УДК 004.01

А. Ф. Верлань*, д-р техн. наук,
С. А. Положаєнко**, д-р техн. наук
*Институт проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,
**Одесский национальный политехнический университет, г. Одесса

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ АНОМАЛИЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ

На основе аппарата обобщенных интегралов типа Коши для гармонических функций трех переменных рассмотрены вопросы интерпретации гравитационных аномалий, зависящих от трех пространственных координат. Получены представления производных гравитационного потенциала в виде трехмерных аналогов типа Коши. Исследован вопрос о связи особых точек производных потенциала с формой поверхности возмущающих тел и выяснена возможность использования значений потенциальных полей для определения формы этой поверхности в целом.

Ключевые слова: *гравитационная аномалия, потенциальные поля, тензор, особая точка.*

Для ряда задач моделирования диффузионных процессов принципиальным вопросом является геометрическое представление пространственной области моделирования D. Так, в частности, плоские поля могут служить лишь грубой моделью реальных, зависящих от трех пространственных координат, гравитационных полей, наблюдаемых на поверхности Земли.

Ниже выполнена интерпретация трехмерных гравитационных аномалий, основанная на развитии результатов исследований, проведенных в работе [1]. Предложены и исследованы модели трехмерных потенциальных полей гармонических гравитационных аномалий.

1. Модели гравитационных аномалий на основе интегралов типа Коши для гармонических функций трех переменных и их свойства

Общеизвестно [2; 3], что для исследования плоских потенциальных полей широко используется аппарат интегралов Коши. Введем понятие аналога интеграла Коши для гармонических функций трех переменных и исследуем его свойства.

Для сокращения записи воспользуемся процедурами тензорного анализа в трехмерном евклидовом пространстве E_3 [4; 5], причем ограничимся рассмотрением исключительно прямоугольных декартовых координат, получающихся из данной системы X_1, X_2, X_3 вращением.

Рассмотрим следующий четырехвалентный тензор

$$\Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl} = \delta_{\alpha}^{\beta}\cdot\delta_{k}^{l} + \delta_{\alpha}^{k}\cdot\delta_{\beta}^{l} - \delta_{k}^{\beta}\cdot\delta_{\alpha}^{l};\ \alpha,\beta,k,l = 1,2,3, \tag{1.1}$$

где δ_j^i — символы Кронекера, определяемые как

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1;\ i = j; \\ 0,\ i \neq j. \end{cases}$$

В силу известных свойств символов Кронекера [4], тензор $\Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl}$ является изотропным, т.е. имеет одинаковые компоненты во всех вращающихся системах координат. Явный вид матрицы компонент тензора $\Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl}$ приведен в работе [1].

Свертывая тензор $\Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl}$ с градиентом фундаментального решения уравнения Лапласа $1/|x-y|$ (где x, y — произвольные точки в E_3), образуем присоединенный тензор Грина для уравнения Лапласа

$$G_{\alpha}^{\beta l}(x,y) = \Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl}\frac{\partial}{\partial y_k}\left(\frac{1}{|x-y|}\right) = \Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl}\frac{x_k - y_k}{|x-y|^3}\ . \tag{1.2}$$

Пусть теперь в некоторой области Ω трехмерного евклидова пространства E_3 задана непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(y)$. Рассмотрим произвольную кусочно-гладкую ориентированную поверхность $S \subset \Omega$ и вычислим интеграл

$$q_{\alpha}(x) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} G_{\alpha}^{\beta l}(x,y)\varphi_{,\beta}(y)\nu_l\, dS_y;\ x \notin S\ (\alpha,\beta,l = 1,2,3), \tag{1.3}$$

