УДК 517.958:519.6

І. І. Дияк, канд. фіз.-мат. наук,
І. Г. Макар, канд. фіз.-мат. наук,
Ю. О. Ящук, аспірант
Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ЧИСЕЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ h-АДАПТИВНИХ АПРОКСИМАЦІЙ

Побудова адаптивних алгоритмів методу граничних елементів (МГЕ) набуває все більшого інтересу. На сьогодні опубліковано значну кількість різноманітних підходів та методів такої побудови. Проте, у більшості із цих алгоритмів критерій адаптації базується на нев'язці граничного інтегрального рівняння, або на різниці між результатами на різних сітках. У даній роботі ми пропонуємо використати в якості критерію адаптації оцінку кривини розв'язку. Ця величина визначає похибку апроксимації невідомих функцій на границі, яка і робить основний внесок у похибку результату МГЕ. Для визначення кривини запропоновано використати результати, отримані на попередньому кроці ітеративного процесу адаптації. На основі цих ідей розроблено h-адаптивну версію прямого МГЕ для розв'язування плоскої задачі пружності. Також застосовано нову техніку апостеріорної оцінки похибки скінченноелементного розв'язку, що використовує скінченноелементну та граничноелементну апроксимацію напружень. Достовірність алгоритмів підтверджується тестовими прикладами.

Ключові слова: *метод граничних елементів, метод скінченних елементів, h-адаптивність, оцінка похибки.*

Вступ. Незважаючи на велику кількість публікацій на відповідну тему, чисельне розв'язування задач математичної фізики за допомогою методу граничних елементів (МГЕ) становить значний інтерес для сучасних досліджень в аспекті оптимізації цього методу. Як відомо, для підвищення ефективності алгоритму та раціоналізації використання обчислювальних ресурсів зручно використовувати адаптивні підходи, що дозволяють локально керувати похибкою результатів. Такі підходи поділяють на h-адаптивні, p-адаптивні, r-адаптивні та їх комбінації. P-адаптивні схеми передбачають локальне підвищення або пониження порядку апроксимуючих функцій; h-адаптивні — локальне подрібнення або об'єднання граничних елементів; r-адаптивні — зміщення вузлів сітки граничних елементів без зміни порядку апроксимацій чи кількості елементів. Значна увага серед цих схем приділяється саме h-адаптивним варіантам за рахунок їх наочності та ефективності при розв'язуванні задач із сингулярностями. Найпоширеніші з цих схем для оцінки похибки використовують або нев'язку граничного інтегрального рівняння, або порівнюють результати двох окремих обчислень, що відрізняються сіткою, порядком апроксимацій тощо [5]. І хоча такі підходи показали позитивні результати при застосуванні, у них є значний недолік: для обчислення значення критерію адаптації на всій поверхні необхідно розв'язати задачу, співрозмірну за складністю із вихідною. Це приводить до значного збільшення обчислювальних затрат та часу, необхідних для отримання адаптованої сітки. У даній роботі запропоновано алгоритм, що дозволяє проводити перебудову сітки граничних елементів за дуже незначної кількості додаткових обчислень. Здійснено ряд чисельних експериментів, які підтверджують ефективність представленого підходу в застосуванні до задач із сингулярностями для виявлення зон особливостей.

Та все ж на даний час найпоширенішим чисельним засобом для розв'язування задач пружності залишається метод скінченних елементів (МСЕ). Порівнюючи МСЕ та МГЕ, перш за все необхідно сказати, що розмірність задачі МГЕ є меншою на одиницю за рахунок дискретизації лише границі, а не внутрішності тіла. З точки зору побудови адаптивного алгоритму важливим є той факт, що напруження, обчислені за МГЕ та МСЕ, мають різний порядок точності — у МСЕ нижчий на одиницю за рахунок чисельного диференціювання переміщень. Це є підставою використати таку різницю для побудови h-адаптивного алгоритму. У цій роботі представлено оцінку похибки у вигляді приведеної різниці напружень — результатів МСЕ та МГЕ. Підтверджено можливість її використання в якості критерію адаптації.

МГЕ та ідея адаптації. Розглянемо двовимірну задачу деформації деякого пружного тіла із внутрішністю Ω та границею Γ:

$$\mu\Delta u + \left(\lambda + \mu\right) grad\, div\, u = 0,\ \ x \in \Omega, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u &= u_0,\ \ x \in \Gamma^u, \\ p &= p_0,\ \ x \in \Gamma^p. \end{aligned} \tag{2}$$

Тут $u = \left(u_1\left(x\right), u_2\left(x\right)\right)$ та $p = \left(p_1\left(x\right), p_2\left(x\right)\right)$ — відповідно переміщення та зусилля в деякій точці x; λ, μ — сталі Ляме; $\Gamma^u \bigcup \Gamma^p = \Gamma$, $\Gamma^u \bigcap \Gamma^p = \varnothing$.

