УДК 539.3

Анализ нелинейных изгибно-изгибно-крутильных колебаний вращающихся закрученных стержней с учетом депланации поперечного сечения

К. В. Аврамов[а], О. С. Галас[б], О. К. Морачковский[б], К. Пьер[в]

[а] Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины, Харьков, Украина

[б] Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

[в] Университет Мак-Гила, Монреаль, Канада

Исследуются нелинейные изгибно-изгибно-крутильные колебания закрученных стержней, описываемые системой трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных. В уравнениях учитывается депланация поперечного сечения стержня и предполагается, что центр тяжести и жесткости находятся в разных точках. Для дискретизации системы колебания представляются в виде ряда по собственным формам линейной задачи. Свободные колебания исследуются с помощью нелинейных нормальных форм Шоу–Пьера.

Ключевые слова: изгибно-изгибно-крутильные колебания, метод нелинейных нормальных форм, скелетные кривые.

Введение. Вращающиеся стержни являются элементами лопастей вертолетов, манипуляторов, рабочих лопаток паровых и газовых турбин, лопастей воздушных винтов. В эксплуатации такие стержневые конструкции часто совершают колебания, которые могут обусловить усталостные повреждения. Исследование колебаний этих систем осложняется тем, что они имеют несимметричные поперечные сечения. В этом случае центр тяжести и центр изгиба поперечного сечения не совпадают.

Предпринимались попытки исследования нелинейных колебаний стержней с несимметричным поперечным сечением. С. П. Тимошенко [1] получил уравнения линейных изгибно-крутильных колебаний прямых незакрученных стержней с несимметричным поперечным сечением. В работах [2, 3] были получены уравнения линейных изгибно-изгибно-крутильно-продольных колебаний закрученных вращающихся стержней с учетом депланации поперечного сечения при сдвиге и кручении. В [4] представлена система уравнений в частных производных, описывающая геометрически нелинейные изгибно-изгибно-крутильно-продольные колебания вращающегося стержня. В этих уравнениях учитывалось, что центр тяжести поперечного сечения и центр жесткости находятся в одной точке. В [5, 6] получены уравнения, описывающие изгибно-изгибно-крутильные колебания стержня с учетом нерастяжимости срединной линии. При этом предполагалось, что центр тяжести поперечного сечения и центр жесткости находятся в одной точке. Систематическое изложение теории гибких стержней содержится в монографии [7].

В данной работе представлена система трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая изгибно-

изгибно-крутильные колебания гибкого вращающегося стержня с учетом депланации поперечного сечения. При выводе уравнений предполагалось, что центр тяжести поперечного сечения и центр жесткости находятся в разных точках. Получена дискретная нелинейная динамическая система, аппроксимирующая указанные колебания. Движения системы исследуются с помощью метода нелинейных нормальных форм колебаний. Анализируется влияние депланации на колебания.

Уравнения колебаний. Рассмотрим стержень, вращающийся с постоянной угловой скоростью Ω (рис. 1). Для описания движения стержня используем неподвижную систему координат xyz. Упругие перемещения вдоль осей x, y, z обозначим через $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ соответственно. Для объяснения уравнений колебаний предположим, что выполняется гипотеза плоских сечений. Однако в дальнейшем будет учитываться депланация поперечных сечений стержня. С плоским сечением стержня свяжем новую систему координат с ортами ξ, η, ζ. Орты η и ζ лежат на главных центральных осях. Ориентацию системы координат $\xi\eta\zeta$ относительно осей xyz опишем тремя последовательными поворотами на углы θ_x, θ_y, θ_z. Угол θ_x описывает крутильные колебания стержня. Этот поворот происходит вокруг центра изгиба поперечного сечения. В сечении стержня вводится система координат $(\eta_1 O_1 \zeta_1)$, которая связана с центром изгиба (рис. 1). Центр тяжести поперечного сечения O в системе $(\eta_1 O_1 \zeta_1)$ определяется координатами $O(\eta^{(1)}, \zeta^{(1)})$.

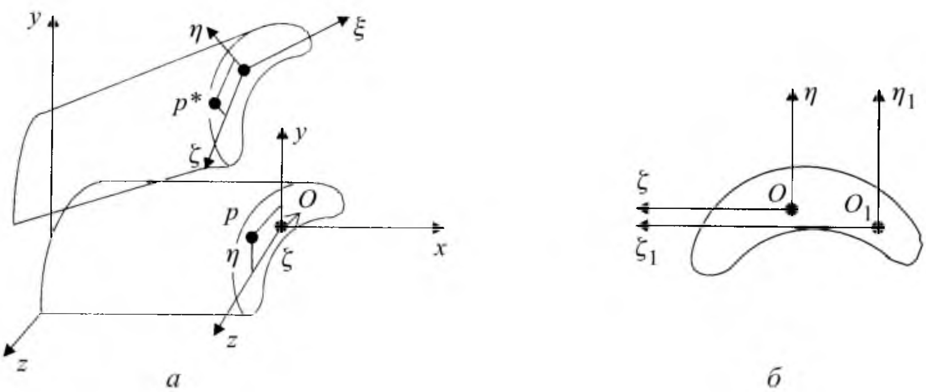

Рис. 1. Закрученный стержень.

Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения в частных производных, описывающие изгибно-изгибно-крутильные колебания с учетом депланации поперечного сечения гибких стержней, получены в работах [8, 9]:

$$E\frac{J_\zeta - J_\eta}{2}(w''\sin 2\alpha)'' + EJ_\zeta(v''\cos^2\alpha)'' + EJ_\eta(v''\sin^2\alpha)'' + m\ddot{v} - m\ddot{\theta}_x e\sin\alpha +$$

$$+ m(2\Omega\dot{v} + \Omega^2 x)v' + m\Omega(e\theta_x\sin\alpha - v)''\left(2\int_x^L \dot{v}dx + \Omega\frac{L^2 - x^2}{2}\right) -$$

$$-em\Omega(\theta_x\sin\alpha)'(4\dot{v}+\Omega x)+em\Omega\theta_x\sin\alpha(\Omega-2\dot{v}')-m\Omega^2 v+$$

$$+\frac{4\Omega^2 m^2}{EA}\int_0^x dx_1\int_{x_1}^L \dot{v}d\tilde{x}-2m\Omega\int_0^x(v'\dot{v}'+w'\dot{w}')dx-$$

$$-2m\Omega e\int_0^x\frac{\partial}{\partial t}(\theta_x v''\sin\alpha-\theta_x w''\cos\alpha)dx+E(J_\zeta-J_\eta)(\theta_x w''\cos 2\alpha)''-$$

$$-E(J_\zeta-J_\eta)(\theta_x v''\sin 2\alpha)''+EC_1^*(\theta_x\theta_x''\cos\alpha)''=0; \tag{1а}$$

$$EJ_\zeta(w''\sin^2\alpha)''+EJ_\eta(w''\cos^2\alpha)''+E\frac{J_\zeta-J_\eta}{2}(v''\sin 2\alpha)''+m\ddot{w}+$$

$$+m\ddot{\theta}_x e\cos\alpha+\Omega m(2\dot{v}+\Omega x)w'-m\Omega(w+e\theta_x\cos\alpha)''\left(2\int_x^L\dot{v}dx+\Omega\frac{L^2-x^2}{2}\right)+$$

$$+em\Omega(\theta_x\cos\alpha)(4\dot{v}+\Omega x)+2\Omega em\theta_x\dot{v}'\cos\alpha+E(J_\zeta-J_\eta)(\theta_x v''\cos 2\alpha)''+$$

$$+E(J_\zeta-J_\eta)(\theta_x w''\sin 2\alpha)''-EC_1^*(\theta_x''\cos\alpha)''=0; \tag{1б}$$

$$-(D_\xi^{(1)}\theta_x')'-em\ddot{v}\sin\alpha+em\ddot{w}\cos\alpha+\ddot{\theta}_x[me^2+\rho(J_\zeta+J_\eta)]+$$

$$+m\Omega e(v''\sin\alpha-w''\cos\alpha)\left(2\int_x^L\dot{v}dx+\Omega\frac{L^2-x^2}{2}\right)+\Omega^2 xme(w'\cos\alpha-v'\sin\alpha)+$$

$$+\Omega^2\left[vem\sin\alpha+\rho\frac{J_\zeta-J_\eta}{2}\sin 2\alpha\right]+E\frac{J_\zeta-J_\eta}{2}\sin(2\alpha)(w''^2-v''^2)+$$

$$+E(J_\zeta-J_\eta)\cos(2\alpha)v''w''+EC_1^*\theta_x''v''\cos\alpha-$$

$$-EC_1^*[\cos\alpha(w''-\theta_x v''-e\theta_x'^2\sin\alpha)]''+EC_1\theta_x''''=0; \tag{1в}$$

$$\Delta\varphi=0,\qquad \partial\varphi/\partial n|_s=\eta n_\zeta-\zeta n_\eta,\qquad C_1^*=\iint_A\zeta\varphi d\eta d\zeta,\qquad C_1=\iint_A\varphi^2 d\eta d\zeta,$$

где m – масса единицы длины стержня; $S=S(\zeta,\eta)$ – уравнение контура поперечного сечения стержня с нормалью $n(n_\zeta,n_\eta)$; L – длина стержня; e – расстояние между центрами тяжести и жесткости поперечного сечения; $\varphi(\zeta,\eta)$ – функция депланации; $\alpha(x)$ – угол закрутки стержня. Для получения системы (1) определялась кинетическая и потенциальная энергия стержня и использовался вариационный принцип Остроградского–Гамильтона. В результате применения последнего получена система трех нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

В систему уравнений (1) входит уравнение для функции кручения, или депланации поперечного сечения, которую можно предварительно вычислить. Например, для поперечного сечения (рис. 2), где центры жесткости и тяжести обозначаются через S.C. и C.G. соответственно, функцию кручения представим так:

$$\varphi(\eta, \zeta) = B_{10}\eta + B_{12}\eta\zeta^2 + B_{30}\eta^3, \tag{2}$$

где B_{kn} – коэффициенты, подлежащие определению с помощью метода минимизации функционала [10]:

$$I = \int\int \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + \zeta - \zeta_s \right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - \eta + \eta_s \right)^2 \right] d\eta d\zeta, \tag{3}$$

где ζ_s, η_s – координаты центра изгиба.

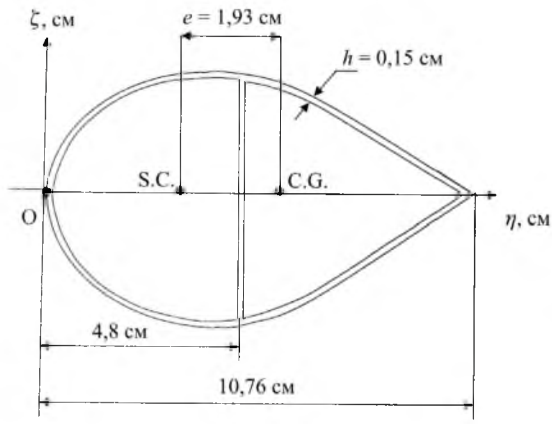

Рис. 2. Поперечное сечение стержня.

