УДК 002.2

Я. І. Єлейко*, д-р фіз.-мат. наук,
Л. В. Рабик,** аспірант
*Львівський національний університет імені І. Франка, м. Львів,
**Європейський університет Віадріна у Франкфурті-на-Одері,
м. Франкфурт-на-Одері, Німеччина

ОЦІНКИ ОЧІКУВАНОЇ ДОХІДНОСТІ ТА РИЗИКУ ПОРТФЕЛЯ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ З РОЗПОДІЛАМИ ДОХІДНОСТЕЙ, ВІДМІННИХ ВІД НОРМАЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

Запропоновано визначення оцінок очікуваної дохідності та ризику портфеля фінансових активів з розподілами дохідностей відмінними від нормального розподілу. Використано розподіли Гамбела, Вейбулла і Фречета граничних значень, які зосереджують свою увагу на граничних значеннях дохідностей чи втрат. Використовуючи ці розподіли можна сформувати портфелі з очікуваною дохідністю та ризиком, які будуть ефективніше показувати ситуацію на ринку.

Ключові слова: *очікувана дохідність портфеля, ризик портфеля, розподіл Гамбела, розподіл Вейбулла, розподіл Фречета.*

Вступ. Стаття Г. Марковіца під назвою «Вибір портфеля» [1] поклала початок сучасної теорії портфельних інвестицій. В цій статті вперше була запропонована математична модель формування оптимального портфеля цінних паперів і були приведені методи побудови таких портфелів при невизначених умовах. Крім цього Г. Марковіцем запропоновано теоретико-імовірносну формалізацію поняття дохідності та ризику, що дозволило перевести задачу вибору оптимальної інвестиційної стратегії на строгу математичну мову.

При побудові своєї моделі вибору портфеля Г. Марковіц [1] виходив з того, що інвестори не знають якими будуть дохідності фінансових активів, що входять до цих портфелів, а отже і дохідності портфелів. Тому інвестор повинен вважати рівень дохідності пов'язаний із будь-яким з портфелів випадковими величинами, які характеризуються математичним сподіванням та дисперсією або стандартним квадратичним відхиленням. Це реалізується шляхом оцінки очікуваної дохідності і стандартного відхилення кожного портфеля та вибором кращого з них на основі співвідношення цих двох параметрів [2]. Тому інвестор повинен ґрунтувати свої рішення по вибору портфеля виключно по очікуваній дохідності і стандартному відхиленню.

За дохідність фінансових активів приймається математичне сподівання дохідності, а за ризик фінансових активів — стандартне відхилення дохідності. Так як портфель — це сукупність різних фінансових активів, то очікувана дохідність і ризик портфеля залежить від очікуваної дохідності та ризику кожного фінансового активу, що входять до складу портфеля. Тому очікувана дохідність портфеля фінансових активів є середньозваженою дохідністю фінансових активів та його складових [2]:

$$ER_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \overline{R_i} = w_1 \overline{R_1} + w_2 \overline{R_2} + ... + w_n \overline{R_n}. \qquad (1.1)$$

де ER_p — очікувана дохідність портфеля, $\overline{R_i} = ER_i$ — дохідність i-го фінансового актива, w_i — доля початкової вартості портфеля інвестованого в i-ий фінансовий актив, n — кількість фінансових активів в портфелі.

Міра ризику повинна враховувати імовірність можливих «поганих» результатів. Замість того, щоб знаходити імовірність різних результатів, міра ризику повинна деяким чином оцінити степінь можливого відхилення дійсного результату від очікуваного. Стандартне відхилення – це міра ризику, яка дозволяє це зробити тому, що вона є оцінкою імовірного відхилення фактичної дохідності від очікуваної.

Ризик портфеля, як стандартне відхилення, визначається так [2]:

$$\sigma_p = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(i, j) \right)^{1/2}, \qquad (1.2)$$

де σ_p — стандартне відхилення портфеля, $\operatorname{cov}(i, j) = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$ — коваріація дохідностей i-го та j-го фінансових активів, w_i, w_j — долі початкової ринкової вартості портфеля вкладених в i-ий та j-ий фінансові активи, n — кількість фінансових активів в портфелі.

