

Свободные колебания продольно сжатых подкрепленных оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами

Г. Д. Гавриленко^а, В. И. Мацнер^а, О. А. Кутенкова^б

^а Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

^б Украинский государственный химико-технологический университет, Днепрпетровск, Украина

Разработана методика аналитического расчета минимальных собственных частот колебаний цилиндрических оболочек, подкрепленных стрингерами и шпангоутами. Предложен новый подход, который позволяет учитывать в оболочках наличие осесимметричных несовершенств определенного типа и продольной сжимающей нагрузки. В общем случае удастся проанализировать 17 форм колебаний, соответствующих возможным типам деформаций, и выделить минимальный параметр частоты. Исследованы гладкие, стрингерные и стрингерно-шпангоутные оболочки. Проведено сравнение расчетных данных с экспериментальными при отсутствии сжимающих продольных сил. Оценено влияние начальных прогибов и сжимающих нагрузок на минимальные параметры колебаний. Используемый подход позволяет уточнять параметры критических нагрузок и частот, что приводит к сближению теоретических и экспериментальных величин.

Ключевые слова: подкрепленные оболочки, осесимметричные несовершенства, минимальные частоты колебаний.

Введение. В известных литературных источниках в основном рассматриваются колебания идеальных гладких и ребристых оболочек. Первые результаты исследования свободных и вынужденных колебаний пластин и гладких оболочек изложены в [1–3]. Обзор задач по динамике пологих оболочек при больших амплитудах прогибов и данные экспериментов представлены в [4, 5].

Методики расчета подкрепленных оболочек предложены в [6–11]. В работе [9] описана методика расчета свободных колебаний ребристых цилиндрических оболочек с учетом усилий взаимодействия оболочки и ребер, а также эксцентриситета ребер. Получена аналитическая формула для определения собственных частот колебаний. Приведены данные для оболочек с различными типами подкреплений. Обнаружено, что наибольшее влияние на минимальную частоту собственных колебаний оказывает количество шпангоутов, с увеличением количества стрингеров она уменьшается. Обзор работ по исследованию динамических характеристик оболочек с дискретными включениями содержится в сообщении [12].

Влияние начальных несовершенств формы на динамические характеристики реальных оболочек изучалось в [7, 11], где приведены результаты экспериментальных и теоретических исследований колебаний неидеальных ребристых цилиндрических оболочек. Показано, что учет начальных проги-

бов приводит к увеличению частот свободных колебаний рассмотренных оболочек. Удовлетворительное согласование между расчетными (с учетом начальных прогибов) и экспериментальными значениями частот наблюдалось для гладких и стрингерных оболочек. Для оболочек с поперечными ребрами такое соответствие имело место только при минимальных частотах. Эти результаты использовались в качестве иллюстраций в [7].

Методика численного расчета устойчивости и колебаний ребристых цилиндрических оболочек при нелинейном неоднородном основном состоянии изложена ранее [13–15].

Методики расчета на устойчивость и определения частот колебаний ребристых оболочек вращения представлены в [13–23]. Этот подход позволяет учитывать не только влияние нелинейности основного состояния на критические нагрузки и частоты колебаний, но и наличие в оболочках произвольных начальных несовершенств формы. Наличие несовершенств формы, даже осесимметричных, влияет на величины собственных частот колебаний и требует их учета. Кроме того, реальные оболочки не свободны от нагрузок. На них действуют различные внешние силы, что, в свою очередь, существенно изменяет их частоту и зависимость последней от нагрузки. В настоящей работе рассматриваются оболочки, сжатые вдоль продольной оси. Известны единичные исследования таких оболочек.

В [22] изучались свободные колебания подкрепленных цилиндрических и конических оболочек замкнутых и с прямоугольными отверстиями, подверженных продольному сжатию. При этом учитывается дискретность подкреплений. Эксцентриситет ребер и их жесткость при изгибе в окружном направлении не учитываются. Оболочки считаются идеальными. Задача решается смешанным энергетическим методом в предположении малости перемещений и безмоментности напряженно-деформированного состояния. Экспериментально и теоретически исследовались оболочки из сплава АМг6М. Теоретически показано, что для цилиндрических оболочек с отверстиями минимальные частоты колебаний размещаются значительно ниже экспериментальных, особенно при росте сжимающей нагрузки. Экспериментальные данные для идеальных замкнутых оболочек приведены без сравнения с теоретическими результатами.

Влияние сжимающих сил на частоты колебаний замкнутых ребристых оболочек исследовалось в работе [23]. Рассматривались сжатые круговые цилиндрические оболочки, усиленные двумя перекрестными системами ребер. Расчетные формулы получены энергетическим методом с учетом дискретного размещения ребер и их эксцентриситета при одночленной аппроксимации перемещений.

Приведены теоретические зависимости минимальных собственных частот от величины параметра сжимающей силы для различных случаев деформации. Описаны результаты испытаний шести оболочек при росте параметра нагрузки. Теоретическая кривая для минимального параметра частоты колебаний f_{\min} размещается ниже экспериментальной. Как теоретически, так и экспериментально установлено, что влияние сжатия на f_{\min} только при нагрузках, меньших 80% расчетной, оказывается несущественным.