После подстановки (2) в (3) из уравнений $\dfrac{\partial I}{\partial B_{kn}} = 0$ получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов B_{kn}. Для профиля (рис. 2) коэффициенты B_{kn} принимают следующие значения: $B_{10} =$ $= 4{,}712 \cdot 10^{-5}$ м; $B_{12} = -0{,}767$ м$^{-1}$; $B_{30} = 2{,}817 \cdot 10^{-3}$ м$^{-1}$.

Дискретная модель колебаний. Исследуем колебания закрученного стержня на примере лопасти вертолета. Параметры этой лопасти приведены в [9]. Ее поперечное сечение показано на рис. 2. В [9] представлен анализ линейных свободных колебаний лопасти. При дискретизации системы (1) использовались 16 собственных форм линейных колебаний, которые отвечают первым 16 собственным частотам. Поскольку центры тяжести и жесткости лежат на оси симметрии поперечного сечения, то линейные изгибные колебания $v(x, t)$ не связаны с колебаниями $w(x, t)$ и $\theta_x(x, t)$, а функции $w(x, t)$, $\theta_x(x, t)$ связаны между собой. Собственные формы линейных изгибно-изгибно-крутильных колебаний представим так:

$$w(x, t) = \sum_{\nu=1}^{7} q_\nu(t) w_\nu(x); \qquad \theta_x(x, t) = \sum_{\nu=1}^{7} q_{\nu+7}(t)\theta_\nu(x);$$
$$v(x, t) = \sum_{\nu=1}^{2} q_{\nu+14}(t) v_\nu(x). \tag{4}$$

Разложив систему (1) в виде функции (2), применим к ней метод Бубнова–Галеркина. В результате получим дискретную нелинейную динамическую систему с 16 степенями свободы:

$$\sum_{\mu=1}^{16} M_{\nu\mu}\ddot{q}_\mu + \sum_{\mu=1}^{16}(K_{\nu\mu} + \Omega^2 R_\mu^{(\nu)})q_\mu + \sum_{\mu=1}^{7}\sum_{j=1}^{16} A_{\mu+7,l}^{(\nu)} q_{\mu+7} q_l +$$
$$+\Omega \sum_{\mu=1}^{2}\sum_{j=1}^{14} D_{\mu+14,j}^{(\nu)} q_j \dot{q}_{\mu+14} - \sum_{\mu=1}^{7} A_{\mu+7}^{(\nu)} q_{\mu+7} = 0, \qquad \nu = 1, 7; \tag{5}$$

$$\sum_{r_1=1}^{16} M_{l,r_1}\ddot{q}_{r_1} + \sum_{r_1=1}^{16}(K_{l,r_1} + \Omega^2 R_{r_1}^{(l)})q_{r_1} + \Omega^2 C_l + \Omega \sum_{r_1=1}^{16}\sum_{r_2=1}^{16} D_{r_1 r_2}^{(l)} \dot{q}_{r_1} q_{r_2} +$$
$$+\sum_{r_1=1}^{16}\sum_{r_2=1}^{16} A_{r_1 r_2}^{(l)} q_{r_1} q_{r_2} + \sum_{r_1=1}^{7}\sum_{r_2=1}^{2} N_{r_1+7,r_2+14}^{(l)} q_{r_1+7} q_{r_2+14} +$$
$$+\sum_{r_1=1}^{7}\sum_{r_2=1}^{7} N_{r_1+7,r_2+7}^{(l)} q_{r_1+7} q_{r_2+7} + \sum_{r_1=1}^{16} P_{r_1}^{(l)} q_{r_1} = 0, \qquad l = 8, 14; \tag{6}$$

$$\sum_{\nu=1}^{16}(M_{j\nu} + \Omega^2 \widetilde{M}_{j\nu})\ddot{q}_\nu + \sum_{\nu=1}^{16}(C_{j\nu} + \Omega^2 R_\nu^{(j)})q_\nu +$$
$$+\Omega \sum_{\nu=1}^{16}\sum_{\mu=1}^{16} D_{\nu\mu}^{(j)} \dot{q}_\nu q_\mu + \sum_{\nu=1}^{7}\sum_{\mu=1}^{7} A_{\nu+7,\mu}^{(j)} q_{\nu+7} q_\mu +$$
$$+\sum_{\nu=1}^{7}\sum_{\mu=1}^{2} A_{\nu+7,\mu+14}^{(j)} q_{\nu+7} q_{\mu+14} + \sum_{\nu=1}^{7}\sum_{\mu=1}^{7} A_{\nu+7,\mu+7}^{(j)} q_{\nu+7} q_{\mu+7} = 0, \quad j = 15, 16. \tag{7}$$

