q}'_l} \left(k_{jl}\left(t',q',\dot{q}'\right) g\right). \quad (5)$$

У випадку $n = 1$ це рівняння має вигляд

$$\partial_{t'} g = -\dot{q}' \partial_{q'} g - \partial_{\dot{q}'} \left(f\left(t',q',\dot{q}'\right) g\right) + \partial_{\dot{q}'}^2 \left(k\left(t',q',\dot{q}'\right) g\right). \quad (6)$$

Якщо f і k сталі, то, як показав А. М. Колмогоров, ФРЗК для рівняння (6) визначається формулою

$$G\left(t,q,\dot{q};t',q',\dot{q}'\right) = 2\sqrt{3}\pi^{-1} k^{-2} \left(t'-t\right)^{-2} \exp\Big\{ -\left(4k\left(t'-t\right)\right)^{-1} \times$$
$$\times \left(\dot{q}' - \dot{q} - f\left(t'-t\right)\right)^2 - 3k^{-1}\left(t'-t\right)^{-3} \left(q' - q - 2^{-1}\left(t'-t\right)^2 \left(\dot{q}' + \dot{q}\right)\right) \Big\}, \quad (7)$$
$$t < t', \quad \left\{q,\dot{q},q',\dot{q}'\right\} \subset \mathbb{R}.$$

Це класична формула для ФРЗК для рівняння з інерцією А. М. Колмогорова.

Рівняння (5), (6) є прототипом сім'ї еволюційних рівнянь, які виникають у кінетичній теорії газу. У найбільш загальному вигляді такі рівняння записують у формі

$$Su = I(u). \tag{8}$$

Тут функція $\mathbb{R}^{2n} \ni x \to u(t,x) \in \mathbb{R}$ є густиною частинок, які мають у момент часу t швидкості $x_1,...,x_n$ і координати $x_{n+1},...,x_{2n}$:

$$Su := \partial_t + \sum_{j=1}^{n} x_j \partial_{x_{n+j}} u$$

є так званою повною похідною від u, а $I(u)$ описує різного роду зіткнення. Вираз $I(u)$ може мати як лінійну, так і нелінійну форму. Наприклад, у випадку звичайного рівняння Фоккера—Планка маємо

$$I(u) = -\sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\left(t,x\right)\partial_{x_j}\partial_{x_l}u + \sum_{j=1}^{n} a_j\left(t,x\right)\partial_{x_j}u + a_0\left(t,x\right)u.$$

У рівнянні Фоккера—Планка—Ландау нелінійний оператор зіткнень має вигляд

$$I(u) = \sum_{j,l=1}^{n} \partial_{x_j}\left(a_{jl}\left(z,u\right)\partial_{x_l}u + a_j\left(z,u\right)\right).$$

При вивченні математичних моделей опціонів виникає рівняння вигляду

$$\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d} a_{jl}\left(t,x\right)\partial_{x_j}\partial_{x_l}u + \sum_{j,l=1}^{N} b_{jl}x_l\partial_{x_l}u + \sum_{j=1}^{d} b_j\left(t,x\right)\partial_{x_j}u + \partial_t u = 0, \tag{9}$$

де $d \le N, B := \left(b_{jl}\right)_{j,l=1}^{N}$ — стала матриця, а $b := \left(b_1,...,b_N\right)$ — вектор такий, що $b_{d+1} = ... = b_N = 0$. Останнім часом дослідженню математичних моделей опціонів присвячено чимало праць (див. огляд [8] і наведену там бібліографію).

У праці [9] розглядається фізична задача, математичний апарат якої близький до запропонованого в [2]. У ній розглядається рух частинки P маси m в полі сил F. Припускається, що середовище, в якому відбувається рух, заповнене однорідними частинками маси μ, з якими частинка P може зіштовхуватися, змінюючи свою траєкторію за законом пружного зіткнення. Вважається, що розподіл швидкостей частинок середовища заданий і не залежить від руху частинки P, а число зіткнень за час t являє собою процес Пуассона з параметром a. За таких припущень місцезнаходження $X_\mu(t)$ і швидкість $\dot{X}_\mu(t)$ частинки P в момент часу

t утворюють у сукупності марковський процес $\left\{X_\mu(t), \dot{X}_\mu(t)\right\}$. Доводиться, що при $a \to \infty$, $a\mu \to A/2 = \boldsymbol{const}$ і при незмінній температурі T цей процес збігається до процесу броунівського руху в фазовому просторі, густина ймовірності переходу якого є ФРЗК для рівняння

$$\begin{gathered}\partial_t u = \sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \partial_{x_j} u + \sum_{j=1}^{n} F_j(x) \partial_{\dot{x}_j} u + \\ +\left(A/m\right)\left(\left(T/9m\right)\sum_{j=1}^{n} \partial_{\dot{x}_j}^2 u - \left(1/3\right)\sum_{j=1}^{n} \dot{x}_j \partial_{\dot{x}_j} u\right).\end{gathered} \tag{10}$$