Методика аналитического расчета частот колебаний и критических нагрузок подкрепленных цилиндрических оболочек с осесимметричными вмятинами и выпучинами. Нагруженные осевыми сжимающими силами цилиндрические оболочки, подкрепленные ребрами жесткости в двух направлениях, имеют осесимметричные начальные прогибы в виде вмятин и выпучин (рис. 1). Части оболочки $l_{n+1} - l_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots, N$, где N – число вмятин) вследствие наличия начальных прогибов искривлены вдоль образующей по радиусам ρ_n и являются, по сути, оболочками, близкими по форме к цилиндрическим с радиусами кривизны r, ρ_n . Полагаем, что изменение радиуса r столь незначительно, что его можно считать постоянным по всей длине оболочки. При расчете оболочку с начальными прогибами будем рассматривать как систему, состоящую из двух цилиндрических подкрепленных оболочек длиной l_1 и $l - l_{n+1}$ и n оболочек, близких по форме к цилиндрическим длиной $l_{n+1} - l_n$.

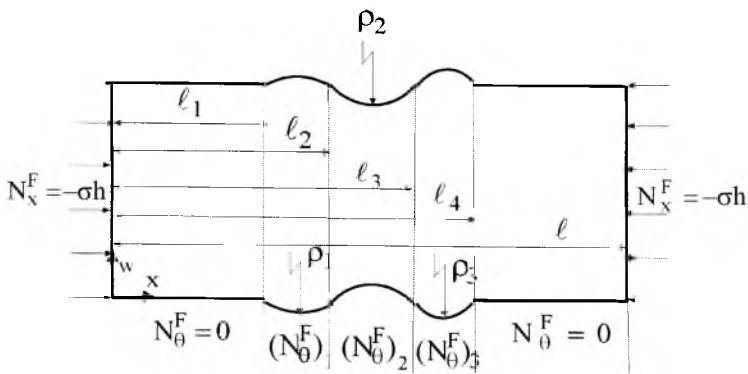


Рис. 1. Схема нагруженной оболочки.

Предполагается, что оболочка подвержена равномерному продольному сжатию и в ней в безмоментном основном состоянии возникают следующие усилия: продольное N_x^F и окружные $(N_\theta^F)_n$:

$$\{N_x^F, (N_\theta^F)_n\} = -\sigma h \alpha_1 \begin{cases} 1, 0 & \text{при } x \in [0, l_1] \cap x \in [l_n, l], \\ 1, -r_n & \text{при } x \in [l_n, l_{n+1}], \end{cases} \quad (1)$$

где σ – докритическое сжимающее нормальное напряжение; $\alpha_1 = 1 + F_s/hl_s$; F_s – площадь поперечного сечения стрингера; l_s – расстояние между стрингерами, $l_s = 2\pi r/k_s$; k_s – число стрингеров; $r_n = r/\rho_n$; $n = 1, 2, 3, \dots, N$.

Расчетные формулы получены энергетическим методом. Полную потенциальную энергию рассматриваемой системы V запишем как сумму потенциальных энергий V_2 и A_2 :

$$V = V_{2o} + V_{2s} + V_{2r} + A_2 = V_2 + A_2, \quad (2)$$

где V_{2o} , V_{2s} , V_{2r} – соответственно потенциальная энергия обшивки, стрингеров и шанпоутов; A_2 – работа внешних сил;

$$\begin{aligned}
 V_2 = & \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{r \partial \theta} - \frac{w}{r} \right) + \frac{1-\mu}{2} \left(\frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \alpha_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\alpha_r}{r^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \theta} - w - \frac{z_r}{r} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} r dx d\theta + \\
 & + \frac{D}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right)^2 - 2(1-\mu) \left[\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{r \partial x} \right)^2 \right] + \beta_s \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \beta_r \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial v}{r^2 \partial \theta} \right)^2 + \beta_{x\theta s} \left(\frac{\partial^2 w}{r \partial x \partial \theta} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + \beta_{x\theta r} \left(\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial x \partial \theta} + \frac{\partial u}{r \partial \theta} \right)^2 \right\} r dx d\theta + \frac{K}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n} \int_0^{2\pi} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \left\{ w \left[\frac{w}{\rho_n} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2\mu}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - w \right) \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\alpha_s}{\rho_n} \left(w + z_s \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - 2\alpha_s \left(w + z_s \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z_s \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} r dx d\theta + \\
 & + \frac{D}{2} \sum_{n=1}^N \frac{1}{\rho_n} \int_0^{2\pi} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \left\{ \frac{1}{\rho_n} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \right. \\
 & \left. + 2(1-\mu) \frac{\partial u}{r^2 \partial \theta} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + 2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\rho_n \partial \theta} \right) + \beta_s \frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\rho_n \partial x} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \right. \\
 & \left. + \beta_{x\theta s} \frac{\partial v}{r \partial x} \left(2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\rho_n \partial x} \right) \right\} r dx d\theta; \tag{3}
 \end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{K}{2} \frac{\sigma}{E} \alpha_1 (1-\mu^2) \left[\int_0^{2\pi} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 r dx d\theta - \sum_{n=1}^N r_n \int_0^{2\pi} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 r dx d\theta \right]. \tag{4}$$

Кинетическая энергия такой оболочки имеет вид

$$T = \frac{\rho_0 h}{2} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta +$$

$$+ \frac{\rho_s F_s}{2l_s} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial u_s}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_s}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta + \frac{\rho_r F_r}{2l_r} \int_0^l \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_r}{\partial t} \right)^2 \right] r dx d\theta. \quad (5)$$