Для розв'язання задачі (1)-(2) використаємо прямий МГЕ [1, с. 114]. Нагадаємо вигляд співвідношення, що виражає переміщення будь-якої точки ξ на границі через переміщення та зусилля, визначені на Γ:

$$\frac{1}{2} u_j\left(\xi\right) = \int_\Gamma G_{ij}\left(x,\xi\right) p_i\left(x\right) d\Gamma - \int_\Gamma F_{ij}\left(x,\xi\right) u_i\left(x\right) d\Gamma,\ \ i,j = 1,2\,, \tag{3}$$

де G_{ij} та F_{ij} позначають відповідні фундаментальні розв'язки. Цей вираз записаний для неперервних функцій u та p, тож вони підлягають дискретизації. Для цього границю Γ розбивають на елементи Γ_i, $\bigcup_i \Gamma_i = \Gamma$, $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ для $i \neq j$. На кожному з граничних елементів переміщення та зусилля апроксимують за допомогою, наприклад, поліномів Лагранжа $N^r(\xi)$:

$$\begin{aligned} u(\xi) &= \sum_r u^{qr} N^r(\xi),\ \xi \in \Gamma_q, \\ p(\xi) &= \sum_r p^{qr} N^r(\xi),\ \xi \in \Gamma_q. \end{aligned} \tag{4}$$

Підставивши (4) у (3), отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження невідомих u^{qr} та p^{qr}. Апроксимація (4) — це єдиний необхідний етап МГЕ, що вносить похибку в результат. Звичайно, на практиці реалізація алгоритму МГЕ включає в себе такі елементи як обчислення інтегралів за допомогою квадратурних формул, що теж накладає свою похибку [3], та все ж першоджерелом залишається похибка апроксимацій у (4). Якщо ця похибка прямуватиме до нуля, то результат МГЕ прямуватиме до точного розв'язку (за умови достатньої точності обчислення інтегралів та машинних обчислень). Тому виникає ідея побудувати адаптивний алгоритм, що базується на оцінці похибки апроксимацій.

Оцінка похибки та адаптивний алгоритм. В подальшому для визначеності вважатимемо, що нас цікавить точність u, а не t, тому будуватимемо викладки в контексті переміщень. Тим не менше, зауважимо, що вибір зусиль за основу теж може мати місце.

Нехай для апроксимації переміщень або зусиль використовуються кусково-лінійні функції. Сформулюємо теорему про похибку такої апроксимації.

Теорема. Нехай на проміжку $[x_1, x_2]$ функція $f(x)$ апроксимується прямою

$$\tilde{f}(x) = f(x_1) + \frac{x - x_1}{h}\big(f(x_2) - f(x_1)\big), \tag{5}$$

де $h = x_2 - x_1$. Тоді похибку такої апроксимації можна оцінити так:

$$f(x) - \tilde{f}(x) \le \frac{h^2}{2}\left(\max_{x\in[x_1,x_2]} f''(x) - \min_{x\in[x_1,x_2]} f''(x)\right), \tag{6}$$

для $x \in [x_1, x_2]$.

Доведення. Функцію $f(x)$ можна розвинути в точці $x \in [x_1, x_2]$ у ряд Тейлора згідно формули:

$$f(x) = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1) + \frac{1}{2} f''(\xi)(x - x_1)^2, \qquad (7)$$

де $\xi \in [x_1, x_2]$. Аналогічно

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)h + \frac{1}{2} f''(\zeta)h^2, \qquad (8)$$

де $\zeta \in [x_1, x_2]$. Позначимо $dx = x - x_1$. Виразивши з (8) $f'(x_1)$ та підставивши у (7), отримаємо:

$$f(x) = f(x_1) + f(x_2)\frac{dx}{h} - f(x_1)\frac{dx}{h} - \frac{1}{2} f''(\zeta)(x_2 - x_1)h + \frac{1}{2} f''(\xi)h^2 . \qquad (9)$$

Віднімемо (5) від останнього співвідношення та оцінимо $dx \le h$:

$$f(x) - \tilde{f}(x) = \frac{1}{2}\left(f''(\xi)dx^2 - f''(\zeta)dxh\right) \le \frac{h^2}{2}\left(f''(\xi) - f''(\zeta)\right). \qquad (10)$$

Звідси отримуємо (6).