Коэффициенты системы уравнений (5)–(7) не приводятся с целью краткости изложения. Данную систему представим в матричном виде:

$$(M)\ddot{q}+(K)q+\Omega F(q,\dot{q})+\Phi(q)+F_0+(V)q+W(q)=0, \qquad (8)$$

где

$$(M)=\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}; \qquad M=\begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & \dots & M_{1,16} \\ \dots & \dots & & \dots \\ M_{14,1} & M_{14,2} & \dots & M_{14,16} \end{bmatrix};$$

$$M_2=\begin{bmatrix} M'_{15,1} & M'_{15,2} & \dots & M'_{15,16} \\ \dots & \dots & & \dots \\ M'_{16,1} & M'_{16,2} & \dots & M'_{16,16} \end{bmatrix};$$

$$M'_{j\nu}=M_{j\nu}+\Omega^2\widetilde{M}_{j\nu}, \qquad j=15,16, \qquad \nu=\overline{1,16};$$

$$q=\begin{bmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_{16} \end{bmatrix}; \qquad F_0=\begin{bmatrix} f_1^{(0)} \\ \dots \\ f_{16}^{(0)} \end{bmatrix}; \qquad (K)=\begin{bmatrix} K'_{11} & \dots & K'_{1,16} \\ \dots & \dots & \dots \\ K'_{16,1} & \dots & K'_{16,16} \end{bmatrix};$$

$$K'_{\nu\mu}=K_{\nu\mu}+\Omega^2 R_\mu^{(\nu)}, \qquad \nu=\overline{1,16}, \qquad \mu=\overline{1,16};$$

$$\Omega F(q,\dot{q})+\Phi(q)=\Omega\begin{bmatrix} f_1 \\ \dots \\ f_{16} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \dots \\ \varphi_{16} \end{bmatrix};$$

$$f_\nu=\sum_{\mu=1}^{2}\sum_{j=1}^{14} D_{14+\mu,j}^{(\nu)} q_j \dot{q}_{14+\mu}, \qquad \nu=\overline{1,7}; \qquad f_l=\sum_{\nu=1}^{16}\sum_{\mu=1}^{16} D_{\nu\mu}^{(l)} \dot{q}_\nu q_\mu, \qquad l=\overline{8,16};$$

$$\varphi_\nu=\sum_{\mu=1}^{7}\sum_{j=1}^{2} A_{\mu+7,14+j}^{(\nu)} q_{\mu+7} q_{14+j}+\sum_{\mu=1}^{7}\sum_{j=1}^{7} A_{\mu+7,j}^{(\nu)} q_{\mu+7} q_j, \qquad \nu=\overline{1,7};\ 15,16;$$

$$\varphi_l=\sum_{r_1=1}^{7}\sum_{r_2=1}^{7} A_{r_1 r_2}^{(l)} q_{r_1} q_{r_2}+\sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{2} A_{14+r_1,14+r_2}^{(l)} q_{14+r_1} q_{14+r_2}+$$

$$+\sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{7} A_{14+r_1,r_2}^{(l)} q_{14+r_1} q_{r_2}, \qquad l=\overline{8,14};$$

$$V_{ij} = 0, \quad j = \overline{1,16}, \quad i = \overline{1,16}; \quad V_{i1} = A_{i1}, \quad i = \overline{1,7};$$

$$V_{j1} = P_j^{(1)}, \quad j = \overline{8,14}; \quad V_{k1} = 0, \quad k = 15,16;$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_{16} \end{bmatrix}; \quad w_\nu = 0, \quad \nu = \overline{1,7};$$

$$w_l = \sum_{r_1=1}^{7} \sum_{r_2=1}^{2} N_{r_1+7,r_2+14}^{(l)} q_{r_1+7} q_{r_2+14} + \sum_{r_1=1}^{7} \sum_{r_2=1}^{7} N_{r_1+7,r_2+7}^{(l)} q_{r_1+7} q_{r_2+7}, \qquad l = \overline{8,14};$$

$$w_j = \sum_{\nu=1}^{7} \sum_{\mu=1}^{7} A_{\nu+7,\mu+7}^{(j)} q_{\nu+7} q_{\mu+7}, \qquad j = \overline{15,16}.$$

Некоторые параметры системы уравнений (8) не приводятся с целью краткости изложения.

Из-за вращения стержень подвергается действию центробежных сил. Поэтому в закрученном стержне имеют место статические деформации, которые описываются вектором F_0 системы (8). Статические перемещения стержня представим так: $w = q_1^{(0)} w_1(x)$; $v = q_{15}^{(0)} v_1(x)$; $\theta_x = q_8^{(0)} \theta_1(x)$. Подставим эти выражения в уравнения (8) и получим систему трех нелинейных алгебраических уравнений относительно $q_1^{(0)}$, $q_8^{(0)}$, $q_{15}^{(0)}$:

$$\begin{cases} K_{1,1} q_1^{(0)} + K_{1,15} q_{15}^{(0)} + \Omega^2 R_1^{(1)} q_1^{(0)} + \Omega^2 R_8^{(1)} q_8^{(0)} + A_{8,15}^{(1)} q_8^{(0)} q_{15}^{(0)} + \\ + A_{8,1}^{(1)} q_8^{(0)} q_1^{(0)} - A_8^{(1)} q_8^{(0)} = 0; \\ K_{8,8} q_8^{(0)} + \Omega^2 R_1^{(8)} q_1^{(0)} + \Omega^2 R_{15}^{(8)} q_{15}^{(0)} + \Omega^2 C_8 + \\ + A_{11}^{(8)} q_1^{(0)2} + A_{15,15}^{(8)} q_{15}^{(0)2} + A_{15,1}^{(8)} q_{15}^{(0)} q_1^{(0)} + N_{8,15}^{(8)} q_8^{(0)} q_{15}^{(0)} + \\ + N_{8,8}^{(8)} q_8^{(0)2} + P_1^{(8)} q_1^{(0)} + P_8^{(8)} q_8^{(0)} = 0; \\ K_{15,1} q_1^{(0)} + K_{15,15} q_{15}^{(0)} + \Omega^2 R_8^{(15)} q_8^{(0)} + \Omega^2 R_{15}^{(15)} q_{15}^{(0)} + \\ + A_{8,1}^{(15)} q_8^{(0)} q_1^{(0)} + A_{8,15}^{(15)} q_8^{(0)} q_{15}^{(0)} + A_{8,8}^{(15)} q_8^{(0)2} = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Рассмотрим нелинейные колебания стержня относительно положения статического равновесия ($q_1^{(0)}$, $q_8^{(0)}$, $q_{15}^{(0)}$). Для этого введем замену переменных:

$$q_i = \theta_i + q_i^{(0)}, \quad i = \overline{1,16}; \quad q_1^{(0)} \neq 0; \quad q_8^{(0)} \neq 0; \quad q_{15}^{(0)} \neq 0;$$
$$q_\nu^{(0)} = 0 \quad (\nu = \overline{2,\ 7;\ 9,14;\ 16}). \tag{10}$$