Здесь приняты следующие обозначения: l , r , h – соответственно длина, радиус и толщина оболочки;

$$\alpha_x = 1 + \alpha_s; \quad \alpha_s = E_s F_s / Kl_s; \quad \alpha_{1s} = F_s / hl_s; \quad \alpha_\theta = 1 + \alpha_r; \quad \alpha_r = E_r F_r / Kl_r;$$

$$\beta_s = E_s I_s / Dl_s; \quad \beta_x = 1 + \beta_s; \quad \beta_r = E_r I_r / Dl_r; \quad \beta_\theta = 1 + \beta_r;$$

$$\beta_{x\theta} = \beta_{x\theta s} + \beta_{x\theta r}; \quad \beta_{x\theta s} = G_s I_{kps} / Dl_s; \quad \beta_{x\theta r} = G_r I_{kpr} / Dl_r;$$

F_s , $I_{\theta s}$, I_{kps} , z_s – соответственно площадь поперечного сечения стрингера, момент инерции, момент инерции при кручении и эксцентриситет s -го стрингера (расстояние от оси стрингера до срединной поверхности обшивки); F_r , I_{xr} , I_{kpr} , z_r , k_r , l_r – аналогичные величины шпангоутов; $l_r = l / (k_r + 1)$; $K = Eh / (1 - \mu^2)$; $D = Kh^2 / 12$; E , μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала обшивки; E_s , E_r , G_s , G_r – модули упругости и модули сдвига соответственно стрингеров и шпангоутов; ρ_b , ρ_s , ρ_r – плотность материала обшивки, стрингеров и шпангоутов соответственно.

Выражения для компонент перемещений, удовлетворяющих условия шарнирного опирания, выбираем в виде

$$\begin{cases} u = (u_{1ij} \cos i_1 \theta + u_{2ij} \sin i_2 \theta) \cos \lambda x / r \cos \omega t; \\ v = (v_{1ij} \sin i_1 \theta + v_{2ij} \cos i_2 \theta) \sin \lambda x / r \cos \omega t; \\ w = (w_{1ij} \sin i_1 \theta + w_{2ij} \cos i_2 \theta) \sin \lambda x / r \cos \omega t, \end{cases} \quad (6)$$

где u_{1ij} , v_{1ij} , w_{1ij} , u_{2ij} , v_{2ij} , w_{2ij} – произвольные постоянные; $\lambda = j\pi r / l$; j – число полуволн по длине; i_1 и i_2 – числа окружных волн; ω – собственная частота; t – временная координата.

Функции u_{1ij} , v_{1ij} , w_{1ij} описывают изгиб ребер, u_{2ij} , v_{2ij} , w_{2ij} – их кручение, причем используются они раздельно, а не вместе. В последующих формулах индексы 1 и 2 опускаются. После подстановки выражения (6) в (3)–(5) получим

$$\begin{aligned} V_2 = & \frac{K\pi l}{4r} \left\{ (u_{ij} \lambda - i v_{ij} + w_{ij})^2 + 2(1 - \mu) u_{ij} (i v_{ij} - w_{ij}) + \frac{1 - \mu}{2} (-u_{ij} i + v_{ij} \lambda)^2 + \right. \\ & + \alpha_s (\lambda u_{ij} - z_{sr} \lambda^2 w_{ij})^2 + \alpha_r [v_{ij} (1 - z_{rr}) - w_{ij} (1 - i^2 z_{rr})]^2 + \\ & \left. + \frac{1}{\alpha} \{ [\lambda^2 + i^2] w_{ij} - i v_{ij} \}^2 + 2(1 - \mu) [\lambda^2 w_{ij} (i v_{ij} - i^2 w_{ij}) - (i v_{ij} - i^2 w_{ij})^2] + \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \beta_r (iv_{ij} - i^2 w_{ij})^2 + \beta_s \lambda^4 w_{ij}^2 + \beta_{x\theta s} i^2 \lambda^2 + \beta_{x\theta r} (i\lambda w_{ij} + iu_{ij})^2 \} + \\
 & + S_{12} w_{ij}^2 + 2S_{11} \lambda u_{ij} w_{ij} - 2\mu S_{11} w_{ij} (iv_{ij} - w_{ij}) + \alpha_s S_{12} (w_{ij} - z_{sr} \lambda u_{ij})^2 + \\
 & + 2\alpha_s S_{11} (w_{ij} - z_{sr} \lambda u_{ij}) (\lambda u_{ij} - z_{sr} \lambda^2 w_{ij}) + \frac{1}{a} [S_{12} \lambda^2 u_{ij}^2 + 2S_{11} \lambda^3 u_{ij} w_{ij} + \\
 & + 2\mu S_{11} \lambda u_{ij} (i^2 w_{ij} - iv_{ij}) + 2(1 - \mu) [S_{21} i u_{ij} (2i\lambda w_{ij} - 2\lambda v_{ij}) + S_{22} u_{ij}^2] + \\
 & + \beta_s \lambda u_{ij} (\lambda u_{ij} S_{12} + \lambda^2 S_{11} w_{ij}) + \beta_{x\theta s} \lambda v_{ij} (S_{12} \lambda v_{ij} - 2S_{21} i\lambda w_{ij}) \Big] \Big\}; \quad (7)
 \end{aligned}$$

$$A_2 = -\frac{K \pi l \sigma}{4 r E} (1 - \mu^2) \alpha_1 (\lambda^2 - i^2 S_{11}) w_{ij}^2; \quad (8)$$

$$T = \frac{\rho_b h \omega^2 \pi l}{4r} (\alpha_{11} u^2 + \alpha_{22} v^2 + \alpha_{33} w^2), \quad (9)$$

