УДК 517.929

Я. Й. Бігун, д-р фіз.-мат. наук,
І. В. Березовська, аспірант

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

УСЕРЕДНЕННЯ В БАГАТОЧАСТОТНІЙ СИСТЕМІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЛІНІЙНО ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ І НЕТЕРОВИМИ КРАЙОВИМИ УМОВАМИ

Для багаточастотної системи рівнянь із лінійно перетвореним аргументом і лінійними нетеровими крайовими умовами для швидких змінних досліджено існування і єдиність розв'язку. На скінченному проміжку одержано оцінку похибки методу усереднення для повільних і швидких змінних, яка явно залежить від малого параметра.

Ключові слова: *метод усереднення, малий параметр, крайова задача, нетерові крайові умови, повільні і швидкі змінні.*

Вступ. Математичними моделями коливних процесів досить часто є системи диференціальних рівнянь, в яких частина змінних еволюціонує з часом повільно (повільні або амплітудні змінні), а інші — швидко (швидкі або фазові змінні). У багатьох випадках, увівши малий параметр $\varepsilon > 0$ такі системи можна записати у вигляді

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon X\left(\tau, a, \varphi\right), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \omega\left(\tau, a\right) + \varepsilon Y\left(\tau, a, \varphi\right), \tag{1}$$

де $\tau = \varepsilon t$, $a \in D$, D — обмежена область в R^n, $\varphi \in R^m$, вектор-функції X і Y — 2π-періодичні за змінними φ_ν, $\nu = 1,\ldots,m$; $\omega(\tau, a)$ — вектор частот, a — вектор повільних, а φ — швидких змінних.

Якісне дослідження і розв'язування системи (1) ускладнюється резонансними явищами, умовою яких у точці (τ, a) є виконання точної

$$\left(k, \omega(\tau, a)\right) = 0 \tag{2}$$

або наближеної рівності, де $k \in Z^m$, $\| k \| := | k_1 | + \ldots + | k_m | \neq 0$, $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток. Зокрема, відхилення повільних змінних системи (1) й усередненої за швидкими змінними системи

$$\frac{d\overline{a}}{dt} = \varepsilon X_0\left(\tau, \overline{a}\right), \quad \frac{d\overline{\varphi}}{dt} = \omega\left(\tau, \overline{a}\right) + \varepsilon Y_0\left(\tau, \overline{a}\right),$$

$$F_0\left(\tau, a\right) = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} F\left(\tau, a, \varphi\right) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m, \ F = \left(X, Y\right),$$

може набувати значень $O(1)$ на інтервалі часу довжиною $L\varepsilon^{-1}$.

 © Я. Й. Бігун, І. В. Березовська, 2011

Перший результат з обґрунтування методу усереднення для системи рівнянь (1), коли $m = 2$, $\omega = \omega(a)$, X і Y — аналітичні функції змінних a і φ, доведено В. І. Арнольдом [1]. Ряд результатів з обґрунтування методу усереднення одержано у працях А. І. Нейштадта [2], М. Додсона [3], Є. О. Грєбєнікова [4], М. М. Хапаєва [5] та інших математиків. Новий підхід із дослідження багаточастотних систем запропонований А. М. Самойленком у праці [6]. Для цього система (1) записується вигляді

$$\frac{da}{d\tau} = X\left(\tau, a, \varphi\right), \ \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega\left(\tau, a\right)}{\varepsilon} + Y\left(\tau, a, \varphi\right), \tag{3}$$

і вводиться осциляційний інтеграл, для якого будується оцінка, явно залежна від параметра ε. Як наслідок, одержується оцінка похибки методу усереднення. Зокрема, для вектора частот $\omega = \omega(\tau)$ оцінка має порядок $\sqrt[m]{\varepsilon}$. Для широких класів багаточастотних систем звичайних диференціальних рівнянь із початковими та крайовими умовами метод усереднення обґрунтовано у працях А. М. Самойленка і Р. І. Петришина (див. монографію [7] та бібліографію в ній).

Для адекватнішого опису коливних процесів необхідно враховувати ефект післядії, викликаний інформаційним або технологічним запізненням, запізненням розвитку тощо. Асимптотичні методи для таких систем розвинуті в працях В. П. Рубаника [8], Ю. О. Митропольського і Д. І. Мартинюка [9] та ін.