Відомо [10; 11], що невироджені ДП з досить регулярними характеристиками мають гладку перехідну густину. Виродження матриці дифузії, взагалі кажучи, призводить до відсутності густини в перехідної функції. Однак існують деякі класи вироджених процесів, у яких є гладка перехідна густина. До таких процесів відносяться процеси броунівського руху з інерцією, які розглянуті А. М. Колмогоровим, А. М. Ільїним і Р. З. Хасьмінським та ін.

У праці І. М. Соніна [12] вивчається клас ДП, які є природним узагальненням процесу дифузії з інерцією. Перехідна густина цих процесів будується як ФРЗК для рівняння вигляду

$$\begin{gathered}\partial_t u = \left(\left(1/2\right) \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\left(t,x,y,z\right) \partial_{y_j} \partial_{y_l} + \sum_{j=1}^{n} a_j\left(t,x,y,z\right) \partial_{y_j} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{n} b_j\left(t,x,y,z\right) \partial_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} c_j\left(t,x,y,z\right) \partial_{z_j}\right) u, \quad \left\{x,y,z\right\} \subset \mathbb{R}^n,\end{gathered} \tag{11}$$

де $b_j\left(t,x,y,z\right)$ улаштовані “приблизно” як y_j, а $c_j\left(t,x,y,z\right)$ — як x_j. Існування ФРЗК для рівняння (11) доведено в припущенні, що коефіцієнти рівняння є досить гладкими функціями.

Рівняння (5), (6), (8)—(11) є виродженими параболічними рівняннями з частинними похідними. Вони містять за частиною просторових змінних у сенсі теорії параболічних рівнянь тільки молодші похідні. Такі рівняння відносяться до класу ультрапараболічних рівнянь. Їх ще називають рівняннями Фоккера—Планка—Колмогорова відповідних вироджених процесів.

Розвиток теорії ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова здійснювався в напрямку знаходження найслабших умов, за яких існує ФРЗК, одержання точніших оцінок ФРЗК, ускладнення структури рівняння.

За різних припущень на коефіцієнти рівнянь дослідження ФРЗК та коректної розв’язності задачі Коші для вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова займались М. Вебер, А. М. Ільїн, І. М. Сонін, Я. Й. Шатиро, Л. П. Купцов, С. Д. Ейдельман, Г. П. Малицька, Л. М. Тичинська, С. Д. Івасишен, Л. М. Андросова, В. С. Дронь та ін. (див. [3]).

У великому циклі праць італійських математиків (див. огляд [13]) вивчаються рівняння типу Колмогорова вигляду

$$Lu := \sum_{j,l=1}^{p_0} a_{jl}\left(t,x\right)\partial_{x_j}\partial_{x_l}u + \sum_{j=1}^{p_0} a_j\left(t,x\right)\partial_{x_j}u + c\left(t,x\right)u + \\ + \sum_{j,l=1}^{N} b_{jl}x_j\partial_{x_l}u - \partial_t u = 0, \tag{12}$$

де $1 \le p_0 < N$, матриця $A_0 := \left(a_{jl}\right)_{j,l=1}^{p_0}$ симетрична та додатно визначена, а матриця $B := (b_{jl})_{j,l=1}^{N}$ зі сталими дійсними елементами має вигляд

$$\begin{pmatrix} * & B_1 & 0 & \dots & 0 \\ * & * & B_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ * & * & * & \dots & B_r \\ * & * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

Тут B_j матриці розміру $p_{j-1} \times p_j$, ранг яких дорівнює p_j, де $p_0, p_1, ..., p_r$ — натуральні числа такі, що $p_0 \ge p_1 \ge ... \ge p_r \ge 1$, $p_0 + p_1 + ... + p_r = N$, а $*$—блоки є довільними.

Зауважимо, що за накладених на матрицю B умов для оператора L із (12) з фіксованими в кожній точці (t,x) коефіцієнтами виконується умова гіпоеліптичності Л. Хермандера.

У монографії [3] наведено результати побудови й дослідження властивостей ФРЗК для рівняння типу (11) за значно слабших, ніж у [12], умов на їх коефіцієнти. У наступному пункті коротко опишемо найновіші результати, що стосуються ФРЗК для рівнянь типу (11).

3. Об'єктом дослідження в цьому пункті є ФРЗК деяких вироджених параболічних рівнянь, який природно визначає перехідну густину ймовірності відповідних ДП зі значеннями в n-вимірному фазовому просторі $\mathbb{R}^n$ точок x з трьома групами фазових координат $x_s := \left(x_{s1}, ..., x_{sn_s}\right) \in \mathbb{R}^{n_s}$, $s \in \left\{1,2,3\right\}$, де $n = n_1 + n_2 + n_3$, $1 \le n_3 \le n_2 \le n_1$.

Розглянемо рівняння з дійснозначними коефіцієнтами

$$\left(S - \sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}\left(t,x\right)\partial_{x_{1j}}\partial_{x_{1l}} - \sum_{j=1}^{n_1} a_j\left(t,x\right)\partial_{x_{1j}} - a_0\left(t,x\right)\right)\times \\ \times u\left(t,x\right) = 0, \quad \left(t,x\right) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{13}$$

і відповідне спряжене до нього рівняння

$$S^* v(\tau,\xi) - \sum_{j,l=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}} \partial_{\xi_{1l}} \left(a_{jl}(\tau,\xi) v(\tau,\xi) \right) + \sum_{j=1}^{n_1} \partial_{\xi_{1j}} \left(a_j(\tau,\xi) v(\tau,\xi) \right) - \\ - a_0(\tau,\xi) v(\tau,\xi) = 0, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[0,T)}, \tag{14}$$

де $\Pi_H := \left\{ (t,x) \mid t \in H, x \in \mathbb{R}^n \right\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T — задане додатне число; S — диференціальний вираз, який визначений формулою

$$S := \partial_t - \sum_{j=1}^{n_2} x_{1j} \partial_{x_{2j}} - \sum_{j=1}^{n_3} x_{2j} \partial_{x_{3j}}$$

або похідна Лі відносно векторного поля, заданого цим виразом, а S^* — спряжений до S диференціальний вираз.

Щоб сформулювати припущення щодо коефіцієнтів рівняння (13), введемо такі позначення:

$$d(x;\xi) := \sum_{s=1}^{3} \left| x_s - \xi_s \right|^{1/(2s-1)}, \quad d(t,x;\tau,\xi) := \left| t - \tau \right|^{1/2} + d(x;\xi) -$$

відстані між точками x і ξ, (t,x) і (τ,ξ) відповідно;

$$\Delta_x^{\xi} f(\cdot,x) := f(\cdot,x) - f(\cdot,\xi), \ \Delta_{t,x}^{\tau,\xi} f(t,x,\cdot) := f(t,x,\cdot) - f(\tau,\xi,\cdot);$$

$$X(t) := \left(X_1(t), X_2(t), X_3(t) \right), \ X_1(t) := x_1,$$

$$X_s(t) := \left(X_{s1}(t), \ldots, X_{sn_s}(t) \right), \ s \in \{1,2,3\},$$

$$X_{2j}(t) := x_{2j} + t x_{1j}, \ X_{3j}(t) := x_{3j} + t x_{2j} + 2^{-1} t^2 x_{1j}.$$

Для коефіцієнтів рівняння (13) використовуватимемо такі умови:

A_1) існує така стала $\delta > 0$, що для довільних $(t,x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ справджується нерівність

$$\sum_{j,l=1}^{n_1} a_{jl}(t,x) \sigma_{1j} \sigma_{1l} \geq \delta \left| \sigma_1 \right|^2;$$

A_2) коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 обмежені та неперервні за Гельдером з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$;

A_3) існують обмежені та неперервні за Гельдером з показником $\alpha \in (0,1)$ в $\Pi_{[0,T]}$ похідні $\partial_{x_{1j}} \partial_{x_{1l}} a_{jl}$ і $\partial_{x_j} a_j$.

Правильною є така теорема.

Теорема. Якщо виконуються умови A_1 і A_2, то для рівняння (13) існує ФРЗК Z, для якого справджуються оцінки

$$\left| \partial_{x_1}^{k_1} Z(t,x;\tau,\xi) \right| \leq C(t-\tau)^{-M-|k_1|/2} E_c(t,x;\tau,\xi), \quad |k_1| \leq 2,$$

$$\left|SZ(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(t-\tau)^{-M-1}E_c(t,x;\tau,\xi),$$

$$\left|\Delta_x^{x'}\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(d(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M-(|k_1|+\alpha)/2}\times$$

$$\times\,(E_c(t,x;\tau,\xi)+E_c(t,x';\tau,\xi)),\quad |k_1|\le 2,$$

$$\left|\Delta_x^{x'}SZ(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(d(x;x'))^{\alpha}(t-\tau)^{-M-1-\alpha/2}\times$$

$$\times\,(E_c(t,x;\tau,\xi)+E_c(t,x';\tau,\xi)),$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}\partial_{x_1}^{k_1}Z(t,x;\tau,\xi)d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-(|k_1|-\alpha)/2},\quad 0<|k_1|\le 2,$$

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}SZ(t,x;\tau,\xi)d\xi\right| \le C(t-\tau)^{-1+\alpha/2},$$

в яких $0\le\tau<t\le T$, $\{x,x',\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, C і c — додатні сталі, $M:=(n_1+$ $+3n_2+5n_3)/2$, $E_c\left(t,x;\tau,\xi\right):=\exp\left\{-c\sum_{s=1}^{3}(t-\tau)^{1-2s}\left|X_s(t-\tau)-\xi\right|^2\right\}$.

За додаткової умови A_3 ФРЗК Z має такі властивості:

1) він є нормальним, тобто функція

$$Z^*\left(\tau,\xi;t,x\right):=Z\left(t,x;\tau,\xi\right),\ 0\le\tau<t\le T,\ \{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n,$$

є ФРЗК для спряженого рівняння (14);

2) правильна формула згортки

$$Z\left(t,x;\tau,\xi\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z\left(t,x;\lambda,y\right)Z\left(\lambda,y;\tau,\xi\right)dy,$$

$$0\le\tau<\lambda<t\le T,\ \{\xi,x\}\subset\mathbb{R}^n;$$

3) існує лише один нормальний ФРЗК для рівняння (13);

4) коефіцієнти рівняння (14) виражаються через функцію Z за такими формулами:

$$a_{jl}\left(t,x\right)=2^{-1}\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(y_{1j}-x_{1j}\right)\left(y_{1l}-x_{1l}\right)Z\left(t,x;\tau,y\right)dy\right),$$

$$a_j\left(t,x\right)=\lim_{\tau\to t}\left(\left(t-\tau\right)^{-1}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(y_{1j}-x_{1j}\right)Z\left(t,x;\tau,y\right)dy\right),$$

$$a_0(t,x)=\lim_{\tau\to t}\left((t-\tau)^{-1}\left(\int\limits_{\tau}^{t}d\theta\int\limits_{\mathbb{R}^n}Z\left(t,x;\theta,y\right)dy-1\right)\right),\ (t,x)\in\Pi_{(0,T]};$$

5) функція Z додатна;

6) існує число $\Delta \in (0,T)$ таке, що для будь-яких $t_0 \in [0,T-\Delta]$, $(t,x) \in \Pi_{(t_0,t_0+\Delta]}$ і $\delta \in (0,t-t_0)$ існують числа $\omega > 0$ і $\gamma > 0$, з якими справджується така оцінка знизу:

$$Z(t,x;\tau,\xi) \geq \omega \exp\left\{-\gamma |\xi|^2\right\}, \quad (\tau,\xi) \in \Pi_{[t_0,t-\delta]}.$$

4. Зробимо деякі прикінцеві зауваження.

1) Неперервність за Гельдером, яка фігурує в умовах A_2 і A_3, потребує уточнення. Її зміст повністю розкрито в [3]. Як відзначено в праці [14], у теоремі з пункту 3 стверджується про існування фундаментального розв'язку, взагалі кажучи, не в класичному сенсі, а в сенсі так званого L-розв'язку.

2) У праці [15] знайдена явна формула для ФРЗК для рівняння (13), в якому коефіцієнти a_{jl}, a_j і a_0 є сталими.

3) Рівняння (13) містить три групи просторових змінних x_1, x_2 і x_3. Якщо є тільки дві групи x_1 і x_2, то у відповідному рівнянні відсутня сума з похідними за x_3 (див. вираз для S). Для такого рівняння є правильними результати, які одержуються з вищенаведених результатів для рівняння (13), якщо взяти формально $n_3 = 0$.

4) У статті [16] отримано явну формулу та досліджено властивості ФРЗК для рівняння вигляду

$$\left(\partial_t - \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\partial_{x_j}\partial_{x_l} - \beta\sum_{j=1}^{n} x_j\partial_{x_j} - \sum_{j=1}^{m} x_j\partial_{y_j}\right)u(t,X) = 0,$$

$$t > 0, \ X := (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m},$$

де $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$, a_{jl}, β – дійсні сталі, причому $a_{jl} = a_{lj}$, $\{j,l\} \subset \{1,\ldots,n\}$, і виконується умова параболічності

$$\exists\, \delta > 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n : \ \sum_{j,l=1}^{n} a_{jl}\,\xi_j\xi_l \geq \delta |\xi|^2 .$$

Список використаних джерел:

1. Kolmogoroff A. N. Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung / A. N. Kolmogoroff // Math. Ann. — 1931. — T. 104, № 3. — S. 415—458.
2. Kolmogoroff A. N. Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) / A. N. Kolmogoroff // Ann. Math. — 1934. — T. 35. — S. 116—117.
3. Eidelman S. D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — T. 152. — 390 p.

4. Ivasyshen S. D. The Fokker—Planck—Kolmogorov equations for some degene-rate diffusion processes / S. D. Ivasyshen, I. P. Medynsky // Theory of stochastic prosesses. — 2010. — 16(32), № 1. — P. 57—66.
5. Портенко Н. И. Обобщённые диффузионные процессы / Н. И. Портенко. — К. : Наук. думка, 1982. — 208 с.
6. Эйнштейн А. Броуновское движение : сб. ст. / А. Эйнштейн, М. Смолуховский. — М. ; Л. : ОНТИ, 1936.
7. Uhlenbeck G. E. On the theory of the Brownian motion / G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein // Phys. Rev. — 1930. — T. 36. — P. 823—841.
8. Pascucci A. Kolmogorov equations in physics and in finance / A. Pascucci // Progress in nonlinear differential equations and their applications. — Birkhдuser, 2005. — T. 63. — P. 313—324.
9. Ильин А. М. Об уравнениях броуновского движения / А. М. Ильин, Р. З. Хасьминский // Теория вероятн. и её примен. — 1964. — Т. 9, № 3. — С. 466-491.
10. Дуб Дж. Вероятностные процессы / Дж. Дуб. — М. : Изд-во иностр. лит., 1958.
11. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1963.
12. Сонин И. М. Об одном классе вырождающихся диффузионных процессов / И. М. Сонин // Теория вероятн. и её примен. — 1967. — Т. 12, № 3. — С. 540—547.
13. Pascucci A. Linear and nonlinear ultraparabolic equations of Kolmogorov type arising in diffusion theory and in finance / A. Pascucci, S. Polidoro, E. Lanconelli // Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics. — 2002. — T. 2. — P. 243—265.
14. Івасишен С. Д. Задача Коші для деяких вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова / С. Д. Івасишен, В. В. Лаюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. — 2007. — Т. 50, № 3. — С. 56—65.
15. Івасишен С. Д. Про властивості розв'язків деяких ультрапараболічних рівнянь типу Колмогорова на необмежених часових інтервалах / С. Д. Івасишен, Г. П. Івасюк, Т. М. Фратавчан // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Юрія Федьковича. Сер.: математика : зб. наук. пр. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2011. — Т. 1, № 1—2. — С. 47—56.
16. Бабич О. О. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для виродженого параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами групи молодших членів / О. О. Бабич, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Там само. — С. 13—24.

A short survey of the results over fundamental solutions of the Cauchy problem for some ultraparabolic equations. These equations generalize the classical Kolmogorov equation of diffusion with inertia. They may be interpreted as the Fokker—Planck—Kolmogorov equations for the appropriated degenerated diffusion processes.

Key words: *diffusion process, Fokker—Planck—Kolmogorov equation, degenerate parabolic equation, Cauchy problem, fundamental solution.*

Отримано: 07.04.2011