где

$$\alpha_{11} = 1 + \frac{\rho_s F_s}{\rho_b h l_s}; \quad \alpha_{22} = 1 + \frac{\rho_r F_r}{\rho_b h l_r}; \quad \alpha_{33} = 1 + \frac{\rho_s F_s}{\rho_b h l_s} + \frac{\rho_r F_r}{\rho_b h l_r};$$

$$S_{11} = \sum_{n=1}^N r_n I_{1n}; \quad S_{12} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{1n}; \quad S_{21} = \sum_{n=1}^N r_n I_{2n}; \quad S_{22} = \sum_{n=1}^N r_n^2 I_{2n};$$

$$I_{1n} = \frac{2}{l} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \sin^2 \frac{\lambda x}{r} dx; \quad I_{2n} = \frac{2}{l} \int_{l_n}^{l_{n+1}} \cos^2 \frac{\lambda x}{r} dx; \quad a = \frac{12r^2}{h^2}.$$

Условия экстремума полной системы ($V + T$) приводят к системе алгебраических уравнений для определения критических значений нагрузок:

$$\begin{cases}
 (A_{11} - \bar{\omega}^2 \alpha_{11}) u_{ij} + A_{12} v_{ij} + A_{13} w_{ij} = 0; \\
 A_{21} u_{ij} + (A_{22} - \bar{\omega}^2 \alpha_{22}) v_{ij} + A_{23} w_{ij} = 0; \\
 A_{31} u_{ij} + A_{32} v_{ij} + (\bar{A}_{33} - \bar{\omega}^2 \alpha_{33}) w_{ij} = 0,
 \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\begin{cases}
 \bar{A}_{33} = A_{33} - A_{33}'' \sigma / E; \\
 A_{11} = \alpha_x \lambda^2 + \frac{1 - \mu}{2} i^2 + \alpha_s z_{rs} \lambda^2 (z_{sr} S_{12} - 2S_{11}) + \frac{1}{a} [\beta_x \lambda^2 S_{12} + \\
 + 2(1 - \mu) i^2 S_{22}];
 \end{cases} \quad (11a)$$

$$\begin{cases}
 A_{12} = -i\lambda \frac{1+\mu}{2} - \frac{i\lambda}{a} [\mu S_{11} + 2(1-\mu)S_{21}]; \\
 A_{13} = \lambda[\mu + \alpha_x S_{11} - \alpha_s z_{sr}(\lambda^2 + S_{12} - z_{sr}\lambda^2 S_{11})] + \\
 + \frac{\lambda}{a} [(\lambda^2 \beta_x + \mu i^2)S_{11} + 2(1-\mu)i^2 S_{21}]; \\
 A_{22} = \frac{1-\mu}{2} \lambda^2 + c_\theta i^2 + \frac{1}{a} [i^2 \beta_\theta + 2(1-\mu)\lambda^2]; \\
 A_{23} = -i(1 + \mu S_{11}) - \frac{i}{a} (\beta_\theta i^2 + (2-\mu)\lambda^2) - i\alpha_r(1 - z_{rr})(1 - i^2 z_{rr}); \quad (116) \\
 A_{33} = 1 + \alpha_x S_{12} + 2\mu S_{11} + \alpha_s z_{sr} \lambda^2 (z_{sr} \lambda^2 - 2S_{11}) + \alpha_r(1 - i^2 z_{rr})^2 + \\
 + \frac{1}{a} (\beta_x \lambda^4 + \beta_\theta i^4 + 2\lambda^2 i^2 (1 + \beta_{x\theta})); \\
 \bar{\omega}^2 = \frac{\rho_0 h r^2}{K} \omega^2; \quad A_{33}^n = (1 - \mu^2) \alpha_1 (\lambda^2 - i^2 S_{11}); \\
 z_{sr} = z_s / r; \quad z_{rr} = z_r / r; \quad c_\theta = 1 + \alpha_r (1 - z_{rr})^2.
 \end{cases}$$

Нетривиальное решение полученной системы уравнений возможно лишь при выполнении условия

$$\begin{vmatrix}
 A_{11} - \alpha_{11} \bar{\omega}^2 & A_{12} & A_{13} \\
 A_{12} & A_{22} - \alpha_{22} \bar{\omega}^2 & A_{23} \\
 A_{13} & A_{23} & \bar{A}_{33} - \alpha_{33} \bar{\omega}^2
 \end{vmatrix} = 0. \quad (12)$$

Уравнение (12) приводит к уравнению третьей степени относительно $\bar{\omega}^2$. Поскольку в дальнейшем будем рассматривать только минимальные корни этого уравнения, то, линеаризуя его, получаем

$$(\bar{\omega}_{ij}^2)_{cr} = \frac{\bar{A}_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2) + 2A_{12}A_{13}A_{23} - A_{11}A_{23}^2 - A_{22}A_{13}^2}{\alpha_{11}(A_{22}\bar{A}_{33} - A_{22}^2) + \alpha_{22}(A_{11}\bar{A}_{33} - A_{13}^2) + \alpha_{33}(A_{11}A_{22} - A_{12}^2)}. \quad (13)$$

При этом возможен ряд форм колебаний (случаев деформации), для которых собственные частоты зависят только от некоторых параметров жесткости ребер.