Нетерові крайові задачі для звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь із запізненням досліджувались у працях А. М. Самойленка, О. А. Бойчука та інших математиків (див. монографію [10] та бібліографію в ній). Деякі питання для багаточастотних систем із нетеровими крайовими умовами вивчались в [11].

Метод усереднення для багаточастотних систем із запізненням обґрунтовано у роботах Я. Й. Бігуна і А. М. Самойленка [12], Я. Й. Бігуна [13; 14] та ін. Деякі критичні випадки для систем із лінійно перетвореним аргументом розглянуто у роботі Р. І. Петришина і Я. Й. Бігуна [15].

У даній роботі розглянуто систему із лінійно перетвореним аргументом, розв'язок якої задовольняє двоточкові та інтегральні крайові умови. Причому крайові умови для швидких змінних є нетеровими. Такого типу крайові задачі для багаточастотних систем раніше не розглядались.

1. Постановка задачі. Нехай: λ_i і θ_j — числа з напівінтервалу $(0,1]$, $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_{r_1} \le 1$, $0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{r_2} \le 1$, $a_{\lambda_i}(\tau) = a(\lambda_i \tau)$, $\varphi_{\theta_j}(\tau) = \varphi\left(\theta_j \tau\right)$, $a_\Lambda = \left(a_{\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda_{r_1}}\right)$, $\varphi_\Theta = \left(\varphi_{\theta_1}, \ldots, \varphi_{\theta_{r_2}}\right)$.

Розглянемо m-частотну систему диференціальних рівнянь із лінійно перетвореним аргументом

$$\frac{da}{d\tau} = X\left(\tau, a_{\Lambda}, \varphi_{\Theta}\right), \tag{4}$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y\left(\tau, a_{\Lambda}, \varphi_{\Theta}\right), \tag{5}$$

де $a \in D$, $\varphi \in R^m$, $\tau \in [0, L]$, вектор-функції X і Y — 2π-періодичні за змінними φ_{θ_j}, $j = 1, ..., r_2$. Якщо $r_1 = r_2 = 1$ і $\lambda_1 = \theta_1 = 1$, то одержимо систему рівнянь (3). Системи, коли $r_1 = r_2 = 2$, $\lambda_1 < \lambda_2 = 1$ і $\theta_1 < \theta_2 = 1$, розглядались в роботах [13; 14].

Задамо для системи (4), (5) крайові умови [16]

$$A_0 a\big|_{\tau=0} + A_1 a\big|_{\tau=L} + \int_0^L f\left(s, a_{\Lambda}(s), \varphi_{\Theta}(s)\right) ds = d, \tag{6}$$

$$B_0 \varphi|_{\tau=0} + B_1 \varphi|_{\tau=L} + \int_0^L B(s)\varphi(s) ds = g_0 a|_{\tau=0} + g_1 a|_{\tau=L} + g_2 \int_0^L a(s) ds, \tag{7}$$

де f — задана n-вимірна функція 2π-періодична за компонентами φ_{Θ}, A_0, A_1 — сталі $(n \times n)$, B_0, B_1 — сталі $(q \times m)$ — матриці, а B такої ж розмірності вектор-функція, d — заданий n-вектор, g_0, g_1, g_2 — сталі $(q \times n)$ — матриці.

Відповідна (4), (5) усереднена за швидкими змінними система рівнянь набуває вигляду

$$\frac{d\overline{a}}{d\tau} = X_0\left(\tau, \overline{a}_{\Lambda}\right), \tag{8}$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y_0\left(\tau, \overline{a}_{\Lambda}\right). \tag{9}$$

Ця система хоч і містить запізнення при $\tau > 0$, але праві частини не залежать від швидких змінних і знаходження компоненти розв’язку $\overline{\varphi}(\tau)$ зводиться до інтегрування, якщо задано початкове значення $\overline{\varphi}(0)$ і відомо $\overline{a}(\tau)$.