где $\varphi_{\beta}(y) = \partial\varphi(y)/\partial y_{\beta}$, а $\mathrm{v} = (\nu_1,\nu_2,\nu_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S в точке y. Интеграл (1.3) можно интерпретировать как поток некоторого аффинорного поля $\Im_{\alpha}^{l} = -\frac{1}{4}G_{\alpha}^{\beta l}\varphi_{\beta}$ через поверхность S [5]. Вектор $\mathrm{Q} = (q_1, q_2, q_3)$, описывающий этот поток, по построению зависит от координат точки x и, следовательно, образует векторное поле, причем компоненты этого векторного поля являются, очевидно, аналитическими функциями всюду вне поверхности S. Если же поверхность S замкнутая, то можно показать, что ротор и дивергенция вектора $\mathrm{Q}(x)$ равны нулю, т.е.

$$q_{\alpha,\beta}(x) \equiv q_{\beta,\alpha}(x);\ x \notin S;\ q_{1,1}(x) + q_{2,2}(x) + q_{3,3}(x) \equiv 0\ . \tag{1.4}$$

где, в соответствии с общепринятыми в тензорном анализе обозначениями, индекс, отделенный запятой, обозначает дифференцирование по соответствующей координате. Следовательно, компоненты вектора $\mathrm{Q}(x)$ можно рассматривать как частные производные некоторой гармонической функции $q(x)$, определенной в любой точке пространства, за исключением точек поверхности S, и записать

$$q_\alpha(x) \equiv q_{,\alpha}(x).$$

Интеграл (1.3), следуя работам [1; 6], будем называть аналогом интеграла Коши для гармонических функций трех переменных, а функции $\varphi_{,\beta}(y)$ — его плотностями. Интеграл Коши (1.3) описывает градиенты функций, гармонических во всем пространстве E_3 за исключением точек самой поверхности S, которая есть для него *особой поверхностью*. В частном случае, когда $\varphi_{,\beta}(y)$ являются граничными значениями на S производных гармонической функции внутри области D (которая, в свою очередь, ограничена поверхностью S), выполняется:

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\varphi_{,\beta}(y)\nu_l\,dS_y = \begin{cases} 0; \, x \in C \setminus D, \\ \varphi_{,\alpha}(x); \, x \in D. \end{cases} \tag{1.5}$$

где $C \setminus D$ — бесконечная поверхность, дополняющая область D до всего пространства E_3, т.е. интеграл типа Коши (1.3) решает краевую задачу для гармонических функций трех переменных.

Трехмерный аналог интеграла типа Коши в тех случаях, когда точка x_0 лежит на поверхности S, не имеет смысла, однако, воспользовавшись известными приемами [6], можно вычислить сингулярный интеграл в смысле главного значения по Коши:

$$q_{,\alpha}(x_0) = \lim_{\rho\to 0}\left\{-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\varphi_{,\beta}(y)\nu_l\,dS_y\right\}; \quad x_0 \in S_\rho, \tag{1.6}$$

где S_ρ — часть поверхности S вне сферы C_ρ радиуса ρ с центром в точке x_0. Расчетные формулы при этом зависят от типа точки $x_0 \in S$, в которой вычисляется сингулярный интеграл.

Далее всюду будем полагать, что гомеоморфная сфере поверхность S представляет собой объединение конечного числа гладких, в смысле Ляпунова, кусков Γ_i, $i = 1,2,\ldots,N$, ограниченных замкнутыми контурами γ_i, соответственно: $S = \bigcup\limits_{i=1}^{N}\Gamma_i$. Тогда все точки, принадлежащие внутренностям Γ_i, являются, очевидно, обыкновенными точками поверхности S. Иными словами, в этих точках существуют касательные плоскости к поверхности. Точки же, принадлежащие контурам γ_i, могут оказаться особыми точками поверхности S, т.е. в этих точках поверхность S может не иметь касательных плоскостей.

Рассмотрим некоторую особую точку поверхности S, являющуюся точкой соприкосновения гладких по Ляпунову кусков $\Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}, \Gamma_{j3}, ..., \Gamma_{jm}$. В пределах каждого куска Γ_{jl} можно провести отрезки гладких кривых лежащих на поверхности S и заканчивающихся в точке x_0. Построив в точке x_0 односторонние касательные ко всем проведенным отрезкам гладких кривых, получим коническую поверхность с вершиной в точке x_0. Обозначив через $\Theta(x_0)$ величину телесного угла (в стерадианах), образованного построенной конической поверхностью. Особая точка x_0 является *угловой точкой*, если угол $\Theta(x_0)$ отличен от 0 и 4π стерадиан. Особая точка x_0 является *точкой возврата*, если угол $\Theta(x_0)$ равен 0 или 4π стерадиан. Ниже будут рассмотрены только эти два типа особых точек. Совокупность угловых точек и точек возврата могут образовывать на поверхности S угловые линии и ребра возврата, соответственно.

