7. Цирульский А. В. О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области / А. В. Цирульский // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. — 1963. — С. 36—49.

On the basis of the apparatus of generalized Cauchy type integrals for harmonic functions of three variables, the questions of interpretation of gravity anomalies, which depend on three spatial coordinates. Obtain representations of the derivatives of the gravitational potential in the form of three-dimensional analogues of Cauchy type. The question of the relation of singular points of the derivatives of the potential with the shape of the surface perturbing bodies and investigate the possibility of using the values of potential fields to determine the shape of this surface as a whole.

Key words: *gravity anomaly, the potential tensor field, a singular point.*

Отримано 10.10.2010

УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,
У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ НЕСИМЕТРИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ОДНОЗНАЧНИМИ

Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної несиметричної апроксимації багатозначного відображення однозначними.

Ключові слова: *напіввідхилення за Гаусдорфом, рівномірна апроксимація,багатозначне відображення.*

Вступ. При розв'язуванні різних задач практичного характеру часто зустрічаються функціональні залежності, які не означені точно, а лише відомо, що їх значення належать деяким множинам лінійного нормованого простору. У зв'язку з цим виникає задача найкращого у деякому розумінні відновлення вищеназваної багатозначної залежності однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу. Одна з таких задач розглядається у цій статті.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для множини F та елемента x цього простору покладемо $E_F(x)=\inf\limits_{y\in F}\|x-y\|$. Будемо позначати через $O(X)$ сукупність опуклих обмежених замкнених множин простору X, через $H_1(A,B)=\sup\limits_{x\in A}E_B(x)$ — напіввідхилення за Гаусдорфом множини A від множини B, через $H(A,B)=\max\{H_1(A,B),H_1(B,A)\}$ — гаусдорфову відстань між множинами A,B із $O(X)$. Нехай, крім того, S — компакт, $C(S,X)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень g компакта S в X, неперервних на S, з нормою $\|g\|=\max\limits_{s\in S}\|g(s)\|$, $C(S,O(X))$ — множина багатозначних відображень компакта S в X таких, що для кожного $s\in S$ $a(s)=O_s\in O(X)$ і вони неперервні на S відносно метрики Гаусдорфа на $O(X)$.

Нехай $a\in C(S,O(X))$, $V\subset C(S,X)$. Задачею найкращої рівномірної несиметричної апроксимації відображення a множиною V будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha_V^*(a)=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}H_1(g(s),a(s))=\inf_{g\in V}\max_{s\in S}\inf_{y\in a(s)}\|g(s)-y\|. \qquad (1)$$

Якщо існує відображення $g^*\in V$ таке, що

$$\alpha_V^*(a)=\max_{s\in S}H_1(g^*(s),a(s)),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Слід зазначити, що питання апроксимації багатозначних відображень у різних аспектах розглядалися у багатьох працях. Однак, лише окремі з них присвячені питанням найкращої рівномірної апроксимації багатозначних відображень (див., наприклад, [1—6]). У цих роботах розглядаються задачі, в яких для $g\in V$, $a\in C(S,O(X))$, $s\in S$ в ролі міри відхилення від одноелементної множини $\{g(s)\}$ до множини $a(s)$ виступає гаусдорфова відстань між цими множинами. Проте побудова математичних моделей окремих реальних процесів приводить до задач, в яких в ролі міри відхилення від $\{g(s)\}$ до множини $a(s)$ виступає піввідхилення за Гаусдорфом множини $\{g(s)\}$ від множини $a(s)$. Однією з таких задач є задача відшукання величини (1).

При дослідженні цієї задачі виникають труднощі, пов'язані з багатозначністю відображення a, відшуканням величини (1) та її екстремального елемента. Долаючи ці труднощі, у роботі [7] встановлено теореми існування екстремального елемента, властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (1).

Мета роботи. Отримати необхідні, достатні умови, критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної несиметричної апроксимації багатозначного відображення однозначними.

Допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X, X_R — дійсний лінійний нормований простір, асоційований з простором X, X_R^* — простір, спряжений з простором X_R.

Відомо, що функція найкращого наближення $E_F\left(x\right)$, $x \in X$, є неперервною на X_R для будь-якої множини F (див., наприклад, [8, с. 17]) та, крім того, опуклою на X_R за умови, що F є опуклою множиною (див., наприклад, [9]). Тому у випадку опуклої множини F для кожної точки $x \in X$ субдиференціал $\partial E_F\left(x\right)$ є непорожньою опуклою слабко * компактною множиною простору X_R^* (див., наприклад, [10, с. 327]).

Твердження 1. Нехай F — опукла замкнена множина простору X, x — довільна точка цього простору. Справедливе таке співвідношення двоїстості

$$E_F\left(x\right) = \inf_{y \in F}\left\|x - y\right\| = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(x\right) - \sup_{y \in F}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right),$$

де $B^* = \left\{f : f \in X^*, \left\|f\right\| \le 1\right\}$ — одинична куля простору X^*.

Твердження 2. Нехай для опуклої замкненої множини F простору X та елемента x цього простору

$$B^*\left(x, F\right) = \left\{f : f \in B^*,\, E_F\left(x\right) = \inf_{y \in F}\left\|x - y\right\| = \right.$$

$$\left. = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(x\right) - \sup_{y \in F}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right) = \operatorname{Re} f\left(x\right) - \sup_{y \in F}\operatorname{Re} f\left(y\right)\right\},$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(x, F\right)\right) = \left\{\operatorname{Re} f : f \in B^*\left(x, F\right)\right\}.$$

Справедлива рівність $\partial E_F\left(x\right) = \operatorname{Re}\left(B^*\left(x, F\right)\right)$.

Опис конуса внутрішніх напрямків для множини $C_a^{g^*}$.

У подальшому будемо вважати, що обмеження $g \in V$ в задачі відшукання величини (1) є істотним, тобто $\alpha_a^* < \alpha_a^*(V)$, де

$$\alpha_a^* = \inf_{g \in C(S,X)} \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g(s)\right) = \inf_{g \in C(S,X)} \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g(s) - y\right\|.$$

Для $a \in C\left(S, O(X)\right)$ та $g^* \in V$ покладемо

$$\alpha_a^{g^*} = \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g^*(s)\right) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|,$$

$$C_a^{g^*} = \left\{ g : \ g \in C(S,X),\ \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g(s)\right) < \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$S_a^{g^*} = \left\{ s : s \in S, E_{a(s)}\left(g^*(s)\right) = \alpha_a^{g^*} \right\},$$

$$B^*\left(g^*(s), a(s)\right) =$$

$$= \left\{ f : f \in B^*, E_{a(s)}\left(g^*(s)\right) = \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g^*(s)\right) - \sup_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right) = \right.$$

$$\left. = \operatorname{Re} f\left(g^*(s)\right) - \sup_{y \in a(s)} \operatorname{Re} f(y) \right\}, s \in S_a^{g^*},$$

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s), a(s)\right)\right) = \left\{ \operatorname{Re} f : f \in B^*\left(g^*(s), a(s)\right) \right\}, s \in S_a^{g^*}.$$

Згідно з твердженням 2

$$\operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s), a(s)\right)\right) = \partial E_{a(s)}\left(g^*(s)\right),\ s \in S_a^{g^*}.$$

Зрозуміло, що множини $C_a^{g^*}$; $S_a^{g^*}$; $B^*\left(g^*, a(s)\right)$, $s \in S_a^{g^*}$, не є порожніми.

Згідно з [10, с. 12, 13] через $\Gamma\left(M, y_0\right)$, $\Gamma^*\left(M, y_0\right)$ позначатимемо відповідно конуси внутрішніх та граничних напрямків для множини M лінійного нормованого простору з точки y_0 цього простору.