Для розв’язку усередненої системи рівнянь (8), (9) задаються крайові умови

$$A_0 \overline{a}|_{\tau=0} + A_1 \overline{a}|_{\tau=L} + \int_0^L f_0\left(s, \overline{a}_{\Lambda}(s)\right) ds = d, \tag{10}$$

$$B_0\overline{\varphi}\,|_{\tau=0} + B_1\overline{\varphi}\,|_{\tau=L} + \int_0^L B(s)\overline{\varphi}(s)ds = g_0\overline{a}\,|_{\tau=0} + g_1\,\overline{a}\,|_{\tau=L} + g_2\int_0^L \overline{a}(s)ds. \quad (11)$$

Під розв'язком задачі (4)—(7) розумітимемо вектор-функцію $\{a(\tau),\varphi(\tau)\}$, яка задовольняє систему рівнянь (4), (5) і крайову умову (6) у класичному розумінні, а крайову умову (7) як псевдорозв'язок [10]. Тобто при підстановці $\varphi=\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)$, $\varphi(0,y,\psi,\varepsilon)=\psi$, в умову (7) початкове значення ψ знаходитиметься як вектор, що мінімізує евклідову норму нев'язки і норма якого, при цьому, найменша.

2. Умови і допоміжні результати. Умовою резонансу частот у системі (4), (5) в точці τ є виконання рівності [12; 14]:

$$\gamma_l(\tau) := \sum_{j=1}^{r_2}\theta_j\left(l^{(j)},\omega(\theta_j\tau)\right)=0\,, \quad (12)$$

де $l^{(j)}\in Z^m$, $\sum_{j=1}^{r_2}\left\|l^{(j)}\right\|\neq 0$. Якщо $r_2=1$ і $\theta_1=1$, то маємо умову (2).

Припустимо, що виконуються наступні умови:

1^0. Вектор-функція $F\in C^1_{\tau,a_\Lambda}(G,\sigma_1)$, де $G=[0,L]\times D^{r_1}\times R^{mr_2}$, $F:=\left(X,Y,f\right)$, сталою σ_1 обмежені норми вектор-функції F та її похідних за τ і a_Λ;

2^0. $F\in C^{q_1}_{\varphi_\Theta}\left(G,\sigma_1\right)$, $\dfrac{\partial F}{\partial a_\Lambda}\in C^{q_2}_{\varphi_\Theta}\left(G,\sigma_1\right)$; $\dfrac{\partial^2 F}{\partial\tau\partial a_\Lambda}\in C^{q_3}\left(G,\sigma_1\right)$, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial a_\Lambda\partial a_\nu^{(i)}}\in C^{q_3}\left(G,\sigma_1\right)$, $i=1,\dots,r_1$, $\nu=1,\dots,n$; $\min\left(q_1-2,q_2-1,q_3\right)\geq mr_2$;

3^0. Умови «незастрягання» системи на резонансі:

$$\omega_\nu\in C^{p-1}[0,L],\ p\geq mr_2\,,$$

$$\left\|(W_p^T(\tau)W_p(\tau))^{-1}W_p(\tau)\right\|\leq\sigma_2\,,\ \tau\in[0,L]\,, \quad (13)$$

де $W_p(\tau)-(p\times mr_2)$ — матриця, $((\nu-1)m+k)$-й стовпець якої утворений елементами $\dfrac{d\omega_\nu^k(\xi_j)}{d\tau^k}$, $\xi_j(\tau)=\theta_j\tau$, $k=0,\dots,p-1$, $\nu=1,\dots,m$, $j=1,\dots,r_2$. Якщо $p=mr_2$, то $\det W_p(\tau)$ — визначник Вронського за системою функцій $\left\{\omega\left(\theta_1\tau\right),\dots,\omega\left(\theta_{r_2}\tau\right)\right\}$. Наприклад, для $m=2$, $r_2=2$ і $p=4$ маємо:

$$W_4(\tau)=\begin{bmatrix} \omega_1(\xi_1) & \omega_2(\xi_1) & \omega_1(\xi_2) & \omega_2(\xi_2) \\ \theta_1\dfrac{d\omega_1(\xi_1)}{d\xi_1} & \theta_1\dfrac{d\omega_2(\xi_1)}{d\xi_1} & \theta_2\dfrac{d\omega_1(\xi_2)}{d\xi_2} & \theta_2\dfrac{d\omega_2(\xi_2)}{d\xi_2} \\ \theta_1^2\dfrac{d^2\omega_1(\xi_1)}{d\xi_1^2} & \theta_1^2\dfrac{d^2\omega_2(\xi_1)}{d\xi_1^2} & \theta_2^2\dfrac{d^2\omega_1(\xi_2)}{d\xi_2^2} & \theta_2^2\dfrac{d^2\omega_2(\xi_2)}{d\xi_2^2} \\ \theta_1^3\dfrac{d^3\omega_1(\xi_1)}{d\xi_1^3} & \theta_1^3\dfrac{d^3\omega_2(\xi_1)}{d\xi_1^3} & \theta_2^3\dfrac{d^3\omega_1(\xi_2)}{d\xi_2^3} & \theta_2^3\dfrac{d^3\omega_2(\xi_2)}{d\xi_2^3} \end{bmatrix}.$$