Рассмотрим следующие случаи деформации.

Общий (все стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие, изгиб и кручение) и *восемь частных*, каждый из которых имеет свой подслучай:

первый (стрингеры работают на растяжение–сжатие и изгибаются, шпангоуты работают аналогично общему случаю), первый подслучай отличается от первого случая тем, что в нем не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии;

второй (стрингеры только закручиваются, шпангоуты учитываются аналогично общему случаю), второй подслучай отличается от второго случая тем, что в нем не учитывается жесткость шпангоутов при растяжении–сжатии;

третий (стрингеры работают как в общем случае, а в шпангоутах не учитывается жесткость при кручении), третий подслучай отличается от третьего случая тем, что дополнительно не учитывается жесткость стрингеров и шпангоутов при растяжении–сжатии;

четвертый (стрингеры работают как в общем случае, шпангоуты работают только на кручение), четвертый подслучай аналогичен четвертому случаю, но в нем не учитывается жесткость стрингеров при растяжении–сжатии;

пятый (стрингеры работают на растяжение–сжатие и изгиб, шпангоуты – только на кручение), пятый подслучай аналогичен пятому случаю, но в нем не учитывается жесткость стрингеров при растяжении–сжатии;

шестой (стрингеры только закручиваются, шпангоуты работают на растяжение–сжатие и изгиб), шестой подслучай аналогичен шестому случаю, но в нем не учитывается жесткость шпангоутов при растяжении–сжатии;

седьмой (стрингеры и шпангоуты работают на растяжение–сжатие и изгиб), седьмой подслучай аналогичен седьмому случаю, но в нем не учитывается жесткость при растяжении–сжатии как стрингеров, так и шпангоутов;

восьмой (стрингеры и шпангоуты только закручиваются), в восьмом подслучае учитываются только ограничения на вид деформации.

Далее эти случаи обозначим следующим образом: 0(111-111); 1(110-111); 2(001-111); 3(111-110); 4(111-001); 5(110-001); 6(001-110); 7(110-110); 8(001-001). Аналогично обозначим и подслучаи. Для каждого случая потери устойчивости применяются специальные условия, которые накладываются на число волн и полуволн, связанных с числом ребер [6–8]. Эти условия следующие для каждого случая (для подслучаев они те же, что и для соответствующего случая): 0 ($2i \neq t_1[n_s], j \neq t_2[n_r + 1]$); 1 ($2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r + 1]$); 2 ($2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r + 1]$); 3 ($2i \neq t_1[n_s], j = t_2[n_r + 1]$); 4 ($2i \neq t_1[n_s], j = t_2[n_r + 1]$); 5 ($2i = t_1[n_s], j = t_2[n_r + 1]$); 6 ($2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r + 1]$); 7 ($2i = t_1[n_s], j \neq t_2[n_r + 1]$); 8 ($2i = t_1[n_s], j = t_2[n_r + 1]$), где $t_1 = 0, 1, 2, 3, \dots$; $t_2 = 1, 2, 3, \dots$.

Результаты аналитического исследования зависимости минимальных частот колебаний от параметра сжимающих сил. Исследовались оболочки, изготовленные из листового проката АМг6М [9] (таблица). Ребра выполнены из уголков размерами $(4 \times 4 \times 0,45) \cdot 10^{-3}$ м (стрингеры) и $(6 \times 6 \times 0,45) \cdot 10^{-3}$ м (шпангоуты). Граничные условия близки к шарнирному опиранию. Использовались приведенные ранее [9] результаты экспериментального исследования ненагруженных оболочек.

Проанализированы все указанные выше формы колебаний при заданных конкретных величинах параметра нагрузки $p = P/P_{cl}$, где P – заданная нагрузка; $P_{cl} = 0,605 EFh/r$; F – площадь поперечного сечения оболочки. Для этих форм колебаний определены частоты колебаний и наименьшая минимальная частота $f_{ij} = \omega/2\pi - \min \text{minimum}$.

На рис. 2–5 представлены зависимости минимальных частот от параметров нагрузки $f_{ij} = f(p)$ для всех рассматриваемых оболочек (таблица). На рис. 2 такая зависимость приведена для гладкой оболочки (№ 1 в таблице).

Полагается, что оболочки могут иметь два типа локальных прогибов длиной $dl_1 = 0,17$ каждый, расположенные посередине, причем безразмерные амплитуды их следующие: 1 – $w_1/h = w_3/h = 0,5$ (вмятина), $w_2/h = -0,5$ (выпучина); 2 – $w_1/h = w_3/h = -0,5$ (выпучина), $w_2/h = 0,5$ (вмятина). На рис. 2–5 величины минимальных частот, полученные экспериментально [9], для ненагруженных оболочек показаны точками. Они служат своего рода реперами для оценки того, что происходит с минимальной частотой при росте параметра нагрузки.

