

УДК 532.527

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ УТВОРЕННЯ ТА РУХУ ВИХРОВОЇ ПАРИ

Г. Г. БУЛАНЧУК

Приазовський державний технічний університет, м. Маріуполь

Отримано 09.04.2002 ◊ Переглянуто 15.12.2002

Моделюється процес утворення та рух вихрової пари при короткочасовому випуску рідини із плоского отвору. Задача розв'язується в нелінійній нестационарній постановці методом дискретних вихорів. Чисельна візуалізація реалізується шляхом фіксації окремих частинок і спостереженням за їхнім рухом. Проведена комп'ютерна анімація на значному проміжку часу. Вивчається внутрішня структура течії, динаміка завихренності та атмосфери пари, траєкторії окремих вихорів, перенесення парою пасивних домішок. Розглянутий рух пари при різній кількості випущеної рідини. Показана стійкість течії до дії малих випадкових збурень. Одержані результати узгоджуються з відомими експериментальними та теоретичними даними.

Моделируется процесс образования и движение вихровой пары при кратковременном выбросе жидкости из плоского отверстия. Задача решается в нелинейной нестационарной постановке методом дискретных вихрей. Численная визуализация реализуется с помощью фиксации отдельных частиц и наблюдением за их движением. Проведена компьютерная анимация на значительном промежутке времени. Изучается внутренняя структура течения, динамика завихренности и атмосферы пары, траектории отдельных вихрей, перенос парой пассивной примеси. Полученные результаты согласуются с известными экспериментальными и теоретическими данными.

The vortex pair generation and its motion under short-tem outflow from narrow slot is computed using the discrete vortex method. Numerical visualisation is realized by means of fixing single particles and its tracing. It was carried out computer animation during the long time. The flow inner structure, vorticity dynamics and pair atmosphere, isolated particles trajectories, passive additives transfer was investigated. The results are in a good agreement with known experimental and theoretical data.

ВСТУП

Питанню дослідження вихрових кілець або їхнього плоского аналогу – вихрових пар – присвячено велику кількість робіт, наприклад, [1–8] та ін. Різні математичні моделі процесу утворення вихрових кілець запропоновані в роботах [9–12]. Динаміка турбулентних вихрових пар з урахуванням впливу стінки розглянута в роботах [13, 14]. В роботі [15] досліджується перенесення домішок турбулентним вихровим кільцем.

Одним із основних методів генерації вихрового кільця або пари в експериментах є короткочасовий випуск рідини із трубки [3, 6] або із вузького плоского отвору [4]. Для того, щоб форма і внутрішній рух були видимими, рідину, як правило, підфарбовують.

Розв'язок задачі для затопленого струменя [16, 17] показав, що основні характеристики нестационарних струменевих течій ідеальної рідини можуть бути описані за допомогою методу дискретних вихорів. У роботі [16] також указано на можливість моделювання даним методом вихрових пар та вихрових кілець, але детально дана задача не розглядається.

В даній роботі моделюється утворення та рух вихрової пари скінченного перерізу при короткочасовому випуску рідини із плоского отвору мето-

дом дискретних вихорів. Для реалізації чисельного аналогу ефекту "підфарбовування" фіксуються частинки всередині сопла, які за рахунок початкового імпульсу виштовхуються в нерухоме середовище такої самої густини. Оскільки задача розв'язується в нестационарній постановці, весь процес їхнього руху можна спостерігати в динаміці на екрані комп'ютера. Це дає можливість детально дослідити процес зародження пари та внутрішню структуру течії. В роботі розглянута також динаміка пари при різній кількості випущеної рідини, рух рідини в навколишньому просторі, вплив на характер течії випадкових збурень.

З практичної точки зору така задача може розглядатись як перенесення пасивних домішок рідиною, що зі значною швидкістю (при великих числах Рейнольдса) виштовхується в навколишнє середовище на протязі короткого проміжку часу. В екології – це задача аварійного викиду в атмосферу або водне середовище різних відходів та хімічних речовин.

Дана задача є також цікавою з точки зору динаміки точкових вихорів в ідеальній рідині та особливостей цієї динаміки в методі дискретних вихорів. Відомо (див. напр. [1]), що взаємодія багатьох точкових вихорів у загальному випадку приводить до їхнього хаотичного руху. Однак дана задача, як показали розрахунки, є прикладом

регулярних траєкторій вихорів, хоча кількість таких вихорів досягає декількох сотень.

З точки зору розвитку методу важливо було також з'ясувати, чи будуть дискретні вихори, що моделюють дві області завихреності протилежного знаку, генерувати свій осереднений поступальний рух без наявності зовнішньої течії і на якому проміжку часу такий рух буде коректно моделювати реальний фізичний процес.

В роботі вивчаються також можливості методу в моделюванні динаміки атмосфери пари та процесу втягування у вихрову область рідини з навколишнього середовища. Такі характеристики в рамках методу дискретних вихорів не розглядались.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ І МЕТОД РОЗВ'ЯЗКУ

В площині XOY розглянемо область Ω , обмежену твердою границею $\sigma = \bigcup_{i=1}^2 \sigma_i$ (рис. 1). Відстань між σ_1 і σ_2 дорівнює d . В момент часу $t = 0$ рідина починає витікати із сопла з постійною швидкістю. При деякому значенні $t > t_1$ витрата рідини через переріз σ_s покладається рівною нулю. Границі струменя будемо моделювати вихровими пеленами σ_k^* ($k = \overline{1,4}$), які сходять із гострих кромek A_1 і A_2 . Всюди, крім σ_i і σ_k^* , течія безвихрова, тому задача зводиться до розв'язку в області Ω рівняння Лапласа відносно потенціалу швидкості $\Phi(x, y, t)$. Граничними умовами будуть умови на твердих границях σ_i , вихрових пеленах σ_k^* та деякому перерізі σ_s між твердими границями, а також на нескінченності. Додатковою умовою буде умова скінченності в точках A_1 і A_2 . Задача розв'язується в безрозмірному вигляді, характерними величинами є відстань d та витрата рідини Q_∞ через переріз σ_s в початковий момент часу. Основні безрозмірні величини будуть мати вигляд: $\tau = tQ_\infty/d^2$, $\vec{w} = \vec{W}d/Q_\infty$, $\bar{x} = x/h$, $\bar{y} = y/h$, $\varphi = \Phi/Q_\infty$ (далі рисочки будемо опускати).