Як показано в [13], при виконанні умов 1^0, перших двох умови 2^0 і 3^0 для досить малого $\varepsilon_1\in(0,\varepsilon_0]$ на проміжку $[0,L]$ існує єдиний розв'язок системи рівнянь (4), (5) з тими ж початковими умовами (y,ψ), що і для розв'язку усередненої системи, для всіх $\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ виконується оцінка

$$\left\|a(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,y)\right\|+\left\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,y,\psi,\varepsilon)\right\|\le c_1\varepsilon^{\alpha}, \quad (14)$$

де $\alpha=p^{-1}$, $c_1>0$ і не залежить від ε.

Якщо ж виконуються і дві останні умови 2^0, то така ж оцінка правильна і для похідних відхилення розв'язків за початковими умовами y і ψ. Вважатимемо, що для цієї оцінки коефіцієнт також дорівнює c_1.

3. Обґрунтування методу усереднення

Теорема. Нехай:

1) виконуються умови 1^0-3^0;
2) існує єдиний розв'язок $\overline{a}=\overline{a}(\tau,\overline{y})$, $\overline{a}(0,\overline{y})=\overline{y}$ крайової задачі (8), (10), який лежить в D разом із деяким ρ-околом;
3) матриця $M_1=A_0+A_1\dfrac{\partial\overline{a}(L,\overline{y})}{\partial\overline{y}}+\int\limits_0^L f_0\left(s,\overline{a}(s,\overline{y})\right)\dfrac{\partial\overline{a}(s,\overline{y})}{\partial\overline{y}}ds$ — невироджена, а $M_2=B_0+B_1+\int\limits_0^L B(s)ds$ — $(q\times m)$-матриця повного рангу, причому $q\ge m$.

Тоді знайдуться такі стала $c_{10}>0$ і $\varepsilon_2>0$, що для кожного $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ існує єдиний розв'язок крайової задачі (4)—(7), причому для швидких змінних φ як псевдорозв'язок, і для всіх $\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ виконується оцінка

$$\left\|a(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{a}(\tau,y)\right\|+\left\|\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,y,\psi,\varepsilon)\right\|\le c_{10}\varepsilon^{\alpha}.$$

Доведення. Оцінка відхилення повільних змінних одержується згідно зі схемою доведення роботи [13], з нерівності

$$\begin{aligned}&\left\|a\left(\tau,\bar{y}+\mu,\psi,\varepsilon\right)-\bar{a}\left(\tau,\bar{y}\right)\right\|\le\\ &\le\left\|a\left(\tau,\bar{y}+\mu,\psi,\varepsilon\right)-\bar{a}\left(\tau,\bar{y}+\mu\right)\right\|+\left\|\bar{a}\left(\tau,\bar{y}+\mu\right)-\bar{a}\left(\tau,\bar{y}\right)\right\|,\end{aligned}\tag{15}$$

де $\mu\in R^n$ знаходиться із умови того, що вектор-функція $a\left(\tau,\bar{y}+\mu,\psi,\varepsilon\right)$ задовольняє крайову умову (6). Якщо виконуються умови 1) і 2) теореми, то існує єдине значення μ, причому $\|\mu\|\le c_2\varepsilon^{\alpha}$, якщо $\varepsilon\le\varepsilon_1\le\varepsilon_0$. Тоді з нерівності (15) й оцінки для μ маємо $\left\|a\left(\tau,\bar{y}+\mu,\psi,\varepsilon\right)-\bar{a}\left(\tau,\bar{y}\right)\right\|\le c_3\varepsilon^{\alpha}$, і ця оцінка правильна для всіх $\tau\in[0,L]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_2]$ і $\psi\in R^m$.