В новых переменных систему (8) запишем следующим образом:

$$(M)\ddot{\theta} + (K)\theta + \Omega F(\theta, \dot{\theta}) + \Phi(\theta) + (V)\theta + W(\theta) = 0. \tag{11}$$

В системе (11) два последних слагаемых описывают депланацию поперечного сечения стержня. Преобразуем систему уравнений (9):

$$(M)\ddot{\theta} + (K_1)\theta + \Omega F(\theta, \dot{\theta}) + \Phi_1(\theta) = 0, \tag{12}$$

где $K_1 = K + V$; $\Phi_1 = \Phi + W$.

Нелинейные нормальные формы колебаний. Для исследования динамики системы (12) воспользуемся нелинейными нормальными формами Шоу–Пьера [11]. Введем модальные координаты: $h = (\Lambda)^{-1}\theta$, $h = (h_1, \ldots, h_{16})$, где Λ – матрица форм линейных колебаний. Справедливо следующее соотношение:

$$(M)^{-1}(K_1) = (\Lambda)(P)(\Lambda)^{-1}; \qquad (\Lambda) = (\lambda_{ij})_{j=\overline{1,16}}^{i=\overline{1,16}}; \qquad (P) = \mathrm{diag}(p_1^2, \ldots, p_{16}^2).$$

После преобразований система (12) примет такой вид:

$$\ddot{h}_i + p_i^2 h_i + \Omega Q_i(h, \dot{h}) + \Pi_i(h) = 0, \qquad i = \overline{1, 16}, \tag{13}$$

где

$$Q_\mu(h, \dot{h}) = \sum_{r=1}^{16} \sum_{p=1}^{16} \widetilde{\Gamma}_{rp}^{(\mu)} h_r \dot{h}_p; \qquad \Pi_\mu(h) = \sum_{r=1}^{16} \sum_{p=1}^{16} \widetilde{H}_{rp}^{(\mu)} h_r h_p, \qquad \mu = \overline{1, 16};$$

$$\widetilde{H}_{rp}^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_{\mu\nu} H_{rp}^{(\nu)}; \qquad \widetilde{\Gamma}_{rp}^{(\mu)} = \sum_{\nu=1}^{16} \Gamma_{\mu\nu} B_{rp}^{(\nu)}, \qquad (\mu, r, p) = \overline{1, 16};$$

$$(\Gamma) = (\Lambda)^{-1}(M)^{-1}; \qquad (\Gamma) = (\Gamma_{ij})_{j=\overline{1,16}}^{i=\overline{1,16}};$$

$$B_{rp}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{2} \sum_{j=1}^{14} D_{14+\mu, j}^{(\nu)} \lambda_{jr} \lambda_{14+\mu, p}, \qquad \nu = \overline{1, 7}, \; r = \overline{1, 16}, \; p = \overline{1, 16};$$

$$B_{rp}^{(l)} = \sum_{\nu=1}^{16} \sum_{\mu=1}^{16} D_{\nu\mu}^{(1)} \lambda_{\nu r} \lambda_{\mu p}, \qquad l = \overline{8, 16}, \; r = \overline{1, 16}, \; p = \overline{1, 16};$$

$$H_{rp}^{(\nu)} = \sum_{\mu=1}^{7} \sum_{j=1}^{2} A_{\mu+7, 14+j}^{(\nu)} \lambda_{\mu+7, r} \lambda_{14+j, p} + \sum_{\mu=1}^{7} \sum_{j=1}^{7} A_{\mu+7, j}^{(\nu)} \lambda_{\mu+7, r} \lambda_{jp},$$

$$r = \overline{1, 16}, \; p = \overline{1, 16}, \; \nu = \overline{1, 7};$$

$$H_{rp}^{(l)}=\sum_{r_1=1}^{7}\sum_{r_2=1}^{7}A_{r_1 r_2}^{(l)}\lambda_{r_1 r}\lambda_{r_2 p}+\sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{2}A_{14+r_1,14+r_2}^{(l)}\lambda_{14+r_1,r}\lambda_{14+r_2,p}+$$

$$+\sum_{r_1=1}^{2}\sum_{r_2=1}^{7}A_{14+r_1,r_2}^{(l)}\lambda_{14+r_1,r}\lambda_{r_2,p}+\sum_{r_1=1}^{7}\sum_{r_2=1}^{2}N_{7+r_1,14+r_2}^{(l)}\lambda_{7+r_1,r}\lambda_{14+r_2,p}+$$

$$+\sum_{r_1=1}^{7}\sum_{r_2=1}^{7}N_{7+r_1,7+r_2}^{(l)}\lambda_{7+r_1,r}\lambda_{7+r_2,p},\qquad l=\overline{8,14};$$

$$H_{rp}^{(m)}=\sum_{\mu=1}^{7}\sum_{j=1}^{2}A_{\mu+7,14+j}^{(m)}\lambda_{\mu+7,r}\lambda_{14+j,p}+\sum_{\mu=1}^{7}\sum_{j=1}^{7}A_{\mu+7,j}^{(m)}\lambda_{\mu+7,r}\lambda_{jp}+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{7}\sum_{\mu=1}^{7}A_{\nu+7,\mu+7}^{(m)}\lambda_{\nu+7,r}\lambda_{\mu+7,p},\qquad m=\overline{15,16},\ r=\overline{1,16},\ p=\overline{1,16}.$$