На границі σ рівномірно, з кроком Δl розміщуються приєднані вихори $\Gamma_{\Sigma\mu}$ і контрольні точки (позначені хрестиком), які знаходяться посередині між приєднаними вихорами (рис. 1). Вихори в точках A_1 і A_2 вважаються вільними [16].

Границі утвореного струменя моделюються дискретними вихорами $\delta^{(i)s}$ ($s = \overline{1,r}$; $i = \overline{1,2}$), що сходять з точок A_1 і A_2 в кожен розрахунковий момент часу τ_s і далі рухаються, не змінюючи своєї інтенсивності по траєкторіям частинок рідини (рис. 1). Із умови непротікання в контрольних

точках, заданої витрати рідини Q_∞ та рівності нулю циркуляції по рідинному контуру, що охоплює всі вихори, в кожен розрахунковий момент часу τ_r одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно циркуляції приєднаних вихорів $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$:

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r a_{\mu\nu} = -(w_{I_{x\nu}}^r n_{x\nu} + w_{I_{y\nu}}^r n_{y\nu}), \quad \nu = \overline{1, N},$$

$$\sum_{\mu=1}^{N+2} \Gamma_{\Sigma\mu}^r = \sum_{i=1}^4 \sum_{s=1}^r \delta^{(i)s}, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{\mu=1}^{N+2} w_{x\mu} \Gamma_{\Sigma\mu}^r + \sum_{s=1}^r \sum_{i=1}^4 w_{xsi} \delta^{(i)s} \right) \Delta S_j = Q(\tau_r).$$

де $\Gamma_{\Sigma\mu}^r a_{\mu\nu}$ – нормальна швидкість в контрольній точці ν від приєданого вихору $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$; $w_{I_{x\nu}}^r$, $w_{I_{y\nu}}^r$ – відповідно поздовжня і поперечна швидкості в контрольній точці, збуджені всіма вільними вихорами; $w_{x\mu} \Gamma_{\Sigma\mu}^r$ – поздовжня швидкість в точці B_j , викликана приєднаним вихором $\Gamma_{\Sigma\mu}^r$; $w_{xsi} \delta^{(i)s}$ – поздовжня швидкість в точці B_j , викликана вільним вихором $\delta^{(i)s}$. Безрозмірна витрата рідини $Q(\tau_r)$ через переріз σ_s задається рівнянням:

$$Q(\tau_r) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \tau_r \leq \tau_1, \\ 0, & \text{при } \tau_r > \tau_1. \end{cases}$$

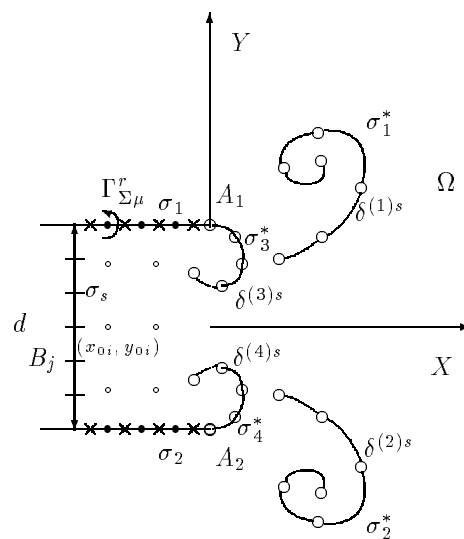


Рис. 1. Моделювання границь струменя дискретними вихорами

Між σ_1 і σ_2 зафіксуємо початкове положення окремих частинок рідини (x_{0i}, y_{0i}) , $i = \overline{1, nd}$. Координати як вільних вихорів, так і частинок рідини, за якими ведеться спостереження, знаходяться із системи диференціальних рівнянь їхнього руху. При інтегруванні використовувалась проста схема Ейлера:

$$\begin{aligned} x_i(\tau_{r+1}) &= x_i(\tau_r) + w_{xi}(\tau_r) \cdot \Delta\tau_r, \\ y_i(\tau_{r+1}) &= y_i(\tau_r) + w_{yi}(\tau_r) \cdot \Delta\tau_r, \\ r &= 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2)$$

де $w_{xi}(\tau_r), w_{yi}(\tau_r)$ – швидкості, збуджені всією системою вихорів в момент часу τ_r . Початкові умови для вихорів:

$$(x_{ik}(\tau^*), y_{ik}(\tau^*)) = (x_{Ak}, y_{Ak}), \quad i = \overline{1, r}; \quad k = 1, 2,$$

для фіксованих частинок:

$$(x_i(0), y_i(0)) = (x_{0i}, y_{0i}), \quad i = \overline{1, nd}.$$

Після розв'язку системи (1) знаходяться нові координати вільних вихорів і частинок із системи (2), потім робиться крок по часу: $\tau_{r+1} = \tau_r + \Delta\tau_r$, знову розв'язується система (1) і т. д.

Швидкість від кожного окремого вихору знаходиться за формулою Біо-Савара. Щоб уникнути нескінченної швидкості в центрі самого вихору, вводиться радіус дискретності r_s (ядро вихору). Всередині кожного з таких ядер будемо задавати лінійне спадання швидкості до нуля при наближенні до центру вихору (вихор Ренкіна). Таким чином, швидкість обчислюється за формулою:

$$\vec{w}(\vec{\Gamma}, \vec{r} - \vec{r}_B) = \begin{cases} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_B) \times \vec{\Gamma}}{2\pi|\vec{r} - \vec{r}_B|^2}, & |\vec{r} - \vec{r}_B| \geq r_s, \\ \frac{(\vec{r} - \vec{r}_B) \times \vec{\Gamma}}{2\pi r_s^2}, & |\vec{r} - \vec{r}_B| < r_s, \end{cases}$$

де r_s – ефективний радіус, пов'язаний із дискретизацією по простору, $r_s = \Delta l$; Δl – відстань між приєднаними вихорами на твердій границі.