Розглянемо тепер питання про оцінку відхилення швидких змінних $\varphi\left(\tau,y,\psi,\varepsilon\right)$ та $\bar{\varphi}(\tau,\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon)$. Нехай $\psi=\bar{\psi}+\xi$. Підставивши $\varphi(\tau,y,\psi,\varepsilon)$ в крайові умови (7) і віднявши від одержаної рівності (11), матимемо

$$\begin{aligned}&\left(B_0+B_1+\int_0^L B(s)ds\right)\xi=-B_1\left(\varphi\left(L,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\bar{\varphi}\left(L,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)\right)-\\ &\quad -B_1\int_0^L\left(Y_0\left(L,\bar{a}\left(s;\bar{y}+\mu\right)\right)-Y_0\left(L,\bar{a}\left(s;\bar{y}\right)\right)\right)ds-\\ &\quad -\int_0^L B(s)\left(\varphi\left(s,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\bar{\varphi}\left(s,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)\right)ds-\\ &\quad -\int_0^L B(s)\int_0^{s_1}\left(Y_0\left(s_1,\bar{a}\left(s_1;\bar{y}+\mu\right)\right)-Y_0\left(s_1,\bar{a}\left(s_1;\bar{y}\right)\right)\right)ds_1ds+\\ &+g_0\left(a\left(0,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\bar{a}\left(0,\bar{y}\right)\right)+g_1\left(a\left(L,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\bar{a}\left(L,\bar{y}\right)\right)+\\ &\quad +g_2\int_0^L\left(a\left(s,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\bar{a}\left(s,\bar{y}\right)\right)ds:=\Phi_1\left(\xi,\mu,\varepsilon\right).\end{aligned}$$

Звідси маємо

$$\xi=\Phi\left(\xi,\mu,\varepsilon\right),$$

де $\Phi\left(\xi,\mu,\varepsilon\right)=M_2^{+}\Phi_1\left(\xi,\mu,\varepsilon\right)$, M_2^{+} — псевдообернена за Муром-Пенроузом матриця до матриці M_2 і має вигляд $M_2^{+}=\left(M_2^TM_2\right)^{-1}M_2^T$.

Виберемо ξ із деякої кулі радіусом $c_4\varepsilon^{\alpha}$, де c_4 буде вказано нижче. Побудуємо оцінку для вектор-функції $\Phi(\xi,\mu,\varepsilon)$. На підставі умови 1^0 маємо $\sup\left\|\frac{\partial Y_0(\tau,\overline{y})}{\partial \overline{a}_{\Lambda}}\right\| \le c_5$. При виконанні умови 2^0, як показано в [12], $\sup\left\|\frac{\partial \overline{a}_{\Lambda}(\tau,\overline{y})}{\partial \overline{y}}\right\| \le c_6$.

Враховуючи одержані оцінки та оцінку (14), отримуємо

$$\left\|\Phi\left(\xi,\mu,\varepsilon\right)\right\| \le c_4\varepsilon^{\alpha},$$

де

$$c_4 = \left\|M_2^+\right\|\left(\left\|B_1\right\|c_1 + c_2c_5c_6L\left\|B_1\right\| + c_1\int_0^L B(s)ds + c_2c_5c_6\int_0^L B(s)dsL + c_7\right),$$

$$c_7 = c_3\left(\| g_0 \| + \| g_1 \| + \| g_2 \| L\right).$$

Покажемо, що $\Phi\left(\xi,\mu,\varepsilon\right)$ є відображенням стиску. Справді,

$$\frac{\partial\Phi\left(\xi,\mu,\varepsilon\right)}{\partial\xi} = -M_2^+(B_1\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\left(L,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\overline{\varphi}\left(L,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)\right)+$$

$$+\int_0^L B(s)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\varphi\left(s,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\overline{\varphi}\left(s,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)\right)ds-$$

$$+g_0\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a\left(0,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\overline{a}\left(0,\overline{y}+\mu\right)\right)+$$

$$+g_1\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a\left(L,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\overline{a}\left(L,\overline{y}+\mu\right)\right)+$$

$$+g_2\int_0^L\frac{\partial}{\partial\xi}\left(a\left(s,\overline{y}+\mu,\overline{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\overline{a}\left(s,\overline{y}+\mu\right)\right)ds.$$

Звідси одержується нерівність

$$\left\|\frac{\partial\Phi(\xi,\mu,\varepsilon)}{\partial\xi}\right\| \le$$

$$\le c_1 \| M_2^+ \| \left(\| B_1 \| + \int_0^L \| B(s) \| ds + \| g_0 \| + \| g_1 \| + \| g_2 \| L\right)\varepsilon^{\alpha} \equiv c_8\varepsilon^{\alpha}.$$