Теорема 1. Нехай $a \in C\left(S, O(X)\right)$ і $g^* \in V$. Справедлива рівність

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \ \bigcap_{f \in B^*\left(g^*(s), a(s)\right)} \left\{ g : g \in C(S,X),\ \operatorname{Re} f\left(g(s)\right) < 0 \right\}. \quad (2)$$

Доведення. Для $s \in S$ позначимо

$$C_a^{g^*}(s) = \left\{ g : g \in C(S,X), E_{a(s)}\left(g(s)\right) < \alpha_a^{g^*} \right\}.$$

Тоді

$$C_a^{g^*} = \bigcap_{s \in S} \left\{ g : g \in C(S, X), E_{a(s)}\left(g(s)\right) < \alpha_a^{g^*} \right\} = \bigcap_{s \in S} C_a^{g^*}(s).$$

Тому внаслідок твердження 1.2.2 [10, с. 14]

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \subset \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) \subset \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right). \tag{3}$$

Для $s \in S \setminus S_a^{g^*}$ $\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) = C(S, X)$. Звідси та з (3) отримаємо, що

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \subset \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) = \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right). \tag{4}$$

Візьмемо довільне $g \in \bigcap_{s \in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right)$. Із співвідношення (4) випливає, що $g \in \bigcap_{s \in S} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right)$. Тому згідно з означенням конуса внутрішніх напрямків для будь-якого $s \in S$ існує $\alpha_s > 0$ таке, що $g^* + \alpha_s g \in C_a^{g^*}(s)$. Внаслідок цього

$$E_{a(s)}\left(g^*(s) + \alpha_s g(s)\right) < \alpha_a^{g^*}. \tag{5}$$

Зафіксуємо α_s і розглянемо $E_{a(s')}\left(g^*(s') + \alpha_s g(s')\right)$ як функцію s' на S. Вона є неперервною у кожній точці $s \in S$. Оскільки має місце нерівність (5), то внаслідок цього існує окіл $O(s)$ точки s у компакті S такий , що для всіх $s' \in O(s)$ справджується нерівність

$$E_{a(s')}\left(g^*(s') + \alpha_s g(s')\right) < \alpha_a^{g^*}. \tag{6}$$

Внаслідок опуклості функції $E_{a(s')}\left(g(s')\right)$ по g на $C(S, X)$ (див., наприклад, [9]), нерівності (6) та співвідношення $E_{a(s')}\left(g^*(s')\right) \le$ $\le \max_{s \in S} E_{a(s)}\left(g^*(s)\right) = \alpha_a^{g^*}$ для всіх $\alpha \in (0,1]$

$$E_{a(s')}\left((1-\alpha) g^*(s') + \alpha\left(g^*(s') + \alpha_s g(s')\right)\right) =$$

$$= E_{a(s')}\left(g^*(s') + \alpha\alpha_s g(s')\right) \le$$

$$\le (1-\alpha) E_{a(s')}\left(g^*(s')\right) + \alpha E_{a(s')}\left(g^*(s') + \alpha_s g(s')\right) <$$

$$< (1-\alpha)\alpha_a^{g^*} + \alpha\alpha_a^{g^*} = \alpha_a^{g^*}.$$

Звідси випливає, що

$$E_{a(s')}\left(g^*(s') + tg(s')\right) < \alpha_a^{g^*} \tag{7}$$

для всіх $t \in (0, \alpha_s]$, $s' \in \mathrm{O}(s)$. Оскільки S є компактом і $\bigcup\limits_{s\in S} \mathrm{O}(s) = S$, то з покриття $\mathrm{O}(s)$ компакта S можна виділити скінченне підпокриття $\mathrm{O}(s_i), i = \overline{1,k}$, тобто $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \mathrm{O}(s_i) = S$. Покладемо $\overline{\alpha} = \min\limits_{1\le i\le k} \alpha_{s_i}$. Тоді з (7) випливає, що

