

К анализу напряженного состояния в эллиптической шейке образца при растяжении

А. А. Остсеми́н

ООО «Южно-Уральский научно-производственный центр», Челябинск, Россия

Образование шейки при растяжении цилиндрического и плоского образцов описывается с учетом изменения теории Бриджмена для изотропного случая. Изложен способ определения траекторий главных напряжений в эллиптической шейке при растяжении путем преобразования исходной сетки координат с помощью конформных отображений. Получены выражения для главных напряжений и радиуса кривизны траектории напряжений. С помощью допущений, отличающихся от теории Бриджмена, получено приближенное решение для распределения напряжений в аналитической форме для образцов с эллиптическим поперечным сечением. Новое решение входит в однопараметрическое семейство решений, включающее решения Бриджмена и Давиденкова–Спиридоновой.

Ключевые слова: напряженное состояние, шейка, линии осевых главных напряжений, конформные отображения, функция Жуковского, цилиндрический и плоский образцы.

Введение. Экспериментальному и теоретическому изучению напряженного и деформированного состояния в шейке посвящены исследования [1–18], краткий обзор которых приведен в работах [4, 8, 17]. Испытания на растяжение широко используются для определения механических свойств применяемых в технике материалов, металлов, сталей. Одна из главных причин распространенности данного вида испытаний обусловлена предполагаемым возникновением в процессе испытания простого однородного одноосного напряженного состояния. При больших деформациях процесс растяжения образцов теряет устойчивость, связанную с образованием шейки. При этом кроме очевидной поправки на изменение наименьшей площади поперечного сечения необходимо ввести поправочный множитель, учитывающий влияние трехосности напряженного состояния на процесс пластического течения. Для анизотропных материалов образцы, имеющие в исходном состоянии форму кругового цилиндра, приобретают в поперечном сечении форму эллипса [12]. Полное ψ_k и равномерное ψ_p относительные сужения являются важными параметрами пластичности. Чтобы судить о закономерностях пластического деформирования материала, необходимо учитывать изменения равномерной и сосредоточенной частей деформации, не ограничиваясь исследованием полных деформаций. Предлагаемый теоретический анализ отличается от теории Бриджмена. Ниже будет показано, что это явилось следствием новых предположений относительно линий осевых главных напряжений (ЛОГН).

Цель работы заключается в определении распределения напряжений в эллиптической шейке плоского и цилиндрического образцов при растяжении на основании конформных отображений.

1. Определение радиуса r кривизны траектории главного напряжения и радиуса R кривизны в шейке образца. В [1] предполагается, что ЛОГН совпадают с направлением волокон. Также экспериментально установлено, что радиус кривизны деформированного волокна, проходящего через точку с абсциссой x , приближенно равен x^{-1} . Другой подход [2] к определению радиуса кривизны ЛОГН в минимальном сечении шейки основан на одновременном использовании уравнений семейства ЛОГН и уравнений ортогонального ему семейства. Уравнение контура шейки можно составить на основании геометрических измерений; характер других ЛОГН считается таким же, как контур шейки (например, если контур шейки – дуга окружности, то ЛОГН можно считать дугами окружностей). Чтобы определить взаимное расположение линий, т.е. уравнение всего семейства ЛОГН, можно задать семейство, ортогональное к линиям ЛОГН. В работах [2, 3] расчеты основаны на предположениях, что ЛОГН – дуги окружностей, ортогональных семейству окружностей, проходящих через фиксированную точку, расположенную вне образца, и пересекающих его ось под прямым углом (рис. 1).

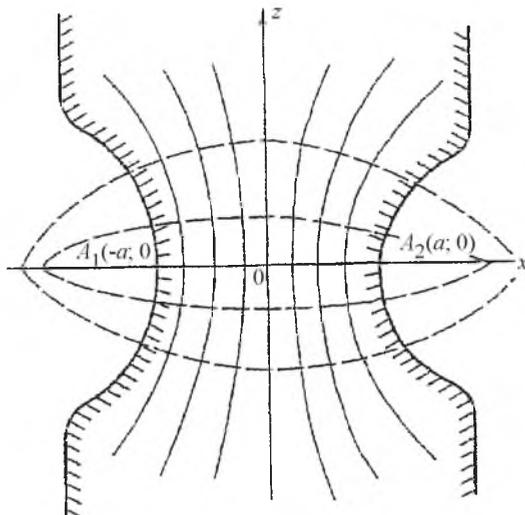


Рис. 1. Модель Бриджмена: сплошные линии – дуги окружностей (ЛОГН); штриховкой обозначено ортогональное им семейство окружностей, проходящих через точки A_1 и A_2 .