Якщо $\varepsilon \le \varepsilon_2 = \min\left(\varepsilon_1, \left(1/2c_8\right)^{1/\alpha}\right)$, то $\left\|\frac{\partial\Phi(\xi,\mu,\varepsilon)}{\partial\xi}\right\| \le \frac{1}{2}$ для всіх μ,ξ із відповідних куль і $\varepsilon\in[0,\varepsilon_2]$. Таким чином існує єдина нерухома точка ξ відображення Φ . Отже, існує єдиний розв'язок крайової задачі (4)—(7), причому

$$\left\| \varphi\left(\tau,\bar{y}+\mu,\bar{\psi}+\xi,\varepsilon\right)-\bar{\varphi}\left(\tau,\bar{y},\bar{\psi},\varepsilon\right)\right\| \le c_9\varepsilon^{\alpha} ,$$

де $c_9 = c_1 + c_4 + c_5 c_6 c_2 L$. Оцінка в теоремі одержується, якщо покласти $c_{10} = \max(c_3, c_9)$.

Зауваження. Якщо визначник Вронського має нулі на $[0, L]$, кратність яких не перевищує s , то асимптотика оцінки для відхилення розв'язків систем (4), (5) і (8), (9) матиме порядок $\varepsilon^{1/(mr_2+s)}$. Ця оцінка одержується повторним доведенням аналогічної оцінки для систем з одним запізненням [14]. Тоді й відповідна оцінка для відхилення розв'язків цих систем із крайовими умовами (6), (7) і (10), (11) відповідно матиме такий же порядок.

4. Приклади. Проілюструємо одержаний у теоремі результат на модельних прикладах.

Приклад 1. Для системи рівнянь

$$\frac{da}{d\tau} = 1+\cos 4\varphi_{\theta}, \qquad \frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{2\tau}{\varepsilon}, \qquad \theta = \frac{1}{2}$$

задамо початкові і крайові умови

$$a(0) = a_0, \quad \varphi(0)+\varphi(1) = 1, \quad 3\varphi(0)-2\varphi(1) = -2.$$

Оскільки $\omega_1(\tau) = 2\tau$, то є резонанс при $\tau = 0$ і функція $\gamma(\tau) = 2\tau$ має простий нуль. Із крайових умов знаходимо псевдорозв'язок $\varphi(0) = 0$. Для відхилення повільних змінних при $\tau = 1$ на підставі асимптотики інтеграла Френеля маємо:

$$\| a(1,\varepsilon) - \bar{a}(1) \| = \left\| \int_0^1 \cos\frac{\tau^2}{\varepsilon} d\tau \right\| = O(\sqrt{\varepsilon}) .$$

Приклад 2. Розглянемо двочастотну систему рівнянь

$$\frac{da}{d\tau} = \cos\left(\varphi_1 - 3\varphi_{1,\theta} + 2\varphi_2\right), \qquad \tau \in [0,1];$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{4}{\varepsilon}\left(1+\tau+\frac{6}{5}\tau^2\right), \qquad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{1}{\varepsilon}\left(1-\frac{\tau}{2}\right), \qquad \theta = \frac{1}{2}.$$

Задамо початкові і крайові умови

$$a(0) = a_0, \quad \varphi_1(0) = \varphi_2(0),$$

$$\varphi_1(0)+\varphi_1(1) = 1, \quad \varphi_1(0)+\varphi_1(1) = 2.$$

У точці $\tau = 0$ досягається резонанс, оскільки $\gamma(\tau) = 16\tau^2/5$. За системою функцій $\left\{\omega_1(\tau),\, \omega_1(\tau/2),\, \omega_2(\tau)\right\}$ визначник Вронського

$3\left(320-9\tau^{2}\right)/40 \neq 0$ при $\tau \in [0,1]$, тому умова 3^0 виконується. Із крайових умов як псевдорозв'язок знаходимо $\varphi_1(0) = \frac{3}{4} - \frac{19}{5\varepsilon}$. Тоді для відхилення повільних змінних маємо:

$$\| a(\tau,\varepsilon) - \overline{a}(\tau) \| = \left\| \int_0^\tau \cos\frac{\tau^3}{\varepsilon} d\tau \right\|.$$

Для $\tau = 1$ різниця є величиною порядку $\sqrt[3]{\varepsilon}$.