$$E_{a(s)}\left(g^*(s) + tg(s)\right) < \alpha_a^{g^*} \tag{8}$$

для всіх $s \in S$ та всіх $t \in \left(0, \overline{\alpha}\right]$. Тому, внаслідок неперервності по s на S функції $E_{a(s)}\left(g^*(s) + \overline{\alpha} g(s)\right)$, $s \in S$, та (8), отримаємо, що

$$\max_{s\in S} E_{a(s)}\left(g^*(s) + \overline{\alpha} g(s)\right) < \alpha_a^{g^*}.$$

Це означає, що $g^* + \overline{\alpha} g \in C_a^{g^*}$. Оскільки $C_a^{g^*}$ є відкритою опуклою множиною і $g^* \in \overline{C_a^{g^*}}$, то згідно з теоремою 1.3.4 [10, с. 19] робимо висновок, що $g \in \Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right)$. Тому $\bigcap\limits_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) \subset \Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right)$. Звідси та з (3) випливає, що

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) = \bigcap_{s\in S_a^{g^*}} \Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right). \tag{9}$$

Тепер перейдемо до опису конуса $\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right)$, $s \in S_a^{g^*}$. Для $s \in S_a^{g^*}$ маємо, що

$$C_a^{g^*}(s) = \left\{g : g \in C(S,X), E_{a(s)}\left(g(s)\right) < \alpha_a^{g^*} = E_{a(s)}\left(g^*(s)\right)\right\}.$$

Тому згідно з твердженням 6.9.1 [10, с. 352] для всіх $s \in S_a^{g^*}$

$$\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) = \left\{ g : g \in C(S, X),\ \varphi(g) < 0,\ \varphi \in \partial p_s\left(g^*\right) \right\}, \quad (10)$$

де $p_s(g) = \inf\limits_{y \in a(s)} \left\| g(s) - y \right\|, g \in C(S, X)$.

Нехай $\Lambda_s : C(S, X) \to X$ — оператор, для якого $\Lambda_s(g) = g(s)$, $g \in C(S, X)$. Зрозуміло, що Λ_s є лінійним і неперервним.

Для будь-якого $s \in S_a^{g^*}$, $g \in C(S, X)$ маємо, що

$$\left(E_{a(s)} \cdot \Lambda\right)(g) = E_{a(s)}\left(\Lambda(g)\right) = \inf_{y \in a(s)} \left\| g(s) - y \right\| = p_s(g).$$

Тому

$$\partial p_s\left(g^*\right) = \partial\left(E_{a(s)} \cdot \Lambda\right)\left(g^*\right). \quad (11)$$

Відповідно до теореми 2 [11, с. 212]

$$\partial\left(E_{a(s)} \cdot \Lambda\right)\left(g^*\right) = \Lambda^* \partial E_{a(s)}\left(\Lambda g^*\right), \quad (12)$$

де Λ^* — оператор, спряжений з оператором Λ.

З (11), (12) та твердження 2 випливає, що для $s \in S_a^{g^*}$

$$\begin{aligned} \partial p_s\left(g^*\right) &= \Lambda^* \partial E_{a(s)}\left(\Lambda g^*\right) = \Lambda^* \partial E_{a(s)}\left(g^*(s)\right) = \\ &= \Lambda^* \operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s), a(s)\right)\right). \end{aligned} \quad (13)$$

З (10) та (13) одержимо, що для $s \in S_a^{g^*}$

$$\begin{aligned} &\Gamma\left(C_a^{g^*}(s), g^*\right) = \\ &= \left\{ g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f\left(g(s)\right) < 0,\ f \in \operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s), a(s)\right)\right) \right\} = \\ &= \bigcap_{f \in \operatorname{Re}\left(B^*\left(g^*(s), a(s)\right)\right)} \left\{ g : g \in C(S, X),\ \operatorname{Re} f\left(g(s)\right) < 0 \right\}. \end{aligned}$$

Звідси із врахуванням рівності (9) робимо висновок про справедливість рівності (2).

Теорему доведено.

Основні результати.

Теорема 2. Нехай $a \in C(S, O(X))$ і V — довільна множина простору $C(S, X)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1), необхідно, щоб не існувало такого елемента $h \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$, що для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*\left(g^*(s), a(s)\right)$ виконується нерівність $\operatorname{Re} f\left(h(s)\right) < 0$.

Доведення. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Якщо існує $h \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ таке, що $\operatorname{Re} f\left(h(s)\right) < 0$ для всіх $s \in S_a^{g^*}$, $f \in B^*\left(g^*(s), a(s)\right)$, то, згідно з теоремою 1, $h \in \Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right)$ і, отже, $\Gamma\left(C_a^{g^*}, g^*\right) \bigcap \Gamma^*\left(V, g^*\right) \neq \varnothing$, що суперечить теоремі 1.4.1 [10, с. 27]. З отриманої суперечності і випливає справедливість теореми. Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай $a \in C\left(S, O(X)\right)$ і V — довільна множина простору $C(S, X)$. Якщо g^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (1), то для будь-якого елемента $h \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ існують елементи $s_h \in S$, $f_h \in B^*$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_h\left(g^*\left(s_h\right)\right) - \sup_{y \in a\left(s_h\right)} \operatorname{Re} f_h(y) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|,$$

$$\operatorname{Re} f_h\left(h\left(s_h\right)\right) \geq 0.$$

Справедливість теореми випливає з теореми 2.

Опис конуса $\Gamma^*\left(V, g^*\right)$ з урахуванням специфіки множини V дозволяє в окремих часткових випадках значно конкретизувати встановлені вище необхідні умови екстремального елемента для величини (1).

Теорема 4. Нехай $a \in C\left(S, O(X)\right)$ і $V = \bigcup_{i \in I} V_i$, де $\left(V_i\right)_{i \in I}$ — сім'я опуклих множин простору $C(S, X)$, $g^* \in V$ і $V_{g^*} = \bigcup_{\substack{i \in I, \\ g^* \in \overline{V_i}}} V_i$. Якщо $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1), то для будь-якого елемента $g \in V_{g^*}$ існують такі елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g^*\left(s_g\right)\right) - \sup_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\| g^*(s) - y \right\|, \tag{14}$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) \geq 0. \tag{15}$$

Теорема 5. Нехай $a \in C(S,O(X))$, V — довільна множина простору $C(S,X)$, $g^* \in V$. Якщо для кожного елемента $g \in V$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що мають місце співвідношення (14), (15), то $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1).

Доведення. Нехай g є довільним елементом множини V. Згідно з умовою теореми існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких мають місце співвідношення (14), (15).

З урахуванням цих співвідношень та твердження 1 одержимо

$$0 \le \operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right) - g^*\left(s_g\right)\right) = \operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) - \operatorname{Re} f_g\left(g^*\left(s_g\right)\right) =$$

$$= \operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) - \sup_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y) - \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\| \le$$

$$\le \max_{f \in B^*}\left(\operatorname{Re} f\left(g\left(s_g\right)\right) - \sup_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g(y)\right) - \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\| =$$

$$= \inf_{y \in a\left(s_g\right)} \left\|g\left(s_g\right) - y\right\| - \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\| \le$$

$$\le \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g(s) - y\right\| - \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|.$$

Тому

$$\max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g(s) - y\right\| \ge \max_{s \in S} \inf_{y \in a(s)} \left\|g^*(s) - y\right\|.$$

Звідси робимо висновок, що $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (1). Теорему доведено.

Згідно з [1] множину M лінійного нормованого простору Y будемо називати Γ^* — множиною відносно точки $y_0 \in M$, якщо $y - y_0 \in \Gamma^*(M, y_0)$ для всіх $y \in M$. Прикладами Γ^* — множин є, зокрема, зіркові відносно g^*, в тому числі опуклі множини.

Теорема 6. Нехай $a \in C(S,O(X))$, $g^* \in V$ і V є Γ^* — множиною відносно точки g^*. Для того щоб елемент g^* був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення (14), (15).

Доведення. Необхідність. Нехай $g^* \in V$ є екстремальним елементом для величини (2) і V є Γ^* — множиною відносно g^*. За означенням Γ^* — множини для будь-якого $g \in V$ $g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$. Згідно з теоремою 3 для $g - g^* \in \Gamma^*\left(V, g^*\right)$ існують елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення (14), (15). Необхідність доведено.

Достатність випливає з теореми 4. Теорему доведено.

Наслідок 1. Нехай $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$, $g^* \in V$ і V — підпростір простору $C\left(S, X\right)$. Для того щоб елемент $g^* \in V$ був екстремальним елементом для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$ такі, що

$$\operatorname{Re} f_g\left(g^*\left(s_g\right)\right) - \sup_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a\left(s\right)} \left\| g^*\left(s\right) - y \right\|,$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g\left(s_g\right)\right) \geq 0 .$$

Зі встановлених вище тверджень можна отримати необхідні, достатні умови та критерії того, що $g^* \in V$, де $V \subset X$, є чебишовською точкою відносно V системи $\left\{a\left(s\right), s \in S\right\}$ обмежених замкнених множин простору X, які неперервно змінюються.

Наслідок 2. Нехай $a \in C\left(S, O\left(X\right)\right)$, $V \subset X$, $g^* \in V$ і V є Γ^* — множиною відносно точки g^*. Для того щоб елемент g^* був чебишовською точкою системи $\left\{a\left(s\right), s \in S\right\}$ у множині V, необхідно і достатньо, щоб для кожного елемента $g \in V$ існували елементи $s_g \in S$, $f_g \in B^*$, для яких виконуються співвідношення

$$\operatorname{Re} f_g\left(g^*\right) - \sup_{y \in a\left(s_g\right)} \operatorname{Re} f_g\left(y\right) = \max_{s \in S} \inf_{y \in a\left(s\right)} \left\| g^* - y \right\|,$$

$$\operatorname{Re} f_g\left(g - g^*\right) \geq 0.$$

Список використаних джерел:

1. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — № 12. — С. 1601—1619.

2. Гнатюк Ю. В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень / Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Доп. НАН України. — 2005. — № 6. — С. 19—23.
3. Гнатюк В. О. Модифікація методу Ремеза на випадок апроксимації компактнозначного відображення / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима. — Вісник КНУ. Серія: фізико-математичні науки. — 2005. — № 3. — С. 239—244.
4. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М.С. Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — № 5. — С. 1047—1050.
5. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вестник Московского ун-та. Сер.: вычислительная математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76—80.
6. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю. Выгодчикова // Математика. Механика: сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2000. — № 2. — С. 13—15.
7. Гнатюк В. О. Найкраща рівномірна несиметрична апроксимація багатозначного відображення однозначними / В. О. Гнатюк, Ю. В. Гнатюк, У. В. Гудима // Міжнародна конференція «Сучасні проблеми аналізу», присвячена 70-річчю кафедри математичного аналізу Чернівецького університету. Тези доповідей. — Чернівці, 2010. — С. 58—60.
8. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения / Н. П. Корнейчук — М. : Наука, 1976. — 320 с.
9. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. — 1982. — № 5. — С. 608—613.
10. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
11. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.

The necessary and sufficient conditions and criteria and extreme element for the problem of best uniform asymmetric approximation of set-valued mapping by the set of single-valued map.

Key words: *semideviation for the Hausdorff, the compact-valued maps, best uniform approximation.*

Отримано 23.10.2010