Сведения о геометрии и типах оболочек

№ оболочки	Характеристика	l , м	$h \cdot 10^{-3}$, м
1	Неподкрепленная оболочка	0,83	0,50
2	32 внешних стрингера	0,43	0,45
3	32 внутренних стрингера	0,43	0,44
4	32 внешних стрингера	0,83	0,43
5	32 внутренних стрингера	0,83	0,44
6	32 внешних стрингера и 9 внутренних шпангоутов	0,83	0,44
7	32 внутренних стрингера и 9 внешних шпангоутов	0,83	0,45

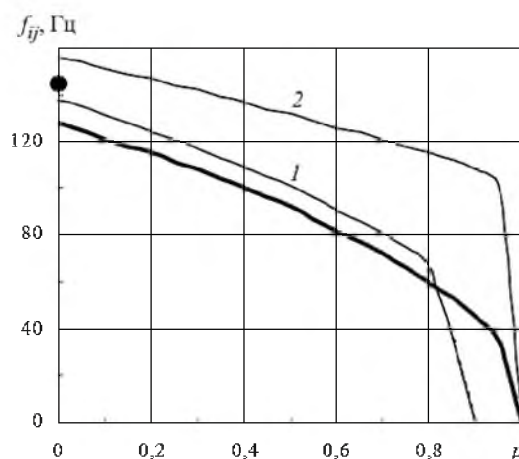


Рис. 2. Неподкрепленная оболочка, $l/r = 5,19$; $r/t = 320$. (Здесь и на рис. 3–5: сплошные жирные линии – зависимость наименьшей частоты колебаний от параметра нагрузки для идеальной оболочки, т.е. при отсутствии несовершенств формы; 1 и 2 – аналогичные зависимости для двух неидеальных оболочек.)

Экспериментальные величины f_{ij} (при $p = 0$) расположены выше, полученных теоретически. Отличие теоретической величины от экспериментальной составляет около 10%. Частоты колебаний идеальной гладкой оболочки существенно изменяются с ростом p (довольно быстро снижаются). Уже при $p = 0,8$ частота уменьшается вдвое. Наличие прогибов 1- и 2-го типов приводит к повышению частоты колебаний, при прогибе 2-го типа и $p = 0,8$ первоначальная частота (ненагруженная оболочка) уменьшилась приблизительно на 10%. Начальные прогибы этих типов повышают частоты колебаний

при $p \leq 0,8$ и лишь прогибы 1-го типа могут снизить частоты колебаний по сравнению с таковыми для идеальной оболочкой при $p \geq 0,8$.

На рис. 3, 4 представлены зависимости $f_{ij} = f(p)$ для стрингерных оболочек. Оболочки (№ 2–4 в таблице) несколько различались толщиной. На рис. 3,а данные приведены для оболочки с $r/h = 356$, на рис. 3,б – с $r/h = 364$. На рис. 4,а величина $r/h = 372$, на рис. 4,б – $r/h = 364$.

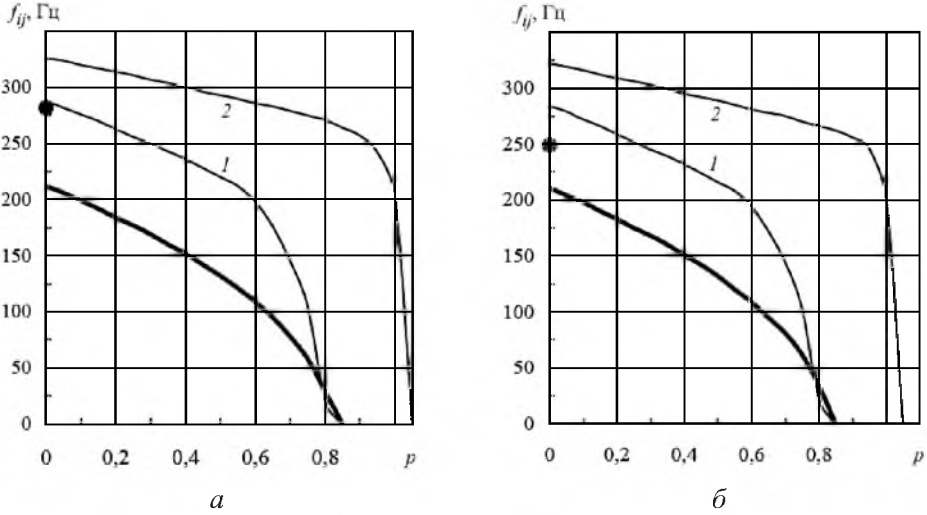


Рис. 3. Оболочка, подкреплённая стрингерами, $l/r = 2,69$; $k_s = 32$.

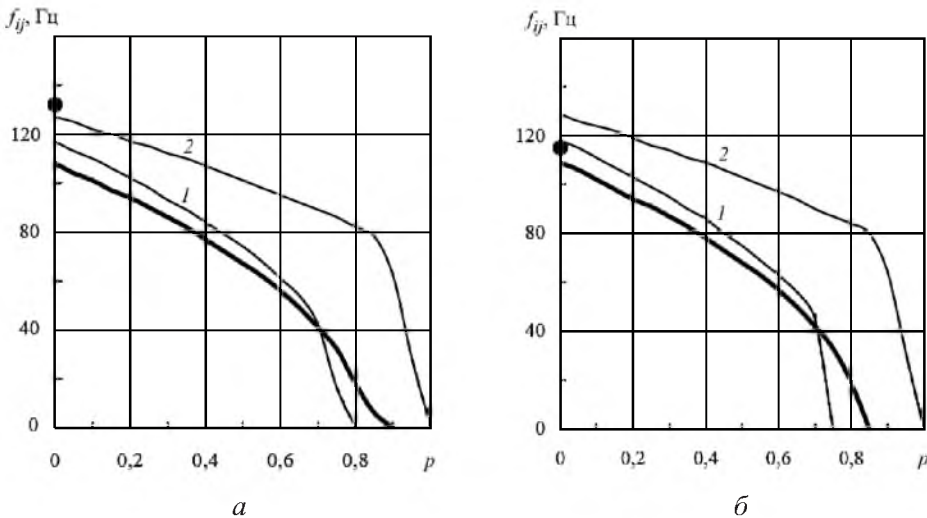


Рис. 4. Оболочка, подкреплённая стрингерами, $l/r = 5,19$; $k_s = 32$.

Как и в случае гладких оболочек, на зависимостях $f_{ij} = f(p)$ для идеальных стрингерных оболочек наблюдается сильное влияние параметра нагрузки p на f_{ij} . С приближением p к критическому значению ($p = 0,85$) минимальная частота резко уменьшается. Для ненагруженных стрингерных оболочек экспериментальные f_{ij} (на рис. 3, 4 точки) расположены выше, полученных теоретически (сплошные жирные линии). Данные эксперимента и

расчета могут отличаться примерно на 20% (рис. 3,а и 4,а), для других оболочек эта величина может значительно уменьшаться. При наличии прогибов 1-го и особенно 2-го типов теоретические значения f_{ij} возрастают. Расхождение между теоретическими значениями f_{ij} и экспериментальными при $p = 0,8$ составляет не более 10% для коротких оболочек (рис. 3) и более 30% для длинных (рис. 4).

На рис. 5 представлена зависимость $f_{ij} = f(p)$ для стрингерно-шпангоутных оболочек (№ 5, 6 в таблице). Экспериментальные данные достаточно близки к теоретическим f_{ij} для ненагруженных оболочек. Расхождение между ними находится в пределах 10%. С ростом p характер кривых (на рис. 5 сплошные жирные линии) изменяется медленно, и только при приближении p к $p_{кр}$ происходит их резкое снижение. При наличии начальных прогибов 1- и 2-го типов частоты возрастают. В случае прогибов 2-го типа для оболочки № 5 (таблица) теоретические значения f_{ij} приближаются к экспериментальным (рис. 5,а, $p = 0$).

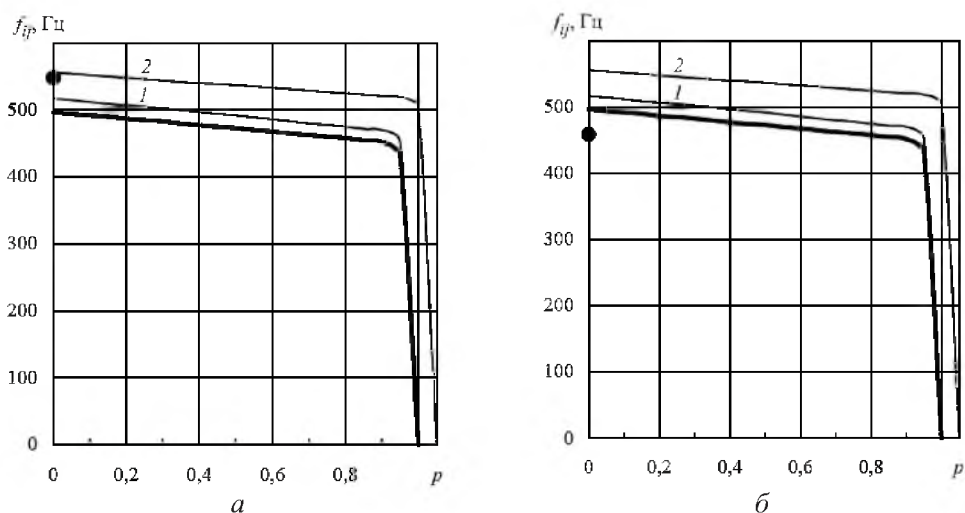


Рис. 5. Оболочка, подкреплённая стрингерами и шпангоутами, $l/r = 2,69$; $k_s = 32$; $k_r = 9$.

На рис. 5,б кривые 1 и 2 располагаются выше сплошной жирной линии, и расчетное значение f_{ij} при $p = 0$ больше экспериментального f_{ij} при том же значении p . Следовательно, в реальных оболочках, характер распределения несовершенств которых неизвестен, имели место прогибы. Прогибы могут уменьшать частоту колебаний. Это, в свою очередь, приводит к тому, что экспериментальные значения f_{ij} при $p = 0$ меньше всех расчетных при том же p . Это, возможно, вызвано тем, что исследование ограничено осесимметричными несовершенствами, а реальные прогибы чаще бывают несимметричными.

Выводы

1. Предложен аналитический метод определения минимальных собственных частот колебаний продольно сжатых ребристых цилиндрических оболочек с осесимметричными начальными прогибами.

2. Оценено влияние продольного сжатия и несовершенств формы оболочек на минимальную собственную частоту.

3. Наличие начальных прогибов рассмотренного типа в основном повышает собственные частоты колебаний.

4. При росте параметра сжимающей нагрузки частоты снижаются, особенно для гладких и стрингерных оболочек.

5. Для оболочек с продольно-поперечным подкреплением с увеличением нагрузки частота изменяется мало и только вблизи $p_{кр}$ она приближается к нулю. Следовательно, эти оболочки в широком диапазоне нагружения слабо подвержены воздействию низких возбуждающих частот, и переход к опасному резонансному режиму значительно затруднен.

