

Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия

В. А. Баженов, О. С. Погорелова, Т. Г. Постникова, О. А. Лукьянченко

Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

На основе численного анализа установлено, что введение в уравнения движения виброударной упругой системы силы контактного взаимодействия, изменяющейся по закону Герца, позволяет моделировать удар между соударяющимися телами как при гармонической, так и стохастической внешней нагрузке. Это позволяет получить закон движения тел виброударной системы на всей временной оси, включая период удара. Выполнена численная оптимизация параметров виброударной системы методом проекции градиента с коррекцией невязки в ограничениях. Проведен сравнительный анализ эффективности динамического безударного и ударного гасителей колебаний.

Ключевые слова: виброударное движение, моделирование удара, сила контактного взаимодействия, закон Герца, оптимизация, динамический и ударный гасители.

1. Постановка задачи. Изучению динамических процессов в виброударных механических системах посвящен ряд работ [1, 2]. Для описания и моделирования ударного взаимодействия тел в таких системах существуют два подхода. Согласно первому моделирование удара осуществляется по методу граничных условий с использованием гипотез стереомеханической теории удара и коэффициента восстановления. Такой подход требует четкой фиксации момента удара и соответствующей коррекции начальной фазы нагрузки. При наличии в упругой системе больше одной контактирующей пары данный подход требует использования многоточечных краевых задач, что в определенной мере усложняет соответствующие расчеты. Отдельное описание междударного движения и процесса удара также может стать проблематичным при применении более общих концепций теории соударений твердых тел. Этот подход можно использовать при решении простых задач. Однако он не позволяет реализовать единую форму записи уравнений движения на всей временной оси и получить результаты общего характера, описывающие качественные свойства движения. Поэтому целесообразно применять другой подход, позволяющий построить и проанализировать единую форму записи уравнений движения элементов виброударных систем на всей временной оси, которые описывают полную совокупность реализованных движений за счет прикладывания к телам силы, моделирующей процесс силового взаимодействия соударяющихся тел. Такой подход представляется более общим, он существенно упрощает построения, связанные с исследованием виброударных режимов колебаний упругих систем, например задачи о внешнем ударе о неподвижное препятствие и внутреннем ударе между телами системы в такой постановке не отличаются.

Показано, что описание силы контактного взаимодействия с помощью формул Герца позволяет получить закон колебательного движения сложных нелинейных объектов на всей временной оси как в период удара, так и между ударами. Закон Герца, несмотря на то что он базируется на определенных идеальных условиях, широко применяется и остается наиболее распространенным принципом моделирования ударного поведения.

При проектировании виброударных систем большое значение имеет правильный выбор параметров системы, поскольку от этого зависит эффективность ее работы. В строительной механике методы поиска оптимальных параметров конструкций составляют отдельную область оптимального проектирования. Основаны они чаще всего на итерационных процессах, промежуточным этапом которых является нахождение тел или иных характеристик конструкций. В [3] разработан эффективный численный подход к решению проблемы оптимизации параметров упругих систем в задачах строительной механики, который базируется на теории и методах нелинейного программирования. В данной работе предлагается подход к оптимизации параметров виброударной системы с использованием модифицированного метода наискорейшего спуска – метода проекции градиента с коррекцией невязки в ограничениях. Использование подхода проиллюстрировано на примере двухмассовой виброударной системы с ударным гасителем одностороннего действия, параметры которого оптимизируются. В настоящее время гасители колебаний применяются достаточно широко, поэтому представляется целесообразным сравнение эффективности ударного гасителя колебаний с оптимальными параметрами и динамического безударного. Такое сравнение выполнено ниже.

2. Моделирование удара силой контактного взаимодействия. Удар между телами моделируется силой контактного взаимодействия, описываемой законом Герца, согласно которому для упругого удара тел эта сила имеет вид [4, 5]

$$F(t) = K\alpha(t)^{3/2}. \quad (1)$$

Здесь $\alpha(t)$ – относительное сближение; K – константа Герца,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \quad (2)$$

где q , A и B – табличные константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта;

$$\delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi}; \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2 \pi} \quad (3)$$

(μ_i и E_i – коэффициенты Пуассона и модули Юнга для обоих тел).

Проиллюстрируем применение предлагаемого подхода на примере исследования виброударных процессов в двухмассовой системе с двумя степенями свободы, которая состоит из основного и присоединенного тел, связанных упругими пружинами и демпферами (рис. 1). Основное тело подвергается внешнему воздействию.