На практиці зручніше використовувати іншу оцінку, що випливає безпосередньо з цієї теореми.

Наслідок. Похибку лінійної апроксимації у вигляді (5) на проміжку $[x_1, x_2]$ можна оцінити так:

$$f(x) - \tilde{f}(x) \le h^2 \max_{x \in [x_1, x_2]} \left| f''(x) \right|. \qquad (11)$$

Таким чином, переходячи до МГЕ, можна сказати, що похибка апроксимацій переміщень (позначимо її на елементі Γ_i через Δu_i) на границі є менша на тому граничному елементі, на якому $|u''(x)|$ є меншим. Отже, для побудови адаптивного алгоритму залишається оцінити $|u''(x)|$ на граничному елементі. Для такої оцінки можна використати результати, отримані на попередній ітерації адаптивного процесу. Нехай на деякому етапі маємо граничні елементи Γ_i з кінцями у вузлах x_i та x_{i+1}. За допомогою МГЕ у цих вузлах отримали значення u_i та u_{i+1}. Щоб оцінити $u''(x)$ на елементі, оцінимо спочатку $u''(x_i)$ у вузлах наступним чином. Проведемо параболу через точки (x_{i-1}, u_{i-1}), (x_i, u_i), (x_{i+1}, u_{i+1}), як зображено на рис. 1. Коефіцієнт при старшому члені такої параболи і візьмемо за наближене значення $u''(x_i)$, тобто:

$$\tilde{u}_i'' = \left(\frac{u_{i-1} - u_{i+1}}{h_{i-1} + h_i} - \frac{u_i - u_{i+1}}{h_i} \right) / \, h_{i-1}, \tag{12}$$

де h_i — довжина і-го граничного елемента. Знайшовши таким чином наближені значення у вузлах, візьмемо за оцінку $\left| u''(x) \right|$ на елементі середнє арифметичне значень у його кінцях.

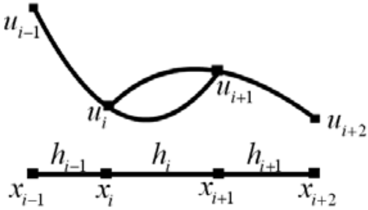


Рис. 1. *Схема для обчислення* $\Delta\tilde{u}_i$

Отже, отримали наступний вираз для оцінки похибки апроксимацій переміщень на елементі Γ_i:

$$\Delta u_i \approx \Delta\tilde{u}_i = \frac{h_i^2}{2} \left(\tilde{u}_i'' + \tilde{u}_{i+1}'' \right). \tag{13}$$

Сформулюємо тепер повністю h-адаптивний алгоритм МГЕ:

1. Задаємо початкову сітку граничних елементів.
2. Розв'язуємо задачу на даній сітці за допомогою МГЕ.
3. Для кожного вузла обчислюємо $\tilde{u}_i''$ за формулою (12).
4. Для кожного елемента Γ_i обчислюємо $\Delta\tilde{u}_i$ за формулою (13).
5. Елемент, на якому $\Delta\tilde{u}_i$ перевищує деяке наперед задане значення, розбиваємо на два рівні елементи.
6. Якщо жоден елемент не було розбито — кінець, інакше переходимо на крок 2.

Чисельні результати. Слід зауважити, що під час реалізації будь-якого h-адаптивного МГЕ потрібно враховувати наступний нюанс. Якщо утворена сітка граничних елементів є такою, що великі за розміром елементи межують із малими, то це може призвести до втрати чисельної точності. Для уникнення цього у [6, с. 161] запропоновано використовувати так зване правило сумісності: якщо відношення двох сусідніх елементів не лежить в проміжку $(0,25;4)$, то більший з них слід розділити на два. Це правило було використане нами при реалізації вищезгаданого алгоритму.

Запропоновану вище схему було апробовано на двох задачах деформації двовимірних тіл, зображених на рис. 2.