Вернемся теперь к проблеме вычисления сингулярного интеграла (1.6). Следуя [6], представим выражение (1.6) в виде

$$\begin{aligned} q_{,\alpha}(x_0) = -\frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\iint_{S_\rho} G_\alpha^{\beta l}(x_0,y)\left[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\, dS_y + \\ +\frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\iint_{\sigma_\rho} G_\alpha^{\beta l}(x_0,y)\varphi_{,\beta}(x_0)\nu_l\, dS_y, \end{aligned} \tag{1.7}$$

где σ_ρ — часть сферы C_ρ, лежащей внутри D. Первый предел в (1.7) существует при условии, что плотности интеграла типа Коши $\varphi_{,\beta}(y)$ удовлетворяют на S условию Гёльдера [4]. Действительно, в этом случае если x_0 принадлежит внутренности Γ_i, то первый предел существует как обыкновенный несобственный интеграл

$$\begin{aligned} -\frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\iint_{S_\rho} G_\alpha^{\beta l}(x_0,y)\left[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\, dS_y = \\ -\frac{1}{4}\iint_{S} G_\alpha^{\beta l}(x_0,y)\left[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\, dS_y. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Если же x_0 является точкой соприкосновения гладких кусков $\Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}, \Gamma_{j3}, ..., \Gamma_{jm}$, то, разбивая интеграл под знаком предела на m интегралов по различным гладким кускам кусков $\Gamma_{j1}, \Gamma_{j2}, \Gamma_{j3}, ..., \Gamma_{jm}$ и, учитывая условие Гёльдера, вычисляем m обыкновенных несобственных интегралов, которые в сумме вновь дают соотношение (1.8).

Вычислим теперь второй предел в (1.7)

$$\frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{\sigma_\rho} G_\alpha^{\beta l}(x_0, y)\varphi_{,\beta}(x_0)\nu_l\, dS_y =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{\sigma_\rho} \Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl}\varphi_{,\beta}(x_0)\frac{x_k - y_k}{|x-y|^3}\cdot\frac{x_l - y_l}{|x-y|}dS_y = \tag{1.9}$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\frac{\rho^2}{\rho^4}\varphi_{,\alpha}(x_0)\iint\limits_{\sigma_\rho} dS_y = \frac{1}{4}\varphi_{,\alpha}(x_0)\cdot\Theta(x_0),$$

где $\Theta(x_0)$ — соответствующий телесный угол в точке x_0. Подставляя (1.9) и (1.8) в (1.7), окончательно получаем

$$q_{,\alpha}(x_0) = -\frac{1}{4}\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{S_\rho} G_\alpha^{\beta l}(x_0, y)\left[\varphi_{,\beta}(y) - \varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\, dS_y + \tag{1.10}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\varphi_{,\alpha}(x_0)\cdot\Theta(x_0).$$

Выражение (1.10) позволяет вычислить значение сингулярного интеграла типа Коши в любой точке поверхности S.