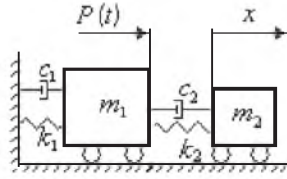


Рис. 1. Двухмассовая виброударная система.

Уравнения движения системы имеют следующий вид:

$$\ddot{x}_1 + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 + \omega_1^2x_1 + 2\xi_2\omega_2\mu(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) = \frac{1}{m_1}[P(t) - F(t)]; \quad (4)$$

$$\ddot{x}_2 + 2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) = \frac{1}{m_2}F(t),$$

где $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$; $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$; $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$; $F(t)$ – моделирующая сила контактного взаимодействия, описываемая законом (1) и действующая лишь во время удара. В связи с этим при численном интегрировании уравнений движения (4) необходимо проводить уточнение начальных условий удара: момента начала удара; его продолжительности; относительной скорости сближения тел ($\dot{x}_1 - \dot{x}_2$). Параметры двухмассовой виброударной системы приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

Параметры двухмассовой виброударной системы

Характеристика	Основное тело	Присоединенное тело
Масса m_i , кг	1000,0	70,0
Парциальная частота колебаний ω_i , рад/с	6,283185	5,646
Коэффициент демпфирования ξ_i	0,03629	0,2
Начальное расстояние между телами D , м	0,05	
E_i , Н/м ²	$2,09934 \cdot 10^{11}$	$2,09934 \cdot 10^{11}$
μ_i	0,3	0,3
Табличные константы, характеризующие местную геометрию контактирующих поверхностей A, B , м ⁻¹	$A = 0,5, B = 0,5$	

Результаты численных исследований колебаний упругой виброударной системы получены при различной реализации процесса нагружения: периодической и случайной. Периодическое гармоническое воздействие $P(t) = P_r \cos(\omega t)$ имело такие характеристики: частота $\omega = 6,0$ рад/с; интенсив-

ность $P_r = 2000$ Н. При численных исследованиях случайных колебаний виброударной системы в качестве нагрузки использовалась модель стационарного случайного процесса со скрытой периодичностью. Односторонняя спектральная плотность такого процесса может быть описана формулой [6]

$$S(\omega) = \frac{2\sigma_{\text{сл}}^2}{\pi} \frac{\alpha\theta^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}, \quad (5)$$

где $\sigma_{\text{сл}}$ – дисперсия процесса; θ – характерная частота процесса; α – параметр корреляции.

Случайная нагрузка со спектральной плотностью такого вида действует, например, на наземные транспортные машины [6], на глубинное буровое оборудование и т.п. Из теории случайных процессов известно [7], что реализация стационарного случайного процесса может быть вычислена с помощью его спектральной плотности по формуле

$$P(t) = \sum_{i=1}^N \cos(\omega_i t + \delta_i) \sqrt{2S(\omega_i)\Delta\omega_i}, \quad (6)$$

где N – количество гармонических составляющих; δ_i – начальные фазы, являющиеся случайными числами, равномерно распределенными на отрезке от 0 до 2π . Характеристики случайной нагрузки выбирались такими: $N = 100$; $\theta = 6$ рад/с; $\alpha = 5$ рад/с; $\sigma_{\text{сл}} = 4242,642$ Н.

На рис. 2,а,б показаны основные характеристики установившихся вынужденных колебаний системы при гармоническом воздействии, на рис. 2,г,в – при стохастическом. На графиках зависимости перемещений тел ударной системы от времени (рис. 2,а,в) хорошо виден удар и то, как после удара присоединенное тело отскакивает от основного. Графики зависимости контактной силы, возникающей в моменты ударов при колебаниях вибросистемы, от времени приведены на рис. 2,б,г. Таким образом, исследования показывают, что моделирование удара силой контактного взаимодействия, изменяющейся по закону Герца, дает хороший результат и позволяет получить закон движения виброударной системы на всей временной оси, включая период удара, как для гармонической, так и стохастической нагрузки [8].

Главным ограничением для силы, описанной законом Герца, является то, что она моделирует упругий удар. Сравним результаты, полученные для гармонической нагрузки моделированием удара силой контактного взаимодействия и методом граничных условий с использованием гипотез стереомеханической теории удара и коэффициента восстановления R [9]. При $R = 1$ результаты по этим методам совпадают с точностью до четырех знаков, при $R < 1$ наблюдается небольшое расхождение. На рис. 3 приведены графики движения тел системы при $R = 1$; 0,5. Видно, что даже для небольшого коэффициента восстановления ($R = 0,5$) расхождение между амплитудами для основного тела не превышает 17%, для присоединенного оно меньше 12%.