У класичній теорії портфеля гіпотеза про те, що дохідності фінансових активів нормально розподілені, є однією із головних, так як вона дозволяє використовувати в процесі побудови моделей вибору портфеля методи теорії імовірності та математичної статистики. Такий підхід був ефективно використаний Г. Марковіцем [3].

У роботі [4] показано, що не завжди фінансові активи мають дохідності з нормальним розподілом імовірності. Ця проблема вирішується шляхом моделювання розподілів дохідностей, використовуючи функції розподілів та функції густини відмінних від нормального.

Фінансові ринки характеризуються стрибками, які часто передують періодам великих коливань. Для моделювання таких випадків якнайкраще підходять розподіли крайніх значень. Граничні дохідності чи очікувані ризики можна отримати із статистичних даних, застосовуючи до них розподіли крайніх значень.

У цій статті запропоновано деякі оцінки очікуваної дохідності та ризику портфеля з дохідностями фінансових активів, які мають імовірнісний розподіл крайніх значень.

Розподіли крайніх значень. Імовірнісна теорія крайніх значень досліджує стохастичну поведінку максимуму і мінімуму випадкових величин. Як правило вважається, що розподіли крайніх значень охоплюють такі три сім'ї розподілів [5]:

- І тип (розподіл Гамбела).

У теорії імовірності та математичній статистиці розподіл Гамбела використовується для моделювання максимуму (мінімуму) ряду різних розподілів. Потенційно розподіл Гамбела можна застосувати, щоб представити розподіл максимуму (мінімуму) вибірки даних, які мають нормальний або логарифмічно нормальний розподіли.

Функцією розподілу Гамбела крайніх значень є [5]:

$$F(x)=\exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}, \tag{2.1}$$

де $x\in(-\infty,\infty)$ і $\mu,\ \sigma(>0)$ є параметрами розподілу. Функцією густини, відповідно є:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\exp\left\{-\exp\left(-\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right\}. \tag{2.2}$$

Математичне сподівання для даного розподілу:

$$EX=\mu+\gamma\sigma, \tag{2.3}$$

де γ — константа Ейлера-Мачероні $(\gamma\approx 0{,}5772156649015328606)$.

Дисперсія, відповідно:

$$DX=\frac{\pi^2}{6}\sigma^2. \tag{2.4}$$

- ІІ тип (розподіл Фреше).

Розподіл Фреше є розподілом максимальних (мінімальних) значень, якщо вибірки даних мають розподіл Ст'юдента або розподіл Парето [4].

Функція розподілу Фреше крайніх значень має вигляд [5]:

$$F(x)=\exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\xi}\right\}, \tag{2.5}$$

де $x>0$ і $\sigma>0,\xi>0$ є параметрами розподілу. А функція густини, відповідно:

$$f(x) = \frac{\xi}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\xi+1} \exp\left\{-\left(\frac{\sigma}{x}\right)^{\xi}\right\}. \tag{2.6}$$

Математичне сподівання розподілу Фреше:

$$EX = \sigma \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{\xi}\right). \tag{2.7}$$

А дисперсія:

$$DX = \sigma^2 \left(\Gamma\left(1 - \frac{2}{\xi}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\right)^2\right). \tag{2.8}$$

- III тип (розподіл Вейбулла).

  Функція розподілу випадкової величини x розподілу Вейбулла є [5]:

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\xi}\right\}, \tag{2.9}$$

де $x > 0$ і $\sigma > 0, \xi > 0$ є параметрами розподілу. Густина даного розподілу має вигляд:

$$f(x) = \frac{\xi}{\sigma}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\xi-1} \exp\left\{-\left(\frac{x}{\sigma}\right)^{\xi}\right\}. \tag{2.10}$$

Математичне сподівання розподілу Вейбулла:

$$EX = \sigma \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\xi}\right). \tag{2.11}$$

Дисперсія для даного розподілу:

$$DX = \sigma^2 \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{\xi}\right) - \Gamma\left(1 + \frac{1}{\xi}\right)^2\right). \tag{2.12}$$

Розподіл Вейбулла використовується для вибірки даних, які мають експоненціальний розподіл.