5. Випадок класичного розв'язку. Запишемо крайову умову (7) у вигляді

$$\mathrm{B}\varphi = g_0 a|_{\tau=0} + g_1 a|_{\tau=L} + g_2 \int_0^L a(s)ds,$$

де $\mathrm{B}\varphi = B_0\varphi|_{\tau=0} + B_1\varphi|_{\tau=L} + \int_0^L B(s)\varphi(s)ds$ — лінійний обмежений нетеровий оператор.

Умова, що забезпечує існування розв'язку системи (4), (5), який би задовольняв умову (7) в класичному розумінні одержана в [10] і має вигляд

$$P_{\mathrm{B}^*}(g_0 a|_{\tau=0} + g_1 a|_{\tau=L} + g_2 \int_0^L a(s)ds) = 0,$$

де P_{B^*} — ортопроектор на ядро $\ker \mathrm{B}^*$ оператора B^*, спряженого до оператора B.

Список використаних джерел:

1. Арнольд В. И. Условия применимости и оценка погрешности метода усреднения для систем, которые в процессе эволюции проходят через резонанс / В. И. Арнольд // Докл. АН СССР. — 1965. — № 1. — С. 9—12.
2. Нейштадт А. И. Об усреднении в многочастотных системах / А. И. Нейштадт // Докл. АН СССР. — 1976. — № 6. — С. 1295—1298.
3. Dodson M. Averaging in multifrequency systems / M. Dodson, B. P. Rynne, J. A. G. Vickers // Nonlinearly. — 1989. — № 1. — P. 137—148.
4. Гребеников Е. А. Новые качественные методы в небесной механике / Е. А. Гребеников, Ю. А. Рябов. — М. : Наука, 1971. — 444 с.
5. Хапаев М. М. Усреднение в теории устойчивости / М. М. Хапаев. — М. : Наука, 1986. — 192 с.
6. Самойленко А. М. К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем / А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 1987. — № 2. — С. 267—278.
7. Самойленко А. М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А. М. Самойленко, Р. І. Петришин. — К. : Наукова думка, 2004. — 474 с.

8. Рубаник В. П. Колебания квазилинейных систем с запаздыванием / В. П. Рубаник. — М. : Наука, 1969. — 287 с.
9. Митропольский Ю. А. Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием / Ю. А. Митропольский, Д. И. Мартынюк. — К. : Вища шк., 1979. — 309 с.
10. Бойчук А. А. Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи / А. А. Бойчук, В. Ф. Журавлев, А. М. Самойленко. — К. : Ин-т математики НАН Украины, 1995. — 318 с.
11. Самойленко В. В. Нетерові крайові задачі з повільно змінними частотами / В. В. Самойленко // Доповіді НАН України. — 1998 — № 4 — С. 54—59.
12. Бигун Я. И. Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием / Я. И. Бигун, А. М. Самойленко // Дифференц. уравнения. — 1999. — № 1. — С. 8—14.
13. Бігун Я. Й. Існування розв'язку та усереднення нелінійних багаточастотних задач із запізненням / Я. Й. Бігун // Укр. мат. журн. — 2007. — № 4. — С. 435—446.
14. Бігун Я. Про усереднення початкової і крайової задачі з лінійно перетвореним аргументом / Я. Бігун // Математичний вісник НТШ. — 2008. — Т. 5. — С. 23—35.
15. Петришин Р. І. Про усереднення в системах із лінійно перетвореним аргументом в резонансному випадку / Р. І. Петришин, Я. Й. Бігун. // Наук. вісн. Чернів. ун-ту : зб. наук. пр. — Чернівці : Рута, 2008. — Вип. 421. — С. 84—89.
16. Bandyrskii B. Eigenvalue Problem for the Second Order Differential Equation with Nonlocal Conditions. / B. Bandyrskii, I. Lazurchark, V.Makarov, M. Sapagovas // Nonlinear Analysis: Modelling and Control. — 2006. — Vol. 11, № 1. — P. 13—32.

We researched the existence and uniformity of solution for multifrequency system with linearly transformed argument with linear noether boundary conditions for fast variables. We obtained averaging method error estimates evidently dependent on small parameter for slow and fast variables on finite interval.

Key words: *averaging method, small parameter, boundary-value problem, noether boundary conditions, slow and fast variables.*

Отримано: 02.06.2011