Резюме

Розроблено методику аналітичного розрахунку мінімальних власних частот коливань циліндричних оболонок, що підкріплені стрингерами і шпангоутами. Запропоновано новий підхід, який дозволяє враховувати наявність в оболонках осесиметричних недосконалостей визначеного типу і поздовжнього стиску. У загальному випадку можна проаналізувати 17 форм коливань, які відповідають можливим типам деформування, і визначити мінімальний параметр частоти. Досліджено невідкріплені, стрингерні і стрингерно-шпангоутні оболонки. Виконано порівняння результатів розрахунку з даними експериментальних досліджень за відсутності стискальних поздовжніх сил. Оцінено вплив початкових прогинів і поздовжнього стиску на мінімальні параметри коливань. Запропонований підхід дозволяє уточнювати параметри критичних навантажень і частот коливань, що зближує теоретичні й експериментальні величини.

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
2. *Григолюк Э. И.* О колебаниях круговой цилиндрической панели, испытывающей конечные прогибы // Прикл. математика и механика. – 1955. – **19**, № 3. – С. 376 – 382.
3. *Григолюк Э. И.* Нелинейные колебания и устойчивость пологих оболочек и стержней // Изв. АН СССР. От-ние техн. наук. Механика и машиностроение. – 1955. – № 3. – С. 33 – 68.
4. *Григоренко Я. М., Гуляев В. И.* Нелинейные задачи теории оболочек и методы их решения (обзор) // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 3 – 23.
5. *Кубенко В. Д., Ковальчук П. С.* Нелинейные задачи колебаний тонких оболочек (обзор) // Там же. – 1998. – **34**, № 8. – С. 3 – 31.
6. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А.* Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 368 с.
7. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Паламарчук В. Г.* Динамика ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1983. – 207 с.

8. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Ревуцкий В. Н. и др.* Колебания ребристых оболочек вращения. – Киев: Наук. думка, 1988. – 172 с.
9. *Галака П. И., Заруцкий В. А., Мацнер В. И., Носаченко А. М.* Свободные колебания ребристых цилиндрических оболочек // Прикл. механика. – 1974. – **10**, № 7. – С. 49 – 55.
10. *Заруцкий В. А.* О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек // Там же. – 2001. – **37**, № 7. – С. 38 – 67.
11. *Кукарина А. И., Мацнер В. И., Сивак Э. Ф.* О влиянии начальных погрешностей на собственные частоты колебаний ребристых цилиндрических оболочек // Там же. – 1982. – **18**. – № 4. – С. 58 – 63.
12. *Андреев Л. В., Дышко А. Л., Павленко И. Д.* Динамические характеристики оболочек с дискретными включениями // Гидроаэромеханика и теория упругости. – 1981. – № 28. – С. 54 – 65.
13. *Гавриленко Г. Д.* Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.
14. *Гавриленко Г. Д., Фиалко С. Ю.* Колебания нагруженных ребристых цилиндрических оболочек при нелинейном неоднородном напряженно-деформированном состоянии // Всесоюз. симп. по нелинейной теории оболочек и пластин: Тр. Всесоюз. симп. – Казань: Изд. Казан. ун-та, 1980. – С. 105 – 106.
15. *Гавриленко Г. Д., Фиалко С. Ю.* Исследование свободных колебаний ребристых цилиндрических оболочек // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1981. – № 38. – С. 25 – 30.
16. *Гавриленко Г. Д., Трубицина О. А.* Устойчивость сферических поясов при действии внешнего давления // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 3. – С. 52 – 56.
17. *Гавриленко Г. Д., Трубицина О. А.* Колебания и устойчивость гладких и ребристых сферических поясов // Пробл. прочности. – 1996. – № 2. – С. 86 – 91.
18. *Гавриленко Г. Д., Трубицина О. А., Мацнер В. И.* Собственные колебания сферических поясов с кольцевыми подкрепляющими ребрами // Там же. – 1998. – № 3. – С. 124 – 127.
19. *Гавриленко Г. Д., Трубицина О. А., Мацнер В. И., Ситник А. С.* Колебания и устойчивость предварительно нагруженных сферических поясов // Докл. НАН Украины. – 1994. – № 5. – С. 53 – 57.
20. *Гавриленко Г. Д., Мацнер В. И., Ситник А. С. и др.* Методика расчета и исследование устойчивости оболочек вращения с учетом деформирования за пределом упругости // Прикл. механика. – 1994. – **30**, № 6. – С. 65 – 72.
21. *Gavrylenko G. D. and Trubitsina O. A.* Vibrations of pre-loaded smooth and ribbed spherical bands // Adv. Vibr. Eng. – 2007. – **2**, No. 2. – P. 89 – 93.

22. *Пальчевский А. С., Прядко А. А., Капля П. Г. и др.* Колебания продольно сжатых цилиндрических и слабokonических оболочек // Прикл. механика. – 1980. – **16**, № 9. – С. 56 – 63.
23. *Галака П. И., Заруцкий В. А., Капля П. Г. и др.* Исследование влияния осевых сжимающих сил на частоты и формы колебаний ребристых цилиндрических оболочек // Там же. – 1975. – **11**, № 8. – С. 41 – 48.

Поступила 09. 10. 2007