Ранее [15] проведен анализ определения радиуса кривизны ЛОГН и вычислены осевые напряжения в шейке. Рассмотрены новые случаи ЛОГН. Предложен также метод [15] определения осевого напряжения на основании зависимостей ЛОГН от формы контура шейки, обобщающий известные результаты Н. Н. Давиденкова, Н. И. Спиридоновой [1] и П. Бриджмена [2].

Развивая описанный в [13] подход, можно использовать конформные отображения для преобразования простой координатной сетки в сетку рассматриваемых продольных и поперечных главных напряжений. Дробно-линейная функция [19] $\omega = \frac{b(z+1)}{z-1}$ (z – комплексная переменная; b – коэффициент) переводит полярную сетку в сетку, показанную на рис. 1. При этом

лучи преобразуются в дуги окружностей, соединяющие точки A_1 и A_2 , а concentric circles – в окружности ЛОГН. На основании теоретического анализа [13] следует известная формула Бриджмена [2]:

$$r = \frac{a_0^2 + 2r_0a - x^2}{2x}. \quad (1)$$

Рассмотрим новые предположения относительно линий главных напряжений. Функция Жуковского [19] $\omega = \frac{b}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, где z – комплексная переменная; b – коэффициент, переводит полярную сетку в сетку, показанную на рис. 2, состоящую из гипербол – ЛОГН и эллипсов – линий поперечных главных напряжений, имеющих общие фокусы в точках $A_1(-a; 0)$ и $A_2(a; 0)$.

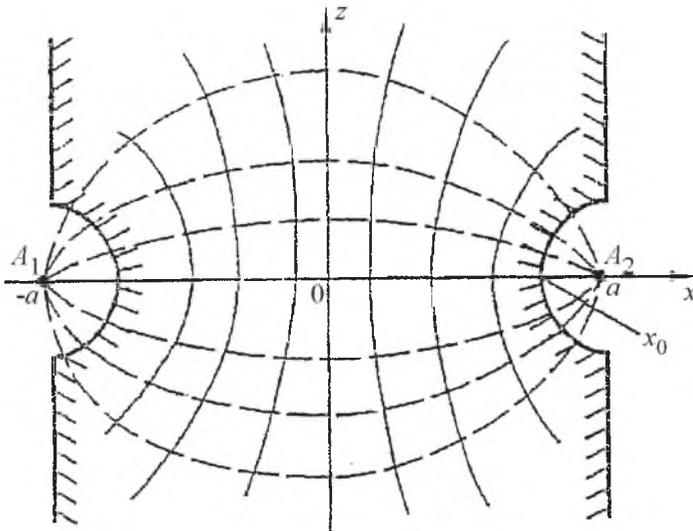


Рис. 2. Модель эллиптически-гиперболической сетки главных напряжений: сплошные линии – гиперболы (ЛОГН); штриховые – ортогональное им семейство эллипсов с фокусами A_1 и A_2 .

При этом лучи преобразуются в гиперболы, а окружности – в эллипсы. В результате проведенного теоретического анализа [13] получим

$$r = \frac{a_0^2 + a_0r_0 - x^2}{x}. \quad (2)$$

Закон изменения кривизны траектории одного из главных напряжений, которая на контуре совпадает с образующей поверхности шейки, в точках наименьшего сечения последней согласно [1] можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r_i}{aR}, \quad (3)$$

согласно [2] –

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r_i}{aR \left\{ 1 + \frac{a}{2R} \left[1 - \left(\frac{r_i}{a} \right)^2 \right] \right\}}. \quad (4)$$

Заметим, что с использованием (2) вывод новой формулы основан на существенно новой теории и иных соображениях:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{r_i}{aR \left\{ 1 + \frac{a}{R} \left[1 - \left(\frac{r_i}{a} \right)^2 \right] \right\}}, \quad (5)$$

где r_i – текущее значение радиуса; a – радиус наименьшего поперечного сечения шейки; R – радиус кривизны контура шейки в наименьшем сечении.

Выражение (4) получено в работе [18] в соответствии с допущением, которое принято в решении Бриджмена [2]: в непосредственной близости к наименьшему сечению контур шейки можно аппроксимировать касательной окружностью с радиусом R , а одну из поверхностей напряжений – сферой. Формула (4) получена из (1), а выражение (5) – из (2). Расхождение в результатах расчета по формулам (3)–(5) увеличивается с уменьшением R , т.е. с увеличением истинной деформации в шейке.