Нелинейные нормальные формы колебаний представим так:

$$\begin{aligned}&h_i=\Phi_i(h_k,g_k)=a_{3,i}^{(k)}h_k^2+a_{4,i}^{(k)}h_k g_k+a_{5,i}^{(k)}g_k^2+a_{6,i}^{(k)}h_k^3+\\&+a_{7,i}^{(k)}h_k^2 g_k+a_{8,i}^{(k)}h_k g_k^2+a_{9,i}^{(k)}g_k^3+\ldots;\\&g_i=S_i(h_k,g_k)=b_{3,i}^{(k)}h_k^2+b_{4,i}^{(k)}h_k g_k+b_{5,i}^{(k)}g_k^2+b_{6,i}^{(k)}h_k^3+b_{7,i}^{(k)}h_k^2 g_k+\\&+b_{8,i}^{(k)}h_k g_k^2+b_{9,i}^{(k)}g_k^3+\ \ldots,\qquad i=\overline{1,16},\ i\neq k.\end{aligned}\tag{14}$$

Нелинейные нормальные формы колебаний описываются системой уравнений в частных производных [11]:

$$\begin{aligned}&s_i=\frac{\partial\Phi_i}{\partial h_k}g_k+\frac{\partial\Phi_i}{\partial g_k}[-p_k^2 h_k-\Omega Q_k(h,g)-\Pi_k(h)];\\&p_i^2\Phi_i(h_k,g_k)+\Omega Q_i(h,g)+\Pi_i(h)=\\&=-\frac{\partial S_i}{\partial h_k}g_k+\frac{\partial S_i}{\partial g_k}[p_k^2 h_k+\Omega Q_k(h,g)+\Pi_k(h)].\end{aligned}\tag{15}$$

Для решения системы (15) подставим в нее разложения (14). Приравняв слагаемые при одинаковых степенях, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов рядов (14). С целью краткости изложения данная система не приводится, а ее решение запишем так:

$$\left\{\begin{array}{l}
a_{3,i}^{(k)}=\dfrac{(p_i^2-2p_k^2)\widetilde{H}_{kk}^{(i)}}{p_i^2(4p_k^2-p_i^2)};\quad a_{4,i}^{(k)}=\dfrac{\Omega\widetilde{\Gamma}_{kk}^{(i)}}{4p_k^2-p_i^2};\quad a_{5,i}^{(k)}=-\dfrac{2\widetilde{H}_{kk}^{(i)}}{p_i^2(4p_k^2-p_i^2)};\\
b_{3,i}^{(k)}=-\dfrac{p_k^2\Omega\widetilde{\Gamma}_{kk}^{(i)}}{4p_k^2-p_i^2};\quad b_{4,i}^{(k)}=\dfrac{2\widetilde{H}_{kk}^{(i)}}{4p_k^2-p_i^2};\quad b_{5,i}^{(k)}=a_{4,i}^{(k)};\\
a_{6,i}^{(k)}=\dfrac{\Delta_{ik}^{(1)}(p_i^2-7p_k^2)+p_k^2(p_i^2-3p_k^2)\Delta_{ik}^{(6)}-2p_k^4\Delta_{ik}^{(3)}}{(p_i^2-9p_k^2)(p_i^2-p_k^2)};\\
a_{7,i}^{(k)}=\dfrac{(3p_k^2-p_i^2)[\Delta_{ik}^{(3)}-3\Delta_{ik}^{(5)}]+6p_k^4\Delta_{ik}^{(4)}-2p_k^2p_i^2\Delta_{ik}^{(7)}}{(p_k^2-p_i^2)(p_i^2-9p_k^2)};\\
a_{8,i}^{(k)}=-\dfrac{2p_i^2\Delta_{ik}^{(6)}+6\Delta_{ik}^{(1)}+\Delta_{ik}^{(3)}(3p_k^2-p_i^2)}{(p_i^2-p_k^2)(p_i^2-9p_k^2)};\\
a_{9,i}^{(k)}=\dfrac{2\Delta_{ik}^{(2)}-6\Delta_{ik}^{(5)}+(p_i^2-3p_k^2)\Delta_{ik}^{(7)}+\Delta_{ik}^{(4)}(7p_k^2-p_i^2)}{(p_k^2-p_i^2)(p_i^2-9p_k^2)};\\
b_{6,i}^{(k)}=\dfrac{\Delta_{ik}^{(5)}(7p_k^2p_i^2-p_i^4)-\Delta_{ik}^{(2)}p_k^2(3p_k^2-p_i^2)-6p_k^6\Delta_{ik}^{(4)}+2p_k^4p_i^2\Delta_{ik}^{(7)}}{(p_k^2-p_i^2)(p_i^2-9p_k^2)};\\
b_{7,i}^{(k)}=\dfrac{(p_i^2-3p_k^2)[p_i^2\Delta_{ik}^{(6)}+3\Delta_{ik}^{(1)}]-2p_k^2p_i^2\Delta_{ik}^{(3)}}{(p_i^2-p_k^2)(p_i^2-9p_k^2)};\\
b_{8,i}^{(k)}=\dfrac{\Delta_{ik}^{(4)}(3p_k^2p_i^2-9p_k^4)-p_i^2[2\Delta_{ik}^{(2)}-6\Delta_{ik}^{(5)}]-p_i^2(p_i^2-3p_k^2)\Delta_{ik}^{(7)}}{(p_k^2-p_i^2)(p_i^2-9p_k^2)};\\
b_{9,i}^{(k)}=-\dfrac{2p_i^2\Delta_{ik}^{(6)}+6\Delta_{ik}^{(1)}+\Delta_{ik}^{(3)}(3p_k^2-p_i^2)}{(p_i^2-p_k^2)(p_i^2-9p_k^2)}.
\end{array}\right. \tag{16}$$