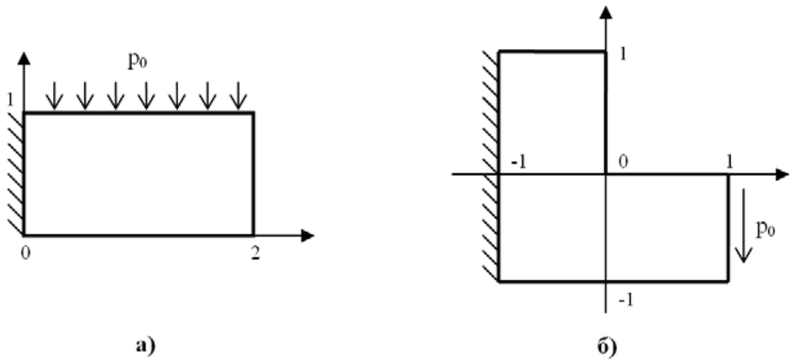


Рис. 2. *Схеми тестових задач*

Задача а) має в лівому верхньому куті «проблемну» зону — стрибкову зміну граничних умов. Задача б) має сингулярність в околі внутрішнього кута. Алгоритм адаптації повинен виділяти ці особливості.

Для згаданих задач, задавши ліміт похибки апроксимацій переміщень 10^{-4}, було отримано адаптовані сітки граничних елементів, зображені на рис. 3.

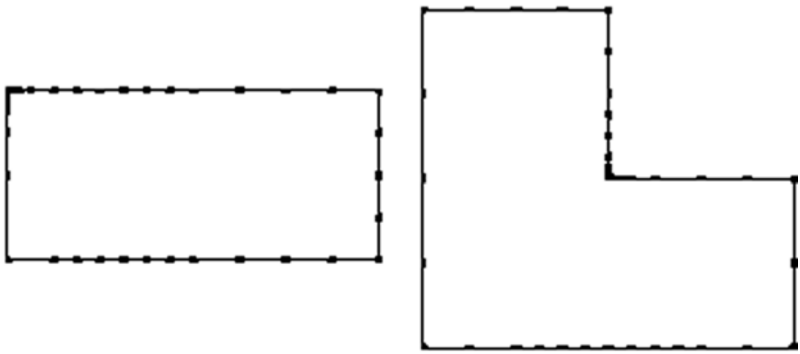


Рис. 3. *Адаптовані сітки граничних елементів для тестових задач*

Як бачимо, результуюча сітка є густішою у передбачених зонах, що підтверджує коректність роботи алгоритму адаптації граничноелементної сітки.

h-адаптація в МСЕ та мортарні функції. При реалізації h-адаптивних схем МСЕ практично неможливо уникнути утворення несумісних сіток, тобто таких, де вузол деякого елемента лежить на стороні іншого (не є його вузлом). Для розв'язування задач на таких сітках використовують спеціальні підходи, зокрема метод мортарних функцій [2]. Суть його полягає в наступному. Нехай область Ω розбита на підобласті Ω_i, що не перекриваються. На кожній із підобластей задано сумісне скінченноелементне розбиття. Спільну границю двох підобластей $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \bigcap \partial\Omega_j$ називатимемо інтерфейсом. Оскільки умови на сумісність розбиттів двох сусідніх областей на їх інтерфейсі не накладаються, то неперервність переміщень на Γ_{ij} може порушуватись. Тому накладається умова слабкої неперервності:

$$\int_{\Gamma_{ij}} \left(u_i - u_j\right)\varphi_k d\Gamma_{ij} = 0;\; k = 1,\ldots,M, \tag{14}$$

де $\varphi_k = \varphi_k\left(x\right)$, $x \in \Gamma_{ij}$ — набір базисних мортарних функцій на деякому розбитті інтерфейсу Γ_{ij}, конкретний вигляд яких можна знайти, наприклад, у [7]. Позначивши через V_i простір, натягнутий на базисні функції скінченноелементного розбиття підобласті Ω_i; Λ — простір, натягнутий на φ_k, можна записати варіаційне формулювання вихідної задачі наступним чином.

Знайти такі $\left(u_h, \lambda_h\right) \in \left(X, \Lambda\right)$, що:

$$\begin{gathered} a\left(u_h, v_h\right) + b\left(\lambda_h, v_h\right) = f\left(v_h\right), \quad v_h \in X, \\ b\left(\mu_h, u_h\right) = 0, \quad \mu_h \in \Lambda, \end{gathered} \tag{15}$$

де $a\left(\cdot,\cdot\right)$ та $f\left(\cdot\right)$ — відповідні білінійна та лінійна форми задачі (1)—(2), білінійна форма $b\left(\cdot\right)$ відповідає за умову слабкої неперервності:

$$b\left(\mu, u\right) = \int_{\Gamma_{ij}} \left(u_i - u_j\right)\mu d\Gamma_{ij}. \tag{16}$$

Задачу (15) можна розв'язати методом Гальоркіна.