2. Цилиндрический образец. С использованием выражений (5) формулы для определения напряжений в точках наименьшего поперечного сечения шейки на расстоянии x или y от плоскости симметрии можно записать в виде

$$\begin{cases} \sigma_x = F \ln \left[1 + \frac{a}{R} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right]; \\ \sigma_y = F \ln \left[1 + \frac{a}{R} \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) \right]; \\ \sigma_z = F \left\{ 1 + \ln \left[1 + \frac{a}{R} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \right] \right\}, \end{cases} \quad (6)$$

где F – напряжение текучести [2].

Проведем краткий математический анализ. Образец обладает вращательной симметрией относительно продольной оси z . Предположим, что он симметричен в направлении положительных и отрицательных z относительно плоскости, перпендикулярной к оси и проходящей через шейку. Будем пользоваться обычными цилиндрическими координатами r , θ и z . С использованием трех уравнений равновесия напряжений, условия пластичности Губера–Мизеса, граничных условий [2] и выражения (2) получим замкнутое решение:

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} &= F \ln \left(\frac{a^2 + aR - r^2}{aR} \right); \\ \sigma_{zz} &= F \left(1 + \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + aR - r^2}{aR} \right).\end{aligned}\quad (7)$$

Осевая нагрузка P будет

$$P = \int_0^a 2\pi r \sigma_{zz} dr = \pi F (a^2 + aR) \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right)$$

или

$$\sigma_{zz}^{\text{ср}} = \frac{P}{\pi a^2} = F \left(1 + \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right).\quad (8)$$

Поправочный множитель

$$C_1 = \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right)}.\quad (9)$$

Этот множитель, на который нужно умножить среднее растягивающее напряжение, чтобы получить напряжение текучести, называется поправочным множителем. В табл. 1 приведены значения поправочного множителя как функции от a/R , полученные по формуле (9), решениям Бриджмена [2] и Давиденкова–Спиридоновой [1]. Поправочный множитель всегда меньше единицы. При $R \gg a$, r в первом приближении согласно формулам (7) осевые растягивающие напряжения распределяются по параболическому закону, как и в [1, 2]. Из данных табл. 1 видно, что новый поправочный множитель C_1 по формуле (9) дает заниженные значения, близкие к коэффициенту Давиденкова–Спиридоновой, множитель Бриджмена – несколько более высокие. Различие между полученным решением по формуле (9) и решениями [1] и [2] для поправочного множителя C_1 составило до 10 и 12% соответственно.

Т а б л и ц а 1

Значения поправочного множителя C_1

a/R	Поправочные множители		
	C_1	Бриджмена	Давиденкова–Спиридоновой
	$\left(1 + \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{a}{R} \right)^{-1}$	$\left(1 + 2 \frac{R}{a} \right) \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a}{R} \right)^{-1}$	$\left(1 + \frac{1}{4} \frac{a}{R} \right)^{-1}$
0	1,000	1,000	1,000
1/3	0,877	0,927	0,923
1/2	0,822	0,897	0,888
1	0,721	0,823	0,800

3. Плоский образец. Исследование пластины представляет собой задачу, аналогичную рассмотренной в разд. 2. Растяжение в пластине направлено вдоль оси z , ось x перпендикулярна к поверхности пластины, ось y перпендикулярна к x и z . Пластину считаем бесконечно широкой в направлении y , краевыми эффектами пренебрегаем, ни напряжения, ни деформации не являются функциями y , все производные по y в основных уравнениях исчезают. Граничные условия применяем согласно [2]. Решение определяется не только уравнениями равновесия, но и условием пластичности Губера–Мизеса. Получим частное решение, в котором имеет место предположение о форме образца, и распределение напряжений и деформаций определяется только в самой плоскости шейки. При этом используем уравнения равновесия напряжений в полосе, расположенной по обе стороны от плоскости шейки, условие пластичности Губера–Мизеса применим только в самой плоскости шейки. Решение основано на двух следующих допущениях Бриджмена [2]: 1) материал несжимаем; 2) логарифмические деформации ε_x и ε_z постоянны во всех точках сечения, а $\varepsilon_y = 0$. Третье допущение относится к новым предположениям относительно линий главных напряжений, определяемых выражением (2).

С помощью выражения (2) получим формулы для определения напряжений в точках наименьшего сечения шейки на расстоянии x от плоскости симметрии:

$$\begin{cases} \sigma_x = F \ln \left[1 + \frac{h}{R} \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right) \right]; \\ \sigma_y = F \left\{ \frac{1}{2} + \ln \left[1 + \frac{h}{R} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right) \right] \right\}; \\ \sigma_z = F \left\{ 1 + \ln \left[1 + \frac{h}{R} \left(1 - \frac{x^2}{h^2} \right) \right] \right\}. \end{cases} \quad (10)$$

Растягивающую нагрузку P выразим через осевое напряжение σ_z :

$$P = 2B \int_0^h \sigma_z dx, \quad (11)$$

где B – ширина пластины; h – толщина плоского образца в наименьшем сечении шейки.

Подставим выражение σ_z из (10) в (11) и осуществим преобразования, в результате чего получим

$$C_2 = \left[\sqrt{1 + \frac{R}{h}} \ln \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{R}{h}} + 1}{\sqrt{1 + \frac{R}{h}} - 1} \right) - 1 \right]^{-1}. \quad (12)$$

Решение Петросяна [10] получено без третьего допущения в виде трансцендентных уравнений, однако формулы для напряжений требуют громоздких вычислений и малоприспособны для практического применения [18].

Выражение для нового поправочного множителя C_2 сложнее выражения для C_1 в случае цилиндрического образца. Поправочный множитель C_2 зависит только от параметра h/R , так что для его вычисления следует определить радиус R кривизны наружного контура шейки. Значения C_2 приведены в табл. 2, где для сравнения представлены также множители Бриджмена [2], Петросяна [10] и Важенцева–Исаева [18], который равен

$$C_3 = \sqrt{3} \left[2 \left(1 + \frac{h}{6R} \right) \right]^{-1}. \quad (13)$$

Как следует из данных табл. 2, различие между приведенными решениями для множителей достигает 14%. Множитель Бриджмена несколько больше множителя C_2 , который, в свою очередь, больше поправочного коэффициента Важенцева–Исаева [18] при $0,1 < h/R < 0,3$.

Т а б л и ц а 2

Сравнение поправочных множителей

h/R	Поправочные множители			
	C_2	Бриджмена	Важенцева–Исаева C_3	Петросяна
0,1	0,940	0,965	0,851	0,9651
0,2	0,890	0,941	0,839	0,9370
0,3	0,848	0,915	0,824	0,9100
0,5	0,780	0,875	0,799	0,8560
0,7	0,729	0,828	0,775	0,8100
1,0	0,670	0,782	0,742	0,7500

4. Однопараметрическое семейство решений для поправочных коэффициентов, учитывающих трехосное напряженное состояние, вызванное образованием шейки. Ранее [15] получен универсальный метод определения осевого напряжения в минимальном сечении шейки цилиндрического и плоского образцов на основании новых общих зависимостей ЛОГН от формы контура шейки, обобщающий известные результаты Бриджмена, Давиденкова–Спиридоновой, Важенцева–Исаева.

Для пластины, в отличие от цилиндрического образца, поправочный множитель больше единицы. Поэтому при одном значении a/R (h/R) поправку на трехосное напряженное состояние важнее применять для плоского образца, чем для цилиндрического.

Формулу (7) можно преобразовать следующим образом [12]:

$$\frac{\sigma_{\varepsilon}}{\sigma_{\tau}} = 1 + \frac{\delta}{2} \ln \left[\frac{a^2 + \delta a R - r^2}{\delta a R} \right], \quad (14)$$

где $\delta = 1$.

Заметим, что классический результат Бриджмена [2] получен при $\delta = 2$, из формулы (14) найдем решение Давиденкова–Спиридоновой [1] при $\delta = \infty$ [12]. Таким образом, решение (7) входит в однопараметрическое семейство решений с параметром δ , которые получены при разных предположениях относительно радиуса кривизны линий главных напряжений. Все решения (14) для цилиндрического образца совпадают в пределе при малом a/R . Решение ($\delta = 1$), основанное на выражениях (2) и (5), дает меньшую по значению поправку C_1 и больше других отличается от единицы по сравнению с решениями по классическим теориям [1, 2] за счет новых положений относительно линий главных напряжений в виде функции Жуковского.

Параметр δ зависит от принятой геометрии поверхности главных напряжений. Решение вопроса о точном значении δ может стать предметом экспериментальных исследований. Проведенное численное моделирование образования шейки при растяжении приведено в [20]. Данный теоретический анализ относится к случаю малых значений a/R и h/R и, следовательно, ограничивается областью, в которой различие между расчетными поправочными множителями, полученными по разным теориям [1, 2, 13, 15, 18] и результатам численного моделирования, составляет 10%.

Для цилиндрического образца предложенное решение (7) совпадает с решением для образца с эллиптическим поперечным сечением анизотропного стержня, которое получено более сложным путем [12].

Выводы

1. Получены аналитические выражения для нормальных напряжений для цилиндрического и плоского образцов с эллиптическим поперечным сечением.
2. Для оценки напряженного состояния в шейке при растяжении плоского и цилиндрического образцов предложен теоретический анализ, основанный на преобразовании исходной сетки координат с помощью конформных отображений по формуле Жуковского.
3. Проведен сравнительный анализ классических решений Давиденкова–Спиридоновой, Бриджмена и нового приближенного решения.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 05-08-18179а).

Резюме

Утворення шийки при розтязі циліндричного і плоского зразків описується з урахуванням зміни теорії Бріджмена для ізотропного випадку. Викладено спосіб визначення траєкторій головних напружень в еліптичній шийці при розтязі шляхом перетворення початкової сітки координат за допомогою конформних відображень. Отримано вирази для головних напружень та радіуса кривини траєкторії напружень. За допомогою припущень, що відрізняються від теорії Бріджмена, отримано наближений розв'язок для розподілу напружень в аналітичній формі для зразків з еліптичним поперечним перерізом. Новий розв'язок входить до однопараметричної сім'ї розв'язків, яка включає розв'язок Бріджмена і Давиденкова–Спиридонової.

1. Давиденков Н. Н., Спиридонова Н. Н. Анализ напряженного состояния в шейке растянутого образца // Завод. лаб. – 1945. – № 6. – С. 583 – 593.
2. Бриджмен П. Исследование больших пластических деформаций и разрыва. – М.: Изд-во иностр. лит., 1955. – 444 с.
3. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: Изд-во технико-теорет. лит., 1956. – 407 с.
4. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. – М.: Изд-во иностр. лит., 1954. – 647 с.
5. Ишлинский А. Ю. Об устойчивости вязко-пластического течения полосы и круглого прута // Прикл. математика и механика. – 1943. – Вып. 3. – С. 109 – 130.
6. Ишлинский А. Ю. Растяжение бесконечно длинной идеально пластической полосы переменного сечения // Докл. АН УССР. – 1958. – № 1. – С. 12 – 15.
7. Жуков А. М. К вопросу возникновения шейки в образце при растяжении // Инж. сб. – 1945. – Вып. 2. – С. 34 – 51.
8. Ершов Л. В. Об образовании шейки в плоском образце при растяжении // Прикл. механика и теорет. физика. – 1961. – № 1. – С. 135 – 137.
9. Сегал В. М. Пластическое течение при растяжении осесимметричных образцов с шейкой // Там же. – 1969. – № 2. – С. 141 – 144.
10. Петросян Ж. Л. Напряжения в наименьшем сечении шейки растянутого плоского образца // Изв. вузов. Машиностроение. – 1967. – № 7. – С. 54 – 57.
11. Григорьев Е. А., Ивлев Д. Д., Шитова Л. Б. Об образовании шейки при течении анизотропной жесткопластической полосы // Механика твердого тела. – 1989. – № 2. – С. 183 – 185.
12. Айзенберг М. А., Янь С. Е. Обобщение на анизотропные материалы теории Бриджмена образования шейки при растяжении // Теорет. основы инж. расчетов. – 1983. – 105, № 4. – С. 34 – 37.
13. Дильман В. Л., Остсемин А. А. К анализу напряженного состояния в шейке образца при растяжении // Завод. лаб. – 1998. – № 5. – С. 47 – 49.
14. Остсемин А. А. Метод малого параметра в плоских задачах теории идеальной пластичности при растяжении образцов с надрезами // Там же. – 1999. – № 5. – С. 37 – 40.
15. Остсемин А. А. Анализ напряженного состояния в шейке круглого и плоского образцов при растяжении // Пробл. прочности. – 1991. – № 6. – С. 75 – 79.
16. Остсемин А. А. Напряжение в наименьшем сечении круглого и плоского образцов при растяжении // Там же. – 1992. – № 4. – С. 25 – 28.
17. Давиденков Н. Н. О природе шейки при растяжении образцов // Журн. техн. физики. – 1955. – 25, вып. 5. – С. 877 – 880.

18. *Важенцев Ю. Г., Исаев В. В.* К вопросу о напряженном состоянии в шейке круглого и плоского образца при растяжении // Пробл. прочности. – 1988. – № 4. – С. 66 – 69.
19. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
20. *Norris D., Moran B., Scudder J., and Quinones D.* A computer simulation of the tension test // J. Mech. Phys. Solids. – 1978. – **26**. – P. 1 – 19.

Поступила 30. 01. 2008