Оцінки очікуваної дохідності та ризику портфеля з дохідностями фінансових активів, які мають імовірнісний розподіл крайніх значень. Розглянемо випадок, в якому крайні значення визначаються, як максимум (чи мінімум) множини дохідностей фінансових активів $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$. Кожне значення r_i множини $\{r_1, r_2, ..., r_n\}$ можна зобразити, як спостереження випадкової величини R_i, де $R_1, R_2, ..., R_n$ незалежні, однаково розподілені випадкові величини.

Оскільки $\min\left\{R_1, R_2, ..., R_n\right\} = -\max\left\{-R_1, -R_2, ..., -R_n\right\}$ не втрачаючи загальності можемо вивести результати для максимуму. Ці результати можна легко перевести в результати для мінімуму.

Позначимо $M = \max\{R_1, R_2, ..., R_n\}$.

Виходячи із розподілів крайніх значень дослідимо три випадки:

1) дохідності M мають розподіл Гамбела;
2) дохідності M мають розподіл Фреше;
3) дохідності M мають розподіл Вейбулла.

Нехай $A_1, A_2, ..., A_m$ – m попарно несумісних подій. $A_1, A_2, ..., A_m$ утворюють повну групу подій. Події визначають зовнішні фактори, які впливають на формування портфеля фінансових активів. При цьому імовірності $P(A_1), P(A_2), ..., P(A_m)$ невідомі.

Позначимо $P(A_i) = p_i$.

Розглянемо перший випадок детальніше, а наступні розглядатимемо аналогічно.

Для першого випадку дохідності M мають розподіл Гамбела. Таким чином подія $A_1 : M$ має розподіл Гамбела з параметрами (μ_1, σ_1), подія $A_2 : M$ має розподіл Гамбела з параметрами (μ_2, σ_2),…, подія $A_m : M$ має розподіл Гамбела з параметрами (μ_m, σ_m) .

Дохідністю фінансових активів M за умови події A_1 буде:

$$E(M / A_1) = EM = \mu_1 + \gamma\sigma_1. \tag{3.1}$$

Отримуємо:

$$E(M / A_1) = \mu_1 + \gamma\sigma_1,\ ...,\ E(M / A_m) = \mu_m + \gamma\sigma_m. \tag{3.2}$$

Виконавши усереднення дохідностей фінансових активів, які мають розподіл Гамбела, отримуємо:

$$AG_E = \sum_{i=1}^{m} p_i E(M / A_i) = \sum_{i=1}^{m} p_i \left(\mu_i + \gamma\sigma_i\right). \tag{3.3}$$

Використавши вираз (1.1), очікувана дохідність портфеля буде дорівнювати:

$$ER_p^1 = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(AG_E\right)_i = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{i,j=1}^{m} p_j^i \left(\mu_j^i + \gamma\sigma_j^i\right) \right). \tag{3.4}$$

Стандартне відхилення дохідності фінансових активів M за умови події A_1 буде:

$$\sqrt{D(M / A_1)} = \sqrt{DM} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sigma_1. \tag{3.5}$$

Отримуємо:

$$\sqrt{D(M/A_1)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sigma_1, ..., \sqrt{D(M/A_m)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}}\sigma_m. \quad (3.6)$$

Усереднення ризику фінансових активів, які мають розподіл Гамбела:

$$AG_{\sqrt{D}} = \sum_{i=1}^{m} p_i \sqrt{D(M/A_i)} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \sum_{i=1}^{m} p_i \sigma_i. \quad (3.7)$$

Отже, використавши вираз (1.2), ризик портфеля визначається як:

$$\sigma_p^1 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(i,j) \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j AG_{\left(\sqrt{D}\right)_i} AG_{\left(\sqrt{D}\right)_j} \rho_{ij} \right)^{1/2} =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{6}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \left(\sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{m} p_k^i p_l^i \sigma_k^i \sigma_l^i \rho_{kl}^{ij} \right) \right)^{1/2}. \quad (3.8)$$

Використовуючи вирази (1.1), (1.2), (2.7), (2.8), (2.11) і (2.12) та провівши аналогічні обчислення, отримаємо оцінки очікуваної дохідності та ризику портфеля для 2-го та 3-го випадку відповідно.

Очікувана дохідність портфеля з дохідностями фінансових активів, які мають розподіл Фреше:

$$ER_p^2 = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{i,j=1}^{m} p_j^i \sigma_j^i \Gamma\left(1 - \frac{1}{\xi_j^i}\right) \right). \quad (3.9)$$

Ризик портфеля з дохідностями фінансових активів, які мають розподіл Фреше матиме вигляд:

$$\sigma_p^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(i,j) \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \left(\sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{m} p_k^i p_l^j \sigma_k^i \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\xi_k^i}\right) - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\xi_k^i}\right)^2} \times \right.\right. \quad (3.10)$$

$$\left.\left. \times \sigma_l^j \sqrt{\Gamma\left(1 - \frac{2}{\xi_l^j}\right) - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\xi_l^j}\right)^2} \rho_{kl}^{ij} \right) \right)^{1/2}.$$

Очікувана дохідність портфеля з дохідностями фінансових активів, які мають розподіл Вейбулла:

$$ER_p^3 = \sum_{i=1}^{n} w_i \left(\sum_{i,j=1}^{m} p_j^i \sigma_j^i \Gamma\left(1 + \frac{1}{\xi_j^i}\right)\right). \tag{3.11}$$

Ризик портфеля з дохідностями фінансових активів, які мають розподіл Вейбулла матиме вигляд:

$$\sigma_p^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \operatorname{cov}(i,j) \right)^{1/2} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \left(\sum_{i,k=1}^{m} \sum_{j,l=1}^{m} p_k^i p_l^j \sigma_k^i \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\xi_k^i}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\xi_k^i}\right)^2} \times \right.\right. \tag{3.12}$$

$$\left.\left. \times \sigma_l^j \sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{\xi_l^j}\right) - \Gamma\left(1+\frac{1}{\xi_l^j}\right)^2} \rho_{kl}^{ij} \right)\right)^{1/2}.$$

Висновки. Використавши властивості розподілів крайніх значень, а саме розподілу Гамбела, Фреше та Вейбулла, та умовних імовірностей, отримано нові оцінки очікуваної дохідності та ризику портфелів фінансових активів, дохідності яких мають імовірні розподіли відмінні від нормального.

Список використаних джерел:

1. Markowitz H. Portfolio selection / H. Markowitz // The Journal of Finance. — 1952. — Vol. 7. — P. 77—91.
2. Шарп У. Инвестиции / У. Шарп, Г. Александер, Дж. Бэйли. — М. : ИНФА-М, 2001. — №XII. — 1028 с.
3. Вітлинський В. В. Економічний ризик: ігрові моделі : навч. посібник / В. В. Вітлинський, П. І. Верченко, А. В. Сігал. — К. : КНЕУ, 2002. — 446 с.
4. Carol A. Market Models. A guide to financial data analysis/ A. Carol // Published 2001 by John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, England. — 494 p.
5. Kotz S. Saralees Nadarajah Extreme Value Distributions. Theory and Applications / S. Kotz // Imperial College Press. — 2000. — 185 p.

The paper offers estimates of investment portfolio expected return and risk with non-normal distribution of returns. Gumbel, Frechet and Weibull extreme value distributions were used. This allowed to form investment portfolio of financial assets with expected returns and risk which effectively showed the situation on financial markets.

Key words: *investment portfolio of financial assets, portfolio expected return, portfolio risk, Gumbel distribution, Frechet distribution, Weibull distribution.*

Отримано 02.10.10