Критерій адаптації. Введемо ефективне значення тензора напружень σ в точці за формулою:

$$\sigma_{eff} = \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 + 2\sigma_{12}^2}. \tag{17}$$

Позначивши через $\sigma_F\left(x\right)$ та $\sigma_B\left(x\right)$ напруження, обчислені відповідно за допомогою МСЕ на МГЕ, визначимо ефективне значення різниці так:

$$\Delta\sigma_{FB}\left(x\right) = \left(\sum_{i,j=1}^{2}\left(\sigma_{Fij} - \sigma_{Bij}\right)^2 + \left(\sigma_{F33} - \sigma_{B33}\right)^2\right)^{1/2}. \tag{18}$$

Тоді норма такої різниці матиме вигляд:

$$\left\|\Delta\sigma_{FB}\right\|_{\Omega_e} = \sqrt{\int_{\Omega_e} \Delta\sigma_{FB}^2 d\Omega_e}. \tag{19}$$

Для того, щоб порівнювати точність обчислень на різних скінченних елементах, розглянемо приведене значення різниці напружень, визначене для деякого елемента:

$$\eta_{FB} = \frac{\left\|\Delta\sigma_{FB}\right\|_{\Omega_e} / \left\|\Omega_e\right\|}{\left\|\sigma_B\right\|_{\Omega} / \left\|\Omega\right\|}, \tag{20}$$

де $\|\Omega\|$ та $\|\Omega_e\|$ — площі тіла та елемента відповідно. Цю величину і дослідимо на можливість використання в якості критерію адаптації. Для цього обчислюватимемо так звані індекси ефективності:

$$\theta = \frac{\left\|\Delta\sigma_{FB}\right\|_{\Omega_e}}{\left\|\Delta\sigma_{FT}\right\|_{\Omega_e}}, \tag{21}$$

де $\Delta\sigma_{FT}$ — ефективне значення різниці між результатом МСЕ та точним розв'язком, за який можна прийняти, наприклад, результат МГЕ, отриманий на досить густій сітці.

Чисельні результати. Дослідження проводились для задачі б), див. рис. 1. Нагадаємо, ця задача має сингулярність в околі внутрішнього кута, тому обчислення проводились також на розбиттях, які мали згущення в цій зоні. Для розв'язування на утворених несумісних сітках використовувались мортарні функції. Рівномірні розбиття складалися із 12, 48, 192 прямокутних скінченні елементи. Результати на одному з них приведені на рис. 4.

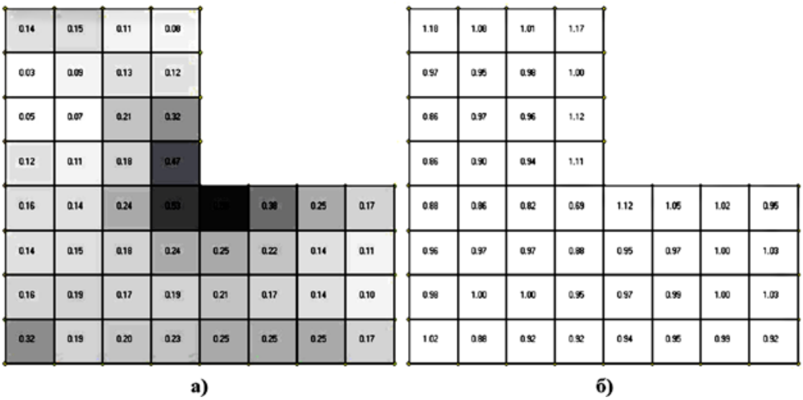
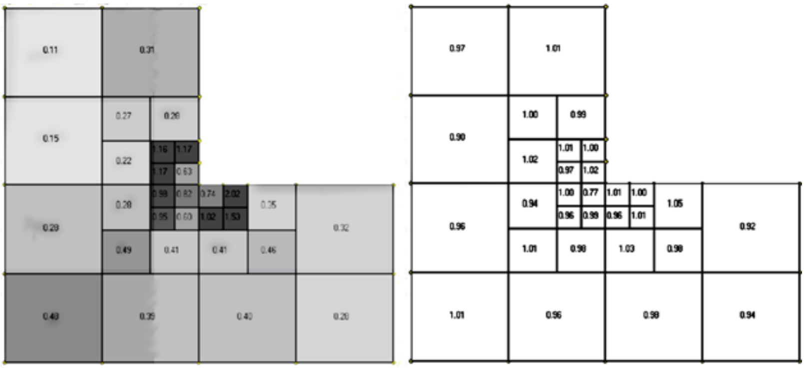


Рис. 4. *Рівномірні розбиття: а) Приведені різниці* η_{FB} *;*

б) Індекси ефективності θ *.*

Як бачимо, на більшості елементів індекс ефективності є близьким до одиниці, що означає, що приведені різниці адекватно відображають реальні похибки напружень МСЕ. На елементі, що знаходиться безпосередньо у внутрішньому куті області, індекс є найменшим — 0.69, але це значення теж можна вважати прийнятним.