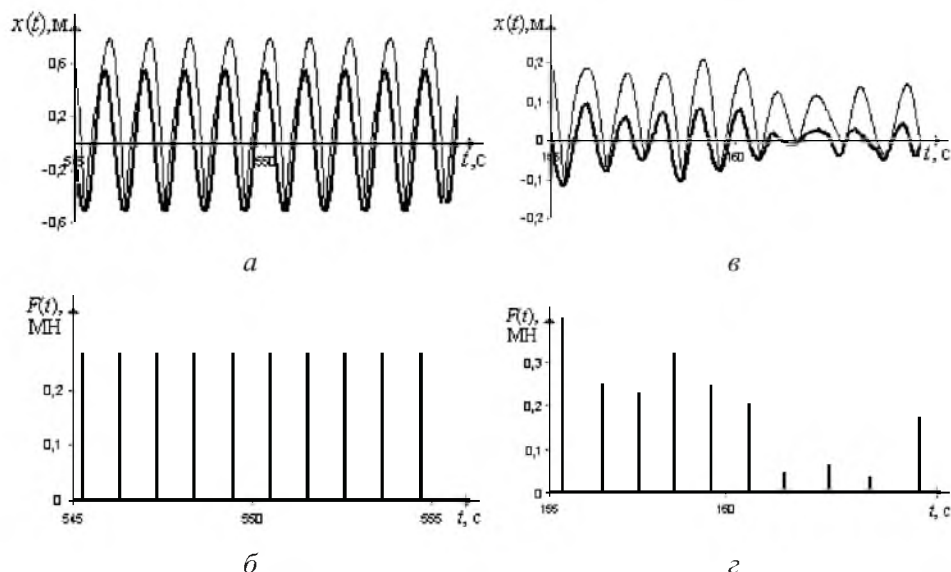


Рис. 2. Характеристики установившихся колебаний виброударной системы.

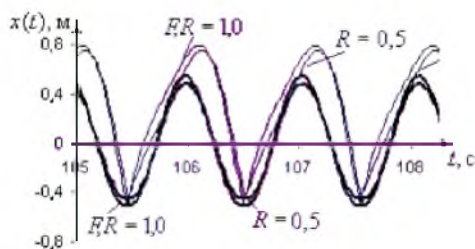


Рис. 3. Графики движения виброударной системы при $R = 1; 0,5$.

Таким образом, несмотря на идеальные предположения об упругости удара, сила Герца обеспечивает надежный результат при исследовании колебательного движения виброударных систем на всей часовой оси.

3. Оптимизация параметров виброударной системы. Как отмечалось в п. 1, оптимизация параметров виброударной системы выполняется с использованием метода проекции градиента с коррекцией невязки в ограничениях. Основными этапами оптимизационной задачи являются: построение модели виброударной системы, куда входят оптимизируемые параметры системы, и модели внешнего воздействия; реализация процедуры определения реакций системы на заданное воздействие при фиксированных значениях оптимизируемых параметров; формирование целевой функции; определение накладываемых ограничений. Для исследуемой виброударной системы в качестве целевой функции принята амплитуда колебаний основной массы. Целью оптимизации является определение таких параметров присоединенной массы, при которых амплитуда основной массы была бы минимальной. Такая постановка задачи соответствует рассмотрению присоединенной массы как ударного гасителя одностороннего действия. Целевая функция при конкретных параметрах присоединенной массы находится путем решения задачи об установившихся вынужденных колебаниях виброударной системы.

Направление очередного оптимизационного шага определяется вычислением градиента целевой функции с учетом накладываемых ограничений.

Оптимизируются параметры присоединенного тела: масса m_2 ; парциальная частота колебаний ω_2 и коэффициент демпфирования ξ_2 при действии гармонической нагрузки, описанной в п. 2. Эти величины до и после оптимизации приведены в табл. 2.

Т а б л и ц а 2

Параметры присоединенного тела до и после оптимизации

Характеристика	До оптимизации	После оптимизации
Масса m_2 , кг	70,0	89,3
Парциальная частота колебаний ω_2 , рад/с	5,646	5,976
Коэффициент демпфирования ξ_2	0,2000	0,2226

На рис. 4 представлены амплитудно-частотные характеристики основного тела виброударной системы: основная масса движется без присоединенной; присоединенная масса имеет параметры до оптимизации и после; присоединенная масса является динамическим гасителем колебаний. Благодаря ударному гасителю с оптимизированными параметрами амплитуда основного тела на резонансной частоте уменьшилась почти на 30%. Можно сделать вывод, что метод проекции градиента и разработанное программное обеспечение позволяют оптимизировать параметры виброударной системы.

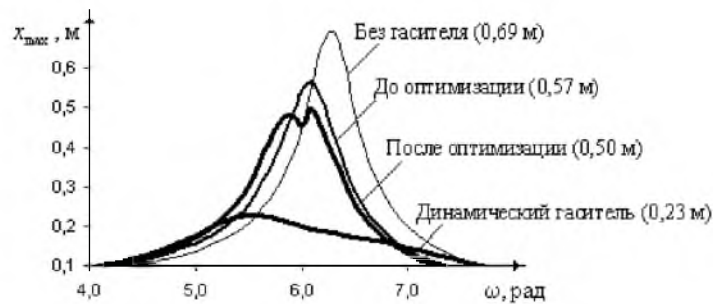


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики основного тела виброударной системы.

Проследим влияние других параметров, характеризующих удар, на колебания основной массы. Исследования свидетельствуют о том, что величины, входящие в константу Герца (модули E_i), и табличные константы, характеризующие местную геометрию зоны контакта A и B , оказывают заметное влияние на контактную силу и практически не влияют на амплитуду колебаний основной массы. На рис. 5,а показаны графики контактной силы за время удара (в крупном масштабе времени) для стали, меди и алюминия (предполагается, что в зоне контакта у основной и присоединенной масс одинаковый материал и соответственно одинаковые модули упругости E_i). В табл. 3 приведены значения амплитуды основного тела для указанных материалов. Там же для сравнения представлены данные для каучука, макси-

мальная величина контактной силы которого составляет $4,69 \cdot 10^4$ Н. Модуль упругости этого материала в 26000 раз меньше, чем стали, контактная сила меньше в 60 раз, а амплитуда колебаний основного тела больше в 1,14 раза. Все результаты получены для оптимизированных параметров присоединенного тела и при гармонической внешней нагрузке, описанной выше. Аналогичные результаты получены при изменении констант A и B , характеризующих местную геометрию зоны контакта. На рис. 5,б приведены графики контактной силы при разных значениях A и B , в табл. 4 – величины амплитуд колебаний основного тела при разных геометриях зоны контакта. Из рис. 5 видно, что продолжительность удара тем меньше, чем больше контактная сила.

Т а б л и ц а 3

Амплитуда колебаний основного тела для разных материалов

Материал	$E \cdot 10^{11}$, Н/м ²	Амплитуда, м
Сталь	2,09934	0,453678
Медь	1,11000	0,453605
Алюминий	0,69000	0,453529
Каучук	0,00008	0,518791

Т а б л и ц а 4

Амплитуда колебаний основного тела для разных геометрий контактирующих поверхностей

$A = B$ (м ⁻¹)	Амплитуда, м
0,5	0,453678
1,0	0,453643
10,0	0,453444

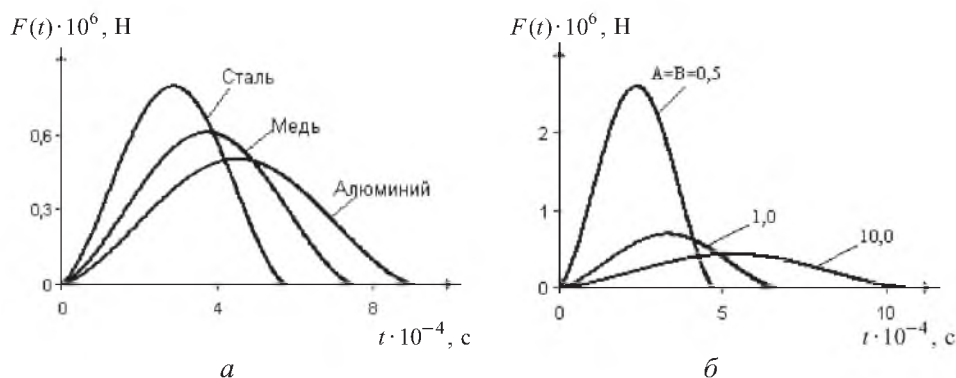


Рис. 5. Графики контактной силы за период удара.

Проанализируем влияние начального расстояния между телами D на движение виброударной системы. Исследования показывