УДК 517.9

І. А. Джалладова, д-р фіз.-мат. наук, професор

Київський національний економічний університет
ім. В. Гетьмана, м. Київ

УМОВИ СТІЙКОСТІ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ АРГУМЕНТІВ

Побудовано моментні рівняння для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу у випадку, коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму. Досліджено за допомогою побудованих моментних рівнянь умови L_2-стійкості нульового розв'язку та умови стійкості у середньому квадратичному.

Ключові слова: *системи лінійних диференціальних рівнянь, моментні рівняння, запізнення.*

Вступ. При дослідженні динамічних систем із змінною розмірністю фазового простору, випадковими параметрами і скінченною післядією актуальним є вивчення проблеми стійкості руху. Наприклад, в роботах [1; 2] розглядаються питання стійкості руху систем стрибкоподібного типу. В роботі [3] вивчено алгебраїчні критерії стійкості, асимптотичної стійкості динамічних систем. У праці [4] досліджено питання стійкості, асимптотичної стійкості диференціально-функціональних систем нейтрального типу та із запізненням. В монографії [6] викладено загальні теореми і алгоритми практичної стійкості динамічних систем із різними фазовими обмеженнями. В монографії [5] та наукових роботах [7; 8] розглянуто питання стійкості, асимптотичної стійкості, p- стійкості стохастичних динамічних систем із післядією та нейтрального типу. В цій статті, опираючись на методи дослідження стохастичних систем в роботах [9; 10], побудовано моментні рівняння для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із запізненням у випадку, коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму.

Постановка задачі. На ймовірнісному базисі $\left(\Omega, \Im, \mathrm{P}, \mathrm{F} \equiv \equiv \left\{\mathbf{F_t}, t \geq 0\right\}\right)$ розглянуто систему лінійних диференціальних рівнянь із запізненням аргументу для $X(t) \equiv X\left(t, \omega\right)$

$$dX\left(t\right) = A\left(t\right) X\left(t\right) dt + B\left(t\right) X\left(t-\tau\right) dw\left(t\right),\ \tau \geq 0\,, \tag{1}$$

з початковою умовою $\boldsymbol{X}(0) = (\omega) : \Omega \to R^n$, де $w\left(t\right)$ — процес Вінера, для якого виконано умови

$$w\left(0\right) = 0; \quad < w\left(t\right) >= 0\left(t > 0\right); \quad < w^2\left(t\right) >= t\,; \tag{2}$$

$w(t)$ — нормальний процес.

Ставиться задача побудови моментних рівнянь другого порядку для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із запізненням у випадку, коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму.

2. Основний результат.

Теорема 1. Нехай система диференціальних рівнянь (1) має сильний розв'язок $X(t) \equiv X(t,\omega)$. Тоді існують моменти другого порядку $\left\langle X^*(t)X(t)\right\rangle$ випадкового розв'язку $X(t)$ системи рівнянь (1)

$$D(t) \equiv < X(t)X^*(t) >,$$

які задовольняють систему рівнянь

$$\frac{dD(t)}{dt} = D(t)A^*(t) + A(t)D(t) + B(t)D(t-\tau)B^*(t). \tag{3}$$

Доведення. 1. Перейдемо від системи диференціальних рівнянь до апроксимуючої системи різницевих рівнянь $[8; 9]$

$$X_{n+1} = X_n + hA(t_n)X_n + B(t_n)X_{n-N}\sqrt{h}\zeta_n, \tag{4}$$

де використовуються позначення

$$t_n = nh(n = 0,1,2,..); \quad h > 0, \quad X_n = X(nh), \quad N = \tau h^{-1}.$$

«Зірочка» позначає транспонування вектора або матриці. При цьому знаходимо рівність

$$X_{n+1}^* = X_n^* + hX_n^*A_n^* + X_{n-N}^*B_n^*\sqrt{h}\zeta_n.$$

Знаходимо добуток векторів

$$X_{n+1}X_{n+1}^* = X_nX_n^* + hX_nX_n^*A_n^* + hA_nX_nX_n^* + \sqrt{h}\zeta_nX_nX_{n-N}^*B_n^* +$$
$$+\sqrt{h}\zeta_nB_nX_{n-N}X_{n-N}X_n^* + h\zeta_n^2B_nX_{n-N}X_{n-N}^*B_n^* + h^2A_nX_nX_n^*A_n^* +$$
$$+h\sqrt{h}\zeta_nA_nX_nX_{n-N}^*B_n^* + h\sqrt{h}\zeta_nB_nX_{n-N}X_n^*A_n^*.$$

Застосовуємо операцію знаходження математичного сподівання $\langle\cdot\rangle$. Припускаємо, що ζ_n — послідовність незалежних випадкових величин таких, що $\zeta_n = \pm 1$; $P\{\zeta_n = 1\} = 0,5$; $P\{\zeta_n = -1\} = 0,5$

При цьому виконуються рівності

$$\left\langle \zeta_n \right\rangle = 0, \quad \left\langle \zeta_n^2 \right\rangle = 1 \quad (n = 0,1,2,...).$$

Для матриці других початкових моментів

$$D_n = < X_nX_n >, \quad (n = 0,1,2,...),$$

отримаємо систему різницевих рівнянь

$$D_{n+1} = D_n + h_n A_n^* + hA_n D_n + h^2 B_n D_{n-N} B_n^*, \tag{5}$$

яка при $h \to +0$ перетворюється в систему диференціальних рівнянь (3) для матриці $D(t)$.

Означення. Якщо при довільних початкових умовах будь-який розв'язок рівняння (3) прямує до нульової матриці, тоді нульовий розв'язок системи стохастичних диференціальних рівнянь (1) асимптотично стійкий у середньому квадратичному.

3. Загальний випадок. На ймовірнісному базисі $\left(\Omega, \Im, \mathrm{P}, \mathrm{F} \equiv \{\mathbf{F_t}, t \ge 0\}\right)$ розглянемо систему лінійних диференціальних стохастичних рівнянь із декількома аргументами із запізненням

$$dX(t) = A(t)X(t)dt + \sum_{k=1}^{N} B_k(t) X(t-\tau_k) dw_k(t), \tag{6}$$

$$\tau_k \ge 0 \qquad (k = 1,...N),$$

де $w_k(t) \quad (k = 1,...N)$ — незалежні вінеровські випадкові процеси в стандартній формі, що задовольняють умови

$$w_k(0) = 0, \qquad < w_k(t) >= 0, \qquad < w_k^2(t) > t,$$

$$< w_k(t) w_j(t) >= 0 \qquad (k \ne j); k, j = 1,..., N.$$

Теорема 2. Матриці других початкових моментів розв'язку $X(t) \equiv X(t,\omega)$ системи рівнянь (6)

$$D(t) =< X(t) X^*(t) >$$

задовольняють систему матричних диференціальних рівнянь

$$\frac{dD(t)}{dt} = D(t) A^*(t) + A(t) D(t) + \sum_{k=1}^{N} B_k(t) D(t-\tau_k) B_k^*(t). \tag{7}$$

4. Модельна задача. Дослідимо стійкість розв'язків скалярного лінійного стохастичного диференціального рівняння виду (6)

$$dx(t) = ax(t)dt + \sum_{k=1}^{N} b_k x(t-\tau_{\boldsymbol{k}}) dw_k(t), \qquad \tau_k \ge 0 \qquad (k = 1,...N) \tag{8}$$

Рівняння (7) матиме вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = 2ay(t) + \sum_{k=1}^{N} b_k x(t-\tau_k), \ \tau_k \ge 0, \quad (k = 1,...N), \tag{9}$$

для $y(t) =< x^2(t) >$. Згідно з означенням розв'язки рівняння (9) асимптотично стійкі при

$$2a + \sum_{k=1}^{N} b_k^2 < 0,$$

і нестійкі при

$$2a+\sum_{k=1}^{N} b_k^2 > 0\,.$$

Зауваження. Також отримано моментні рівняння, у випадку коли коефіцієнти системи рівнянь (1) залежать від напівмарковського (марковського) процесу.

Висновки. В роботі, опираючись на методи дослідження стохастичних систем в інших роботах автора, побудовано моментні рівняння для розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь із запізненням у випадку, коли права частина системи містить випадкові процеси типу білого шуму.

Список використаних джерел:

1. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 612 с.
2. Скороход А. В. Асимптотические методы в теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 328 с.
3. Кореневский Д. Г. Дестабилизирующий эффект параметрического белого шума в непрерывных и дискретных динамических системах / Д. Г. Кореневский. — К. : Академпериодика, 2008. — 128 с.
4. Хусаинов Д. Я. Метод функций Ляпунова в исследовании устойчивости дифференциально-функциональных систем / Д. Я. Хусаинов, А. В. Шатырко. — К. : Изд-во КНУ, 1997. — 236 с.
5. Острем К. Ю. Введение в стохастическую теорию управления / К. Ю. Острем. — М. : Мир, 1973. — 322 с.
6. Бублик Б. Н. Структурно-параметрическая оптимизация и устойчивость динамики пучков / Б. Н. Бублик, Ф. Г. Гаращенко, Н. Ф. Кириченко. – К. : Вища шк., 1975. – 328 с.
7. Ясинський В. К. Задачі стійкості та стабілізації динамічних систем зі скінченною післядією / В. К. Ясинський, Є. В. Ясинський. — К. : Вид-во «ТВІМС», 2005. — 578 с.
8. Королюк В. С. Проблеми стабілізації імпульсних систем випадкової структури зі скінченною післядією : монографія / В. С. Королюк, В. К. Ясинський, В. І. Мусурівський, І. В. Дорошенко. — Чернівці : Чернівецький національний університет, 2010. — 240 с.
9. Валєєв К. Г. Оптимізація випадкових процесів: монографія / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. — К. : КНЕУ, 2008. — 222 с.
10. Джалладова І. А. Оптимізація стохастичних систем : монографія / І. А. Джалладова. — К. : КНЕУ, 2005. — 221 с.

Constructing the moment's equations for the system of linear differential equations with delay arguments in case where right part of system has random process white noise type. Investigating with help that moment's equations conditions L_2-stability of zero solutions and conditions of stability in mean square.

Key words: *system of linear differential equations, moment's equations, delay arguments.*

Отримано: 21.05.2011