На рис. 5 приведено результати на одному з несумісних розбиттів. Область тіла розділено на три підобласті з рівномірними розбиттями; з'єднання відбувається за допомогою мортарних функцій.



а) б)

Рис. 5. *Нерівномірні розбиття: а) Приведені різниці* η_{FB} *;*
б) Індекси ефективності θ *.*

Результати показують, що на нерівномірних розбиттях приведена різниця η_{FB} навіть краще відображає реальну похибку, ніж на рівномірних. Елемент у внутрішньому куті залишається найгіршим з точки зору оцінки похибки.

Висновки. Таким чином, ми запропонували ефективний h-адаптивний алгоритм МГЕ, що потребує дуже незначних обчислювальних ресурсів. Для перебудови сітки граничних елементів виконується лише два цикли нескладних обчислень для оцінки кривини розв'язку. Критерій адаптації теоретично обґрунтовано відповідною теоремою. Наведені результати чисельних досліджень підтверджують ефективність алгоритму для «пошуку» зон з особливостями та відповідної адаптації сітки.

Запропоновано також алгоритм оцінки похибки напружень МСЕ за допомогою результатів МГЕ. Чисельні дослідження демонструють, що приведена різниця напружень, обчислених за МСЕ та МГЕ, адекватно відображає їх реальну похибку. Таким чином, різниця напружень, отриманих різними чисельними методами, може бути використана в якості критерію адаптації сітки.

Список використаних джерел:

1. Бенерджи П. Методы граничных элементов в прикладных науках / П. Бенерджи, Р. Баттерфилд. — М. : Мир, 1984. — 406 с.

2. Дияк І. Адаптивний алгоритм для задачі теорії пружності на основі гібридних апроксимацій / І. Дияк // Вісник Львівського університету. — 1998. — № 50. — С. 78—80.
3. Дияк І. Обчислення гіперсингулярних інтегралів у реалізаціях числових алгоритмів розв'язання задач математичної фізики / І. Дияк, І. Макар // Фізико-математичне моделювання та інформаційні технології. — 2007. — Вип. 5. — С. 98—108.
4. Bernardi C. A new non conforming approach to domain decomposition: The mortar element method / C. Bernardi, Y. Maday, A. Patera // Nonlinear partial differential equations and their applications. — 1994. — P.13—51.
5. Kita E. Error estimation and adaptive mesh refinement in boundary element method, an overview / E. Kita, N. Kamiya // Engineering Analysis with Boundary Elements. — 2001. — Vol. 25. — P. 479—495.
6. Paulino G. H. Symmetric Galerkin Boundary Element Method / A. Sutradhar, G. H. Paulino, L. J. Gray // Springer-Verlag. — 2008. — 276 p.
7. Wohlmuth B.I. A mortar finite element method using dual spaces for the Lagrange multiplier / B.I. Wohlmuth // SIAM Journal on Numerical Analysis. — 2000. — Vol. 38, Issue 3. — P. 989—1012.

The construction of adaptive algorithms for boundary element method (BEM) is currently gaining increasing interest. Various approaches and methods have been published recently. However, in most of the existing algorithms the criteria of adaptivity is based on the residual of the boundary integral equation or the relationship between the numerical results on different meshes. In this paper we propose to use the estimation of the solution's curvature as an adaptive criteria. This quantity determines the approximating error of the unknown functions on the boundary, which makes the main contribution to the final error of the BEM. To define the curvature we use the results, obtained on the previous step of the iterative adaptive process. An h-adaptive scheme of direct BEM for solving 2-D elasticity problem was developed using these ideas. A new technique for the a posteriori error estimation for the finite element solution of the linear elasticity is used both finite and boundary element approximation of stresses also. The validity of the algorithms was verified by solving example problems.

Key words: *boundary element method, finite element method, h-adativity, error estimation.*

Отримано 17.09.2010