Параметры $\Delta_{ik}^{(1)},\ldots,\Delta_{ik}^{(7)}$ не приводятся с целью краткости изложения.

Итак, нелинейные нормальные формы колебаний получены. Теперь исследуем движение, соответствующее этой форме. Рассмотрим k-е уравнение системы (13). После некоторых преобразований представим его так:

$$\ddot{h}_k+p_k^2h_k+\widetilde{H}_{kk}^{(k)}h_k^2+\Omega\widetilde{\Gamma}_{kk}^{(k)}h_k\dot{h}_k+P_{3,0}h_k^3+P_{0,3}\dot{h}_k^3+$$

$$+P_{1,2}h_k\dot{h}_k^2+P_{2,1}\dot{h}_kh_k^2=0, \tag{17}$$

где

$$P_{3,0}=\Omega\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{16}\widetilde{\Gamma}_{kp}^{(k)}b_{3,p}^{(k)}+\sum_{\substack{p=1\\p\neq k}}^{16}a_{3,p}^{(k)}[\widetilde{H}_{p,k}^{(k)}+\widetilde{H}_{kp}^{(k)}];\qquad P_{0,3}=\Omega\sum_{\substack{r=1\\r\neq k}}^{16}\widetilde{\Gamma}_{rk}^{(k)}a_{5,r}^{(k)};$$

$$P_{1,2} = \Omega \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{16} \tilde{\Gamma}_{rk}^{(k)} a_{4,r}^{(k)} + \Omega \sum_{\substack{p=1\\ p\neq k}}^{16} \tilde{\Gamma}_{kp}^{(k)} b_{5,p}^{(k)} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq k}}^{16} a_{5,p}^{(k)} [\tilde{H}_{pk}^{(k)} + \tilde{H}_{kp}^{(k)}];$$

$$P_{2,1} = \Omega \sum_{\substack{r=1\\ r\neq k}}^{16} \tilde{\Gamma}_{rk}^{(k)} a_{3,r}^{(k)} + \Omega \sum_{\substack{p=1\\ p\neq k}}^{16} \tilde{\Gamma}_{kp}^{(k)} b_{4,p}^{(k)} + \sum_{\substack{p=1\\ p\neq k}}^{16} a_{4,p}^{(k)} [\tilde{H}_{pk}^{(k)} + \tilde{H}_{kp}^{(k)}].$$

Из-за малости нелинейных слагаемых в системе (17) ее можно записать так:

$$\ddot{h}_k + p_k^2 h_k + \varepsilon[\tilde{H}_{kk}^{(k)} h_k^2 + \Omega \tilde{\Gamma}_{kk}^{(k)} h_k \dot{h}_k + P_{3,0} h_k^3 + P_{0,3} \ddot{h}_k^3 +$$

$$+ P_{1,2} h_k \dot{h}_k^2 + P_{2,1} \dot{h}_k h_k^2] = 0, \qquad \varepsilon << 1. \tag{18}$$

Решаем уравнение (18) с помощью метода многих масштабов [12]:

$$h_k = h_{k,0}(T_0, T_1, \ldots) + \varepsilon h_{k,1}(T_0, T_1, \ldots) + \ldots, \tag{19}$$

где $T_0 = t$; $T_1 = \varepsilon t$.

Стандартные преобразования метода многих масшабов позволяют получить следующую систему модуляционных уравнений:

$$\begin{gathered} a_1' + (3P_{0,3} p_k^2 + P_{2,1}) \frac{a_1^3}{8} = 0; \\ \psi' = (3P_{3,0} + p_k^2 P_{1,2}) \frac{a_1^2}{8 p_k}. \end{gathered} \tag{20}$$

Из соотношений (20) получим выражение, которое определяет зависимость частоты свободных колебаний от их амплитуды, так называемую скелетную кривую:

$$\overline{\omega}_k = p_k + \frac{\varepsilon}{8 p_k} (3P_{3,0} + p_k^2 P_{1,2}) a_1^2. \tag{21}$$

На рис. 3 представлены первые три скелетные кривые свободных колебаний стержня. Характер первых двух скелетных кривых при учете депланации поперечного сечения не изменяется (рис. 3,*а*,*б*). Однако если третья скелетная кривая без учета депланации была жесткой, то при ее учете она становится мягкой (рис. 3,*в*).

Известно [13], что если характер скелетной кривой мягкий, то в колебания упругой системы больший вклад вносит нелинейная инерционность, если жесткий – геометрическая нелинейность конструкции. Анализ скелетных кривых на рис. 3,*в* показывает, что учет депланации приводит к превалирующему вкладу нелинейной инерционности в колебания стержня, неучет депланации – геометрической нелинейности.

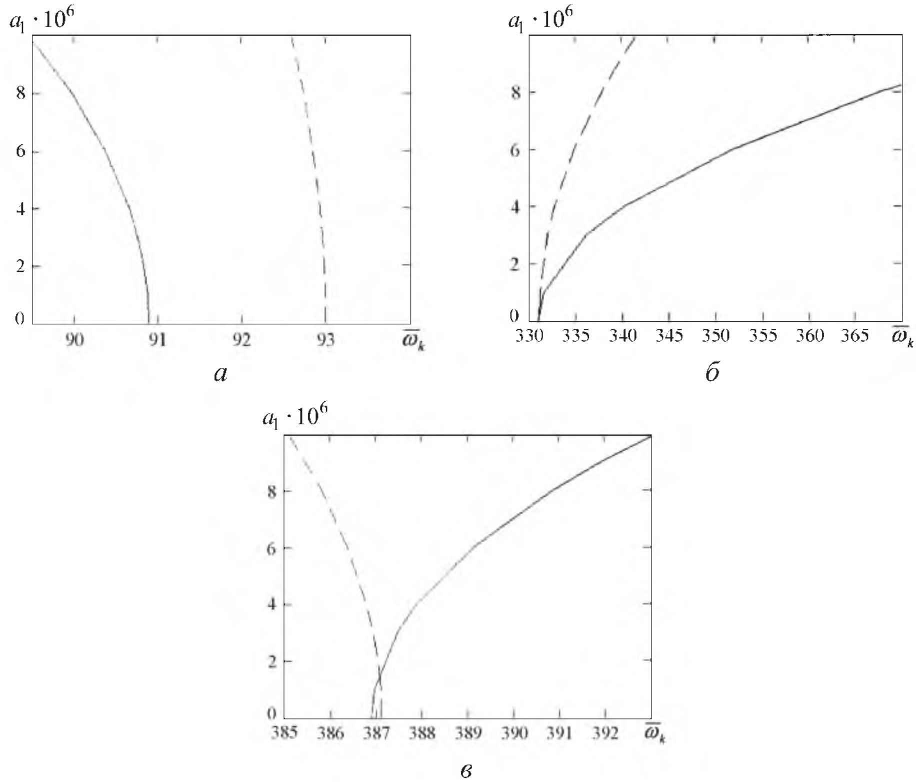

Рис. 3. Скелетные кривые свободных колебаний стержня. (Сплошные линии – без учета депланации, штриховые – с учетом депланации.)

Резюме

Досліджуються нелінійні згинно-згинно-крутні коливання стрижнів, які описуються системою трьох нелінійних інтегро-диференційиих рівнянь із частинними похідними. У цих рівняннях ураховується депланація поперечного перерізу стрижня та припускається, що центри ваги та жорсткості знаходяться у різних точках. Для дискретизації системи коливання розкладаються у ряд за власними формами лінійної задачі. Вільні коливання досліджуються за допомогою нелінійних нормальних форм Шоу–П'єра.

1. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. – М.: Физматгиз, 1959. – 450 с.
2. *Воробьев Ю. С., Шорр Б. Ф.* Теория закрученных стержней. – Киев: Наук. думка, 1983. – 188 с.
3. *Воробьев Ю. С.* Уточнение уравнений свободных колебаний вращающихся стержней // Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 11 – 27.
4. *Hodges D. H. and Dowell E. H.* Nonlinear Equations of Motions for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. – NASA TND-7818, 1974. – 52 p.

2. *Воробьев Ю. С.*, *Шорр Б. Ф.* Теория закрученных стержней. – Киев: Наук. думка, 1983. – 188 с.
3. *Воробьев Ю. С.* Уточнение уравнений свободных колебаний вращающихся стержней // Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. – Киев: Наук. думка, 1965. – С. 11 – 27.
4. *Hodges D. H. and Dowell E. H.* Nonlinear Equations of Motions for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. – NASA TND-7818, 1974. – 52 p.
5. *Crespo da Silva M. R. M. and Glynn C. C.* Nonlinear flexural-flexural-torsional dynamics of inextensional beams. I: Equations of motion // J. Struct. Mech. – 1978. – No. 6. – P. 437 – 448.
6. *Crespo da Silva M. R. M. and Glynn C. C.* Nonlinear flexural-flexural-torsional extensional dynamics of beams // Int. J. Solids Struct. – 1988. – No. 12. – P. 1225 – 1234.
7. *Гуляев В. И.*, *Гайдачук В. В.*, *Кошкин В. Л.* Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 343 с.
8. *Аврамов К. В.*, *Галас О. С.*, *Пьер К.* Модель геометрически нелинейных изгибно-изгибно-крутильных колебаний вращающихся стержней с учетом депланации поперечного сечения // Пробл. машиностроения. – 2007. – № 2. – С. 70 – 76.
9. *Avramov K. V.*, *Pierre C.*, *and Shyriaieva N.* Flexural-flexural-torsional nonlinear vibrations of pretwisted rotating beams with asymmetric cross-section // J. Vibr. Control. – 2007. – No. 13. – P. 329 – 364.
10. *Филиппов А. П.*, *Булгаков В. Н.*, *Воробьев Ю. С. и др.* Численные методы в прикладной теории упругости: – Киев: Наук. думка, 1968. – 250 с.
11. *Аврамов К. В.*, *Пьер К.*, *Ширяева Н. В.* Нелинейные нормальные формы колебаний системы с гироскопическими силами // Доп. НАН України. – 2006. – № 11. – С. 7 – 10.
12. *Nayfeh A. H. and Mook D. T.* Nonlinear Oscillations. – New York: John Wiley and Sons, 1979. – 840 p.
13. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. – М.: Гостехиздат, 1956. – 500 с.

Поступила 23. 10. 2007