Выше было указано, что для гармонической функции $q(x)$, частные производные которой определяются интегралом типа Коши, сама поверхность интегрирования S является особой поверхностью. Рассмотрим теперь важный для практических приложений вопрос о поведении трехмерных аналогов интегралов типа Коши при приближении к поверхности S с различных ее сторон. Предварительно преобразуем интеграл (1.3):

$$q_{,\alpha}(x) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} G_\alpha^{\beta l}(x, y)\left[\varphi_{,\beta}(y) - \varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\, dS_y - \tag{1.11}$$
$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S} G_\alpha^{\beta l}(x, y)\varphi_{,\beta}(x_0)\nu_l\, dS_y.$$

Тогда, очевидно, согласно (1.5)

$$q_{,\alpha}(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\left[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\,dS_y+\varphi_{,\alpha}(x_0);\ x\in D,\\ -\dfrac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\left[\varphi_{,\beta}(y)-\varphi_{,\beta}(x_0)\right]\nu_l\,dS_y;\quad x\in C\setminus D.\end{cases}\tag{1.12}$$

Применяя рассуждения, аналогичные двумерному случаю, нетрудно проверить, что предел выражения (1.12) при $x\to x_0\in S$ существует и, в силу (1.10), равен

$$\begin{aligned}q_{,\alpha}{}^{+}(x_0)&=\lim_{x\to x_0}q_{,\alpha}(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x_0,y)\varphi_{,\beta}(x_0)\nu_l\,dS_y+\\&\qquad+\left[1-\frac{1}{4\pi}\Theta(x_0)\right]\varphi_{,\alpha}(x_0);\\ q_{,\alpha}{}^{-}(x_0)&=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in C\setminus D}}q_{,\alpha}(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}(x_0,y)\varphi_{,\beta}(x_0)\nu_l\,dS_y-\\&\qquad-\frac{1}{4\pi}\Theta(x_0)\varphi_{,\alpha}(x_0).\end{aligned}\tag{1.13}$$

Таким образом, трехмерный аналог интеграла типа Коши с плотностями, удовлетворяющими условию Гёльдера, имеет предельные значения при приближении к поверхности S с каждой ее стороны, но эти предельные значения различны, так что при переходе через поверхность S происходит скачек (суть аномалия гравитационного потенциала), причем величина скачка, как следует из формул (1.13), равна плотностям $\varphi_{,\alpha}(x_0)$:

$$q_{,\alpha}(x_0)=q_{,\alpha}{}^{+}(x_0)-q_{,\alpha}{}^{-}(x_0)\,.\tag{1.14}$$

Соотношение (1.14) справедливо как в обыкновенных точках поверхности S, так и в угловых точках и точках возврата.

2. Представление производных гравитационного потенциала в виде трехмерных аналогов интегралов типа Коши

Запишем выражение для производных внешнего гравитационного потенциала области D, заполненной массами постоянной плотности σ

$$U_{,\alpha}(x)=f\sigma\iiint\limits_D\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dv_y,\tag{2.1}$$

где f — гравитационная постоянная.

Сведем вычисление объемного интеграла (2.1) к вычислению некоторого интеграла типа Коши по поверхности S, ограничивающей область D. Рассмотрим два произвольных скалярных поля $g(y)$ и $h(y)$, дважды непрерывно дифференцируемых в области D вплоть до ее границы. Свертывая тензор $\Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl}$ с градиентами полей $g(y)$ и $h(y)$, образуем в области D аффинорное поле

$$\Im_{\alpha}^{l} = \Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl} g_{,\beta} h_{k}; \tag{2.2}$$

дивергенция, которого равна

$$\Im_{\alpha,l}^{l} = \Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl} g_{,\beta l} h_{k} + \Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl} g_{,\beta} h_{,kl} = g_{,\alpha}\Delta h, \tag{2.3}$$

где Δ — лапласиан.

Применяя к аффинорному полю $\Im_{\alpha}^{l}$ теорему Остроградского-Гаусса [4; 5] и учитывая равенство (2.3), получаем

$$\iint_{S} \Im_{\alpha}^{l} v_{l} dS_{l} = \iiint_{D} \left(h_{,\alpha}\Delta g + g_{,\alpha}\Delta h \right) dv_{y}. \tag{2.4}$$

Положим

$$h = \frac{f\sigma}{6}\left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \right); \; g = \frac{1}{|x-y|}; \quad x \in C \setminus D. \tag{2.5}$$

Тогда поле $\Im_{\alpha}^{l}$ равно

$$\Im_{\alpha}^{l} = \frac{f\sigma}{3}\Delta_{\alpha}^{\beta}\Big|^{kl} \frac{x_k - y_k}{|x-y|^3} \quad y_{,\beta} = G_{\alpha}^{\beta l}(x, y)\, y_{\beta}\frac{f\sigma}{3}. \tag{2.6}$$

Подставляя (2.5) и (2.6) в (2.4), находим

$$\frac{f\sigma}{3}\iint_{S} G_{\alpha}^{\beta l}(x, y)\, y_{\beta} v_{k} dS_{y} = -f\sigma \iiint_{D} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\left(\frac{1}{|x-y|} \right) dv_{y}, \tag{2.7}$$

откуда

$$U_{,\alpha}(x) = -\frac{f\sigma}{3}\iint_{S} G_{\alpha}^{\beta l}(x, y)\, y_{\beta} v_{l} dS_{y}, \tag{2.8}$$

где $v = (v_1, v_2, v_3)$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S. Интеграл, стоящий в правой части (2.8), представляет собой трехмерный аналог типа Коши с плотностями, равными

$$\varphi_{,\beta}(y) = \frac{4\pi}{3} f\sigma y_{\beta}. \tag{2.9}$$

Представление (2.8) обобщает на трехмерный случай известную форму А. В. Цирульского [7] для представления производных логарифмического потенциала.

Выведем теперь аналогичные представления для производных внутреннего потенциала $W(x)$ области D. С этой целью воспользуемся очевидным равенством

$$W(x)=W^R(x)-V^R(x);\ x\in D, \tag{2.10}$$

где $W^R(x)$ — потенциал шара O_R достаточно большого радиуса R с центром в начале координат, содержащего целиком внутри себя область D, и заполненного массами постоянной плотности σ; $V^R(x)$ — потенциал области T_R, заключенной между поверхностью C_R шара O_R и поверхностью S, и также заполненной массами плотности σ. Как известно [1]

$$W^R(x)=-\frac{2\pi}{3}f\sigma\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+2\pi R^2 f\sigma. \tag{2.11}$$

Следовательно

$$W_{,\alpha}(x)=-\frac{4\pi}{3}f\sigma x_\alpha-V_{,\alpha}^R(x);\ x\in D. \tag{2.12}$$

Для функций $V_{,\alpha}^R(x)$ можно воспользоваться представлением, аналогичным (2.8)

$$V_{,\alpha}^R(x)=-\frac{f\sigma}{3}\iint_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\,y_\beta v_l dS_y-\frac{f\sigma}{3}\iint_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\,y_\beta dS_y, \tag{2.13}$$

где $\tilde{v}_l$ — единичный вектор внешней нормали к сфере C_R. Вычислим второй интеграл в (2.13)

$$\begin{aligned}-\frac{f\sigma}{3}\iint_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\,y_\beta dS&=-\frac{f\sigma}{3}\Delta_\alpha^\beta\Big|^{kl}\frac{x_k-y_k}{|x-y|^3}y_\beta\frac{y_l}{|y|}dS_y=\\&=-R\frac{f\sigma}{3}\iint_{C_R}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{1}{|x-y|}\right)dS_y=-\frac{R}{3}F_{,\alpha}(x).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Выражение $F_{,\alpha}(x)$ описывает производные гравитационного потенциала однородного сферического слоя, которые [3], внутри сферического слоя, равны нулю. Поэтому, второй интеграл в (2.13) пропадает и тогда

$$V_{,R}^R(x)=-\frac{f\sigma}{3}\iint_S G_\alpha^{\beta l}(x,y)\,y_\beta v_l dS_y. \tag{2.15}$$

Как видно из (2.15) $V_{,\alpha}^R(x)$ *не зависит* от R, поэтому индекс R можно опустить и функцию $V(x)=V^R(x)$ интерпретировать как гравитационный потенциал области $C \setminus D$, заполненной массами плотности σ. Объединяя (2.8) и (2.15), имеем

$$-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}\left(x,y\right)y_\beta v_l dS_y = \begin{cases} U_{,\alpha}\left(x\right); & x \in C \setminus D, \\ -V_{,\alpha}\left(x\right); & x \in D, \end{cases} \tag{2.16}$$

т.е. трехмерный аналог интеграла типа Коши с плотностями, равными y_β, вне D имеет смысл гравитационного потенциала области D, а внутри D — гравитационного потенциала области $C \setminus D$ (с точностью до постоянного множителя $\pm\dfrac{4\pi}{3}f\sigma$).

Подставляя (2.15) в (2.12), имеем

$$W_{,\alpha}\left(x\right) = -\frac{4\pi}{3}f\sigma - \frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}\left(x,y\right)y_\beta v_l dS_y. \tag{2.17}$$

Воспользовавшись свойством (1.5), представления (2.8) и (2.17) можно объединить в виде

$$-\frac{f\sigma}{3}\iint\limits_S G_\alpha^{\beta l}\left(x,y\right)\left[y_\beta - x_\beta\right]v_l dS_y = \begin{cases} U_{,\alpha}\left(x\right); & x \in C \setminus D, \\ W_{,\alpha}; & x \in D. \end{cases} \tag{2.18}$$

Полученные представления (2.16) и (2.18) могут быть использованы для практических расчетов при решении прямой задачи гравитации, однако важное значение эти представления имеют и в теоретическом плане при исследовании гравитационных аномалий, поскольку поверхностные интегралы, фигурирующие в них, представляют собой трехмерные аналоги интегралов типа Коши и, следовательно, обладают всеми отмеченными в разделе 1 свойствами.

Список использованной литературы:

1. Жданов М. С. Развитие теории аналитического продолжения потенциальных полей в криволинейных трехмерных областях / М. С. Жданов // Изв. АН СССР, Физика Земли. — 1973. — № 2. — С. 136—147.
2. Люстерник Л. А. Краткий курс функционального анализа / Л. А. Люстерник, В. И. Соболев. — М. : Высш. шк., 1982. — 272 с.
3. Яворский Е. М. Справочник по физике / Е. М. Яворский, А. А. Детлаф. — М. : Наука, 1968. — 939 с.
4. Корн Г. Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. — М. : Наука, 1977. — 831 с.
5. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ / П. К. Рашевский. — М. : Наука, 1967. — 386 с.
6. Бицадзе А. Б. Основы теории аналитических функций комплексного переменного / А. Б. Бицадзе. — М. : Наука, 1969. — 274 с.

7. Цирульский А. В. О некоторых свойствах комплексного логарифмического потенциала однородной области / А. В. Цирульский // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. — 1963. — С. 36—49.

On the basis of the apparatus of generalized Cauchy type integrals for harmonic functions of three variables, the questions of interpretation of gravity anomalies, which depend on three spatial coordinates. Obtain representations of the derivatives of the gravitational potential in the form of three-dimensional analogues of Cauchy type. The question of the relation of singular points of the derivatives of the potential with the shape of the surface perturbing bodies and investigate the possibility of using the values of potential fields to determine the shape of this surface as a whole.

Key words: *gravity anomaly, the potential tensor field, a singular point.*

Отримано 10.10.2010

УДК 517.5

Ю. В. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,
У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук,
В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ РІВНОМІРНОЇ НЕСИМЕТРИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ ОДНОЗНАЧНИМИ

Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі найкращої рівномірної несиметричної апроксимації багатозначного відображення однозначними.

Ключові слова: *напіввідхилення за Гаусдорфом, рівномірна апроксимація,багатозначне відображення.*

Вступ. При розв'язуванні різних задач практичного характеру часто зустрічаються функціональні залежності, які не означені точно, а лише відомо, що їх значення належать деяким множинам лінійного нормованого простору. У зв'язку з цим виникає задача найкращого у деякому розумінні відновлення вищеназваної багатозначної залежності однозначними функціональними залежностями (однозначними апроксимантами) певного класу. Одна з таких задач розглядається у цій статті.

Постановка задачі. Нехай X — лінійний над полем комплексних чисел нормований простір. Для множини F та елемента x цього про-