Функція течії визначається як сума функцій течії всіх вихорів (вільних і приєднаних). Від кожного окремого вихору Γ_i , що знаходиться в точці (x_i, y_i) , функція течії знаходиться за формулою:

$$\psi_i(x, y, \tau) = \begin{cases} -\frac{\Gamma_i(\tau)}{4\pi} \ln(\vec{r} - \vec{r}_i)^2, & (\vec{r} - \vec{r}_i)^2 > r_s^2, \\ -\frac{\Gamma_i(\tau)}{2\pi} \ln r_s, & (\vec{r} - \vec{r}_i)^2 \leq r_s^2, \end{cases} \quad (3)$$

де $(\vec{r} - \vec{r}_i)^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2$.

Тоді

$$\psi(x, y, \tau) = \sum_{i=1}^{2N+2r} \psi_i(x, y, \tau). \quad (4)$$

Для побудови ліній течії вводилась двовимірна сітка і обчислювалось значення функції ψ в точках цієї сітки. Лінії течії в кожен момент часу будувались як ізолінії функції $\psi(x, y, \tau)$. В системі координат, що рухається поступально вздовж осі OX разом із системою вихорів зі швидкістю W_{xf} , функція течії буде мати вигляд

$$\psi^r(x, y, \tau) = \psi(x, y, \tau) - W_{xf}y. \quad (5)$$

На кожній границі σ_1 і σ_2 розміщувалось по 60 вихорів на відстані $5d$ вліво від початку координат, крок по часу покладался постійним і рівним відстані між приєднаними вихорами $\Delta\tau_s = \Delta l$ [16].

Зауважимо, що всі представлені результати (крім графіків, які окремо оговорені) одержані для випадку, коли час випуску рідини із отвору $\tau_1 = 5$. Додатково проведено дослідження траєкторії пари та її швидкості при різній кількості випущеної рідини (при різному значенні τ_1).

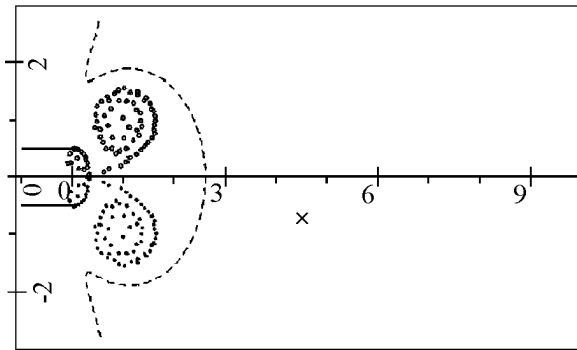
2. РЕЗУЛЬТАТИ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1 Початковий етап утворення вихрової пари

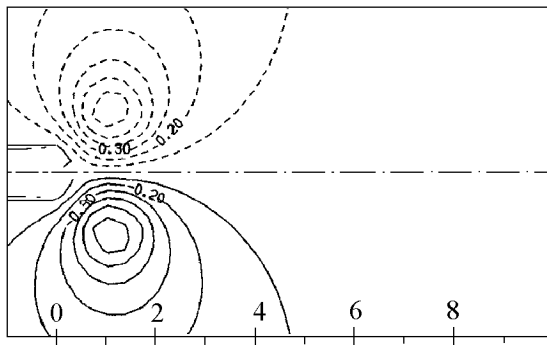
На початковому етапі руху рідини на гострих кромках A_1 і A_2 утворюються вихрові пелени, які відразу ж починають згортатись у спіраль, віддаляючись від отвору (рис. 2). Ці спіралі є зоною завихренності (що моделюється дискретними вихорами) і представляють собою основу майбутніх ядер пари. В момент часу τ_1 , коли рідина перестає подаватись через отвір, біля кожної кромки починають формуватись нові області завихренності, протилежні за знаком областям, які вже утворені. Причому дискретні вихори, що продовжують сходити з кромки, будуть мати напрямок обертання, протилежний до своїх попередників, значно меншу інтенсивність і швидкість. Вони скупчуються біля сопла і не рухаються вздовж осі OX (рис. 2). Аналогічні області завихренності (їх фотографії) для вихрового кільця представлені в [18], а також отримані при чисельному моделюванні іншим методом в [11].

На рис. 2 можна бачити, як zdeформувалась під час руху рідинна лінія (позначена штрихом), яка в початковий момент часу була зафіксована перпендикулярно осі OX . Вигляд цієї лінії свідчить як про формування атмосфери пари, так і про втягання рідини на задньому фронті.

Процес формування пари закінчується приблизно при $\tau = 6$ (для $\tau_1 = 5$). Картина ліній течії

Рис. 2. Картина вихорів в момент часу $\tau = 6$

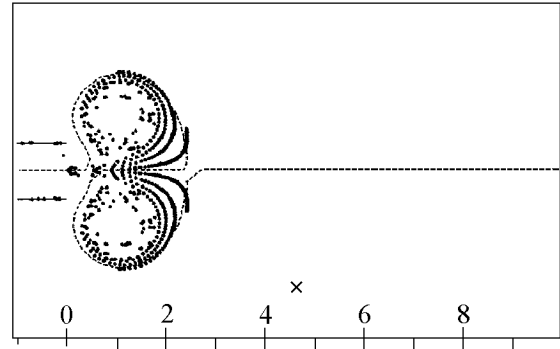
(рис. 3) дуже схожа на класичний випадок двох точкових вихорів однакової по модулю, але протилежної за знаком циркуляції. Функція течії обчислювалась за формулою (4).

Рис. 3. Лінії течії при $\tau = 6$

На рис. 4 зображено положення помічених частинок в момент часу $\tau = 6$. Враховуючи, що в початковий момент часу частинки були розміщені вздовж прямих, паралельних осі OX , то можна бачити, як zdeформувались ці прямі під час руху. Штрихом зображено нульову лінію течії в рухомій системі координат (атмосферу утвореної пари). Видно, що практично вся рідина, яка виходить із сопла, попадає всередину атмосфери. Площа області, обмеженої атмосферою, становить близько 6 кв. од. Враховуючи, що рідина в соплі помічалась на площі 5 кв. од., можна зробити висновок – доля відміченої рідини в атмосфері буде становити близько 80% від всього об'єму. Цей результат близький до результату роботи [15], за яким доля підфарбованої рідини у вихровому кільці становить більше 95% всього об'єму утвореного вихору.

2.2 Динаміка течії після відриву

При $\tau \approx 6$ утворена вихрова структура починає відриватись від основної маси рідини (див. рис. 2 та 4). Якщо спостерігати даний момент на екрані комп'ютера, то відрив схожий на розрив пружного тіста. Такий характер спостерігався в експерименті і описаний в [1].

Рис. 4. Відрив вихрової структури ($\tau = 6$)

Після відриву частина рідини, що знаходиться з обох сторін осі OX , швидко прямує до осі, заповнюючи область, яку залишила рідина, що відривалась. Остання, в свою чергу, з прискоренням рухається вперед, випереджаючи основну масу і згладжуючи передній фронт у вигляді напівкола (рис. 5, *a*).

З наступним обертом два великомасштабні вихори розходяться на деяку відстань, утворюючи чітку симетричну структуру (при $\tau \approx 11$). З подальшим їх зближенням (рис. 5, *b*) певна кількість рідини на задньому фронті ніби відтінається, залишаючись не втягнутою в обертальний рух, і гурпується в дві "пелюстки" (рис. 5, *c*). Такий характер течії, що відомий для вихрових кілець та пар, спостерігався в експерименті [6] і при чисельному моделюванні [12] методом вихрових згустків, де названий процесом утворення "губ". В центральній частині також утворюються правильні замкнуті симетричні структури (рис. 5, *c*).

Слід сказати, що на ранній стадії формується декілька таких ефектних конфігурацій, які змінюють одна одну з кожним новим обертом рідини.

Для того, щоб дослідити характер течії в навколишньому середовищі, використовувалась наступна методика. На кожному кроці по часу обчислювалась швидкість рідини в оточуючому середовищі (у певних точках сітки). Якщо вона перевищувала деяке значення, то дана частинка вважалась

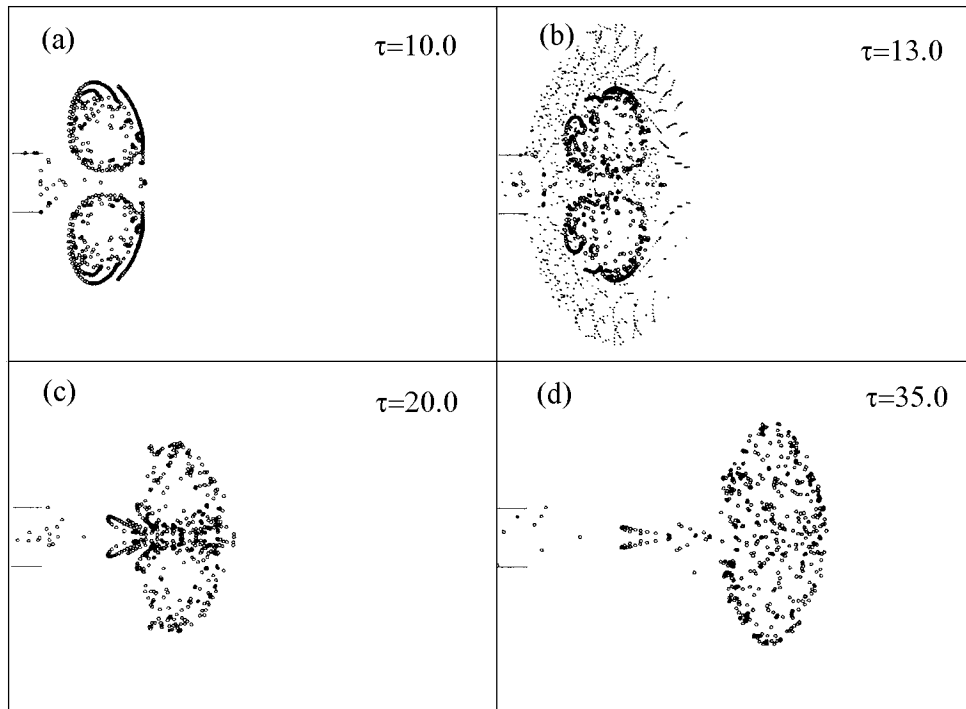


Рис. 5. Картина течії в різні моменти часу

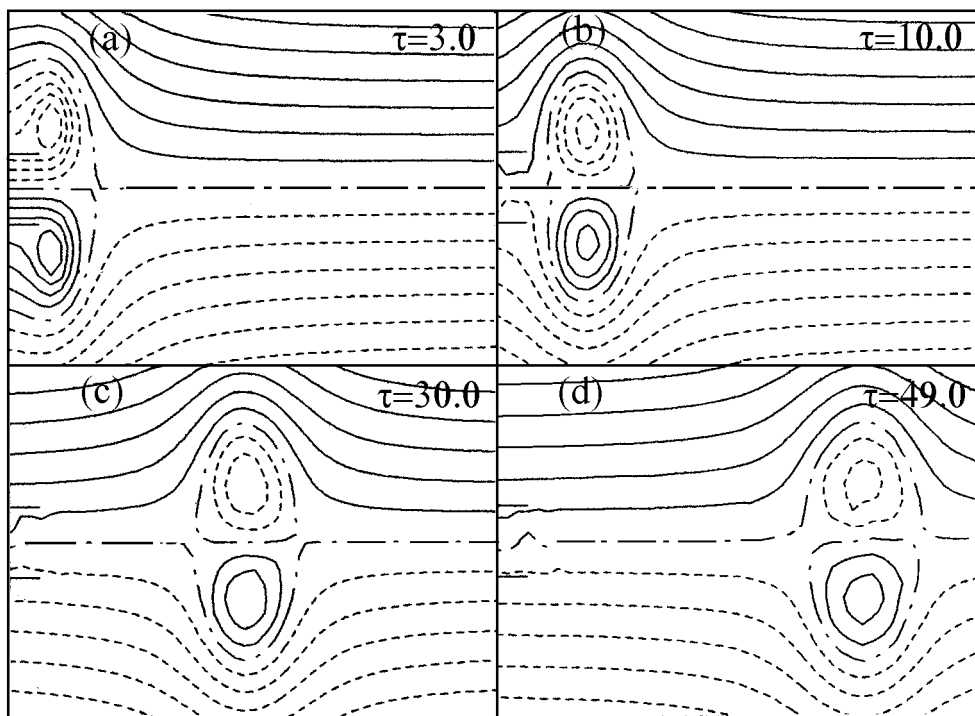


Рис. 6. Зміна атмосфери пари

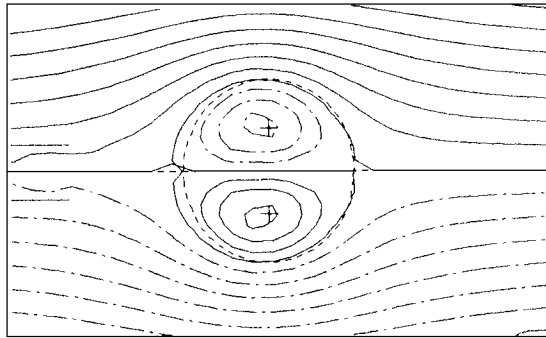


Рис. 7. Атмосфера вихрової пари в момент часу $\tau = 15$

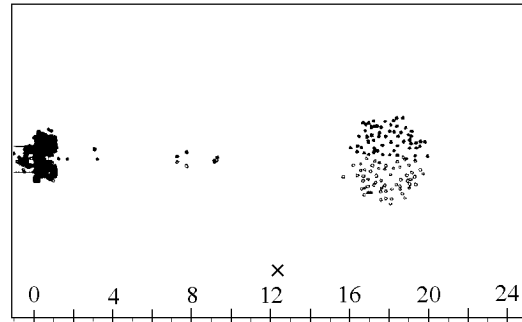


Рис. 8. Картина вихорів в момент часу $\tau = 80$

втягнутою в загальний обертально-поступальний рух, помічалась, і знаходилась її подальша траєкторія. На (рис. 5, *b*) зображені частинки рідини, модуль швидкості яких в певний момент часу перевищив 0.1. Якщо спостерігати цей процес на екрані комп'ютера, то видно, що втягування відбувається переважно на задньому фронті вихрової структури. На передньому фронті рідина обтікає цю структуру, як тверде тіло. Якщо розглянути лінії течії в рухомій системі координат (рис. 6), то форма цього тіла буде співпадати з атмосферою пари.

2.3 Зміна з часом атмосфери пари

Атмосфера пари формується до $\tau \approx 6$ (рис. 4). При $\tau \approx 14$ атмосфера набуває форми, схожої на класичний випадок точкової вихрової пари. Зміна атмосфери з часом зображена на рис. 6 (функція течії знаходилась за формулою (5)). Обчислення показують, що площа атмосфери з часом збільшується (від $\tau = 14$ до $\tau = 60$ приблизно на 25%), причому розширення відбувається переважно вздовж осі OX , вздовж осі OY розміри практично не змінюються. Збільшення атмосфери відбувається за рахунок втягування рідини із навколишнього середовища і приводить до зменшення швидкості руху рідини всередині атмосфери, що і видно із густини ліній течії (рис. 6).

На рис. 7 зображена атмосфера вихрової пари в момент часу $\tau = 15$. Штриховою лінією для порівняння проведена атмосфера двох сумарних точкових вихорів Γ та $-\Gamma$, інтенсивності яких дорівнюють відповідно сумі дискретних вихорів з додатною циркуляцією та сумі вихорів з від'ємною циркуляцією. Дані вихори розміщуються в центрах додатньої та від'ємної завихренності (на рисунку позначені хрестиком), знайдених за форму-

лами [1]:

$$X_i = \frac{\sum_{k=1}^{s'} \delta^{(i)k} x_k^i}{\Gamma}, \quad Y_i = \frac{\sum_{k=1}^{s'} \delta^{(i)k} y_k^i}{\pm\Gamma}, \quad i = 1, 2,$$

де (x_k^i, y_k^i) – координати вихору $\delta^{(i)k}$; s' – кількість вільних вихорів з кожного боку від осі OX (вихори біля сопла не враховуються). Лінії течії, знайдені чисельно, зображені в системі координат, що рухається зі швидкістю, рівною миттєвій швидкості руху переднього фронту пари W_{xf} . Дана швидкість знаходилась шляхом диференціювання функції $x_f(\tau)$, що описує залежність положення фронту пари від часу, і обчислювалась як максимальна x -координата помічених частинок. Швидкість руху відповідної точкової пари $(\Gamma, -\Gamma)$ постійна і знаходиться за формулою (див. [1])

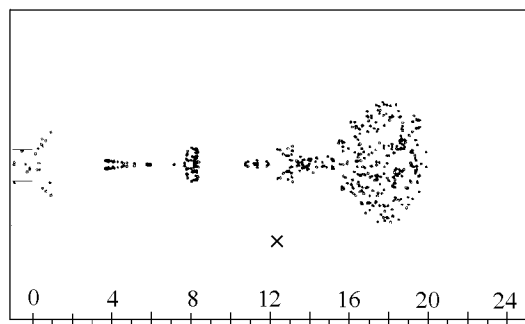
$$W_t = \frac{\Gamma}{4\pi Y_1}. \quad (6)$$

В даних обчисленнях значення вказаних величин (з точністю до 10^{-4}) будуть: $\Gamma = 2.9477$, $X_1 = X_2 = 3.3295$, $Y_{(1,2)} = \pm 0.7842$, $W_{xf} = 0.26$, швидкість відповідної точкової пари $W_t = 0.2991$. Як видно із рис. 7, атмосфери майже співпадають.

2.4 Поступальний рух вихрової пари

Поступальний рух пари зберігається на всьому проміжку моделювання (обчислення проводились до $\tau = 200$). За цей час дана структура проходить досить значну відстань (близько $40d$).

На рис. 8 зображено положення утвореної вихрової структури в момент часу $\tau = 82$, а на рис. 9 – положення помічених частинок в той же момент часу. Видно, що за парою утворюється тонкий

Рис. 9. Положення домішок в момент часу $\tau = 80$

хвіст із "підфарбованою" рідини, що покидає атмосферу. Причому, якщо порівняти із картиною вихорів (рис. 8), цей хвіст майже не містить завихреності. Аналогічний результат одержано в роботі [12]. Для порівняння – хвіст вихрового кільця містить біля 30% циркуляції [12].

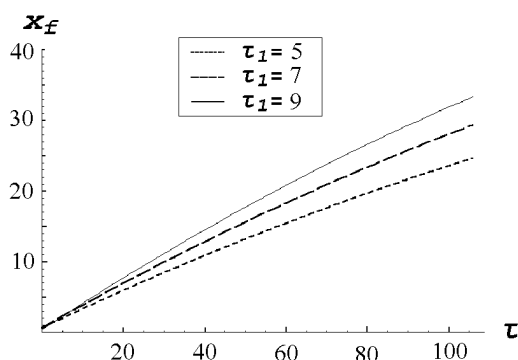
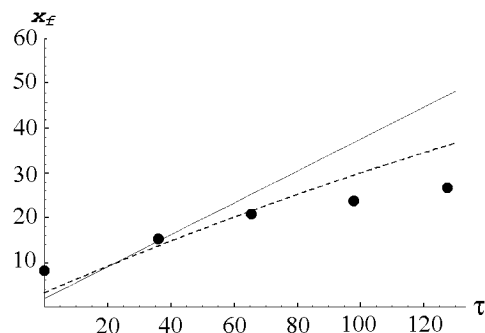


Рис. 10. Траєкторія вихрової пари при різних кількостях випущеної рідини

Залежність відстані, пройденої вихровою парою, від часу при різних кількостях випущеної рідини (при різних значеннях τ_1) показана на рис. 10. Форма кривих близька до форми параболи. Видно, що при збільшенні кількості випущеної рідини за один і той же час пара проходить більшу відстань.

На рис. 11 зображено порівняння траєкторії пари при $\tau_1 = 7$ (штрихова лінія) з експериментальними даними, приведеними до безрозмірного вигляду (кружечки), а також із траєкторією точкової вихрової пари (суцільна лінія) відповідної сумарної циркуляції, вихори якої розміщені в центрах додатньої і від'ємної завихреності. Експериментальні дані взяті з роботи [4], де розглядається утворення турбулентної вихрової пари при ім-

Рис. 11. Траєкторія вихрової пари при $\tau_1 = 7$: точки – експеримент [4], штрихова лінія – даний розрахунок, суцільна лінія – траєкторія точкової пари

пульсному виштовхуванню рідини поршнем через плоский отвір із деякого об'єму. Відлік часу ве-

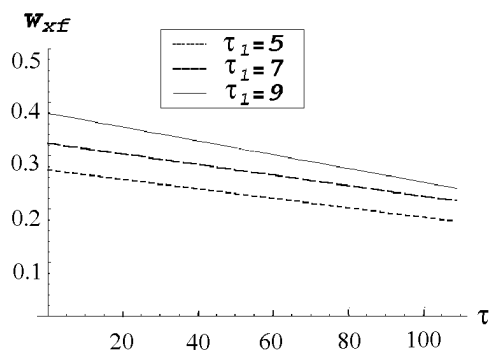


Рис. 12. Зміна швидкості вихрової пари

деться з моменту, коли поршень зупиняється (для даних чисельних результатів – з моменту часу $\tau = \tau_1$). Видно, що турбулентна вихрова пара проходить за один і той самий проміжок часу меншу відстань. Це пов'язано з тим, що для турбулентної вихрової пари, як відмічено в роботі [4], впорядкована циркуляція зменшується внаслідок внутрішнього турбулентного перемішування навколо центральної лінії (осі OX). Однак, не дивлячись на ці відмінності, експериментальна і чисельна траєкторії відрізняються не дуже сильно і обидві мають форму параболи. На відміну від цього, відстань, пройдена точковою парою, лінійно залежить від часу. Зміна швидкості при різних значеннях τ_1 зображена на рис. 12.

2.5 Траєкторії окремих вихорів

Представляє інтерес дослідження траєкторій, якими рухаються окремі дискретні вихори в даному моделюванні. Відомо (див. напр. [1]), що рух уже чотирьох точкових вихорів у загальному випадку неінтегрований і при певних параметрах траєкторії набувають хаотичного характеру. В даній задачі кількість точкових вихорів становить декілька сотень. Хоча на екрані комп'ютера їхній сукупний рух здається дещо хаотичним, але результати показують, що траєкторії носять досить регулярний характер. На рис. 13 зображені характерні траєкторії двох окремих вихорів, які сходять в один і той же момент часу з точок A_1 і A_2 . Хаотичної адвекції, на яку можна було б чекати в даній задачі, як бачимо, не виникає.

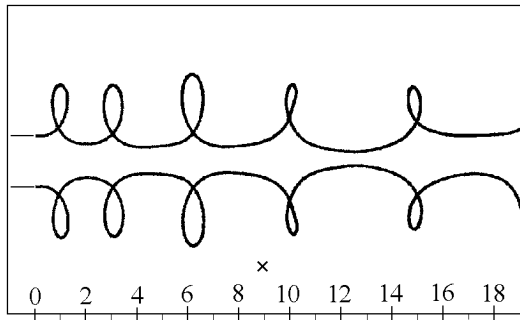


Рис. 13. Траєкторії двох вихорів до моменту часу $\tau = 77.5$

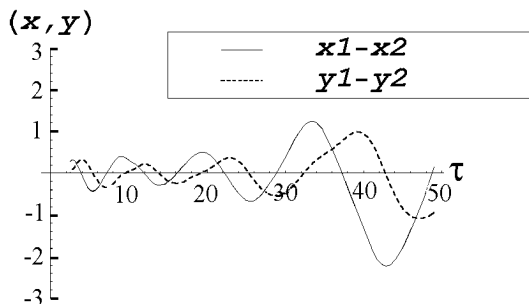


Рис. 14. "Чехарда" двох точкових пар

Поглянемо на дане моделювання з іншого боку. Вільні вихори, що сходять із точок A_1 і A_2 , мають рівну, але протилежну за знаком циркуляцію,

тобто утворюють точкові вихрові пари. Для дослідження їхньої динаміки було проведено спостереження за траєкторіями двох окремих точкових пар, що сходять у потік через певний проміжок часу ($\tau \approx 0.33$). Першою сходять пара, вихор з додатною циркуляцією якої має координати (x_1, y_1) , потім пара, додатній вихор якої має координати (x_2, y_2) . На рис. 14 зображено різницю відповідних координат цих вихорів в залежності від часу. В початковий момент часу пари знаходяться на певній відстані по осі OX і мають приблизно однакові y -координати ($y_1 - y_2 = 0$). Далі задня пара наздоганяє передню ($x_1 - x_2$ зменшується), звужуючись, а передня, відповідно, розширюється, в результаті $y_1 - y_2$ росте. Коли вони зрівняються ($x_1 - x_2 = 0$), відстань між ними буде максимальною ($y_1 - y_2$ має максимум на графіку). Потім задня проскакує вперед ($x_1 - x_2 < 0$) і процес продовжується по тому ж сценарію, тобто відбувається добре відомий процес "чехарди" із періодом, що збільшується з часом. Така сама "чехарда" спостерігається і для інших, довільно вибраних, точкових пар.

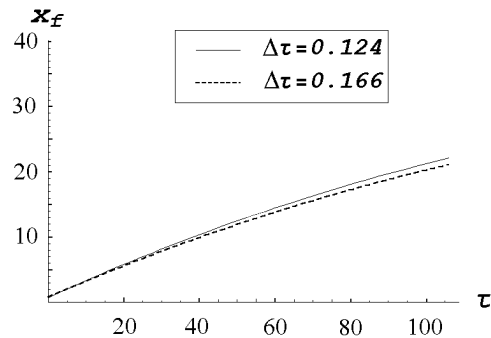


Рис. 15. Траєкторія вихрової пари при різному значенні кроку по часу

Таким чином, можна зробити висновок, що еволюція вихрової пари скінченного перерізу є наслідком "чехарди" великої кількості точкових вихрових пар. Швидкість поступального руху буде залежати від швидкості, з якою відбувається ця "чехарда".

Обчислення проміжку часу, який проходить між послідовними максимальними віддаленнями двох дискретних вихорів (на траєкторії (рис. 13) – це максимальні по модулю y -координати) дає такі результати. Час між першим і другим віддаленням дорівнює $\tau = 8.99$, між другим і третім – $\tau = 11.92$, між третім і четвертим час становить $\tau = 14.28$. Тобто, як бачимо, процес "чехарди" сповільнюється

ся, що видно також із графіка на рис. 14. Це і приводить до зменшення швидкості поступального руху всієї вихрової структури.

2.6 Вплив чисельних параметрів та випадкових збурень на динаміку течії

Обчислення показують, що характер течії стійкий відносно значної зміни чисельних параметрів: кількості вихорів на твердій границі та кроку по часу $\Delta\tau$. Наприклад, на рис. 12 зображена траєкторія вихрової пари при різних значеннях $\Delta\tau$. Можна бачити, що траєкторії відрізняються мало, хоча кількість дискретних вихорів при різних значеннях кроку буде різною.

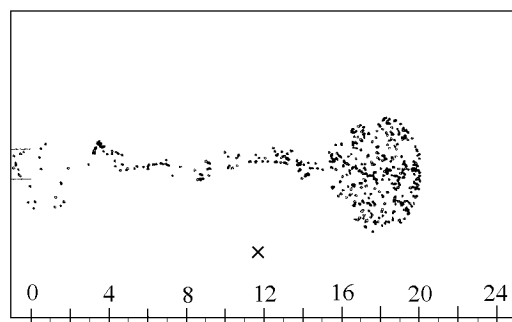


Рис. 16. Положення домішок при генерації збурень у момент часу $\tau = 80$

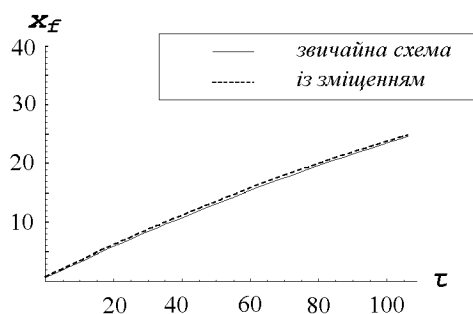


Рис. 17. Вплив випадкових збурень на траєкторію пари

Досліджувалась також зміна течії під впливом випадкових збурень. Для цього змінювалось по-

ложення кожного вихору, що сходиться у потік, за схемою:

$$\begin{aligned} x_i(\tau_{r+1}) &= x_i(\tau_r) + w_{xi}(\tau_r) \cdot (\Delta\tau_r + \varepsilon), \\ y_i(\tau_{r+1}) &= y_i(\tau_r) + w_{yi}(\tau_r) \cdot (\Delta\tau_r + \varepsilon), \\ i &= \overline{1, nd}, \quad r = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (7)$$

де ε – величина, що генерується за допомогою генератора випадкових чисел і лежить в межах $-0.001 \leq \varepsilon \leq 0.001$. На рис. 16 зображено положення відмічених частинок при дії випадкових збурень. Якщо порівняти рис. 16 із рис. 9, то видно, що збурення впливають лише на картину течії в хвості вихрової пари, порушуючи його симетрію. Траєкторія переднього фронту пари практично не змінюється (рис. 17).

2.7 Перенесення пасивних домішок

Якщо розглядати помічені точки як пасивні домішки, то за даною методикою можна, зокрема, дослідити характер їх переносу вихровою парою та зміну концентрації. В початкові моменти часу найвища концентрація домішок спостерігається на передньому фронті пари (до $\tau \approx 10$) (рис. 5). При $\tau \approx 35$ розподіл стає майже рівномірним. Щоб оцінити зміну концентрації з часом, початковій концентрації в соплі C_0 можна поставити у відповідність кількість помічених точок на одиницю площі n_0 (в моделі $n_0 = 100$). Зміна кількості точок на одиницю площі n/n_0 наближено буде характеризувати зміну концентрації домішок C/C_0 (при їх рівномірному розподілі). За проведеними оцінками до $\tau = 50$ концентрація зменшується приблизно на 50%, до $\tau = 100$ – на 75%. Зменшення концентрації відбувається внаслідок того, що частина домішок втрачається у вигляді сліда, а сама область вихору розширюється.

За результатами переносу домішок вихровим кільцем [15] при пройденій відстані близько 30 діаметрів відношення маси домішок до початкової маси становить близько 10%, за даними результатами домішок залишається близько 60%, тобто пара краще переносить домішки, ніж вихрове кільце. Цей результат непрямо слідує із [12], де показано, що хвіст вихрової пари значно тонший, ніж хвіст кільця.

ВИСНОВКИ

Одержані результати вказують на те, що модель дискретних вихорів дозволяє в рамках єдиної схеми дослідити як процес утворення, так і рух вихрової пари. Показано, що еволюція вихрової

пари скінченного перерізу є наслідком "чехарди" великої кількості точкових вихрових пар.

Детально розглянуто процес формування пари скінченного перерізу, відрив і подальший рух вихрової структури, траєкторії окремих вихорів. Показано, що атмосфера утворюється переважно за рахунок рідини, що надходить із сопла, і з часом розширюється при втягуванні рідини з навколишнього середовища. Досліджено рух пари та її швидкість при різній кількості випущеної рідини. Показана стійкість течії до дії випадкових збурень та зміни чисельних параметрів. Розглянуто перенесення парою пасивних домішок, зміну з часом їх концентрації та маси.

Одержані результати узгоджуються з експериментальними та теоретичними даними інших авторів.

1. Мелешко В.В., Константинов М. Ю. Динамика вихрових структур.– К.: Наук. думка, 1993.– 276 с.
2. Гринченко В.Т., Мелешко В. В., Гуржий А. А., Хейст Г.Я.Ф., Эйсенг А.Г.М. Два подхода к анализу коаксиального взаимодействия вихровых колец // Прикладна гідромеханіка.– 2000.– Т. 2(74), N3.– С. 40-52.
3. Владимиров В. А., Тарасов В. Ф. Формирование вихровых колец // Известие СО АН СССР, сер. техн. наук.– 1980.– N3, Вып. 1.– С. 3-11.
4. Jin Wu Turbulent vortex pairs in neutral surroundings // Phys. Fluids.– 1977.– V. 20, N 12.– P. 1967-1974.
5. Cantwell B., Rott N. The decay of viscous vortex pair // Phys. Fluids.– 1988.– V. 31, N 11.– P. 207-223.
6. Glezer A. The formation of vortex rings // Phys. Fluids.– 1988.– V. 31, N 12.– P. 3532-3542.
7. Counder Y. Experimental and numerical study of vortex couples in two-dimensional flows // J. Fluid Mech.– 1986.– V. 173.– P. 225-251.
8. Беляев С.Т., Краснов Ю.К. О собственной массе сингулярной вихровой пары // Доклады Академии наук СССР.– 1989.– Т. 306, N 3.– С. 566-570.
9. Pullin D.I. Vortex ring formation at tube and orifice openings // Phys. Fluids.– 1979.– V. 22 (3).– P. 401-403.
10. Mohseni K., Ran H., Colonius T. Numerical experiments on vortex ring formation // J. Fluid Mech.– 2001.– V. 430.– P. 267-282.
11. Nitsche M., Krasny R. A numerical study of vortex ring formation at the edge of circular tube. J. Fluid Mech 1994 V. 276 139-161
12. Nitsche M. Self-similar shedding of vortex rings // J. Fluid Mech.– 2001.– V. 435.– P. 397-407.
13. Barker S., Crow S. The motion of two-dimensional vortex pairs in a ground effect // J. Fluid Mech.– 1977.– V. 82.– P. 659-671.
14. Спаларт Ф.Р., Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л. Моделирование взаимодействия вихровой пары с поверхностью земли // МЖГ.– 2001.– N 6.– С. 52-63.
15. Тарасов В.Ф., Якушев В.И. Экспериментальные исследования переноса примеси турбулентным вихревым кольцом // ПМТФ.– 1974.– N 1.– С. 131-136.
16. Белоцерковский С.М., Гиневский А. С. Моделирование турбулентных струй и следов на основе метода дискретных вихрей.– М.: Наука, 1995.– 368 с.
17. Довгий С.О., Буланчук Г.Г. Чисельне моделювання динаміки когерентних вихрових структур в плоскому затопленому струмені // Доповіді НАН України.– 1998.– N 12.– С. 59-62.
18. Альбом течений жидкости и газа// Под ред. М. Ван-Дайка.- М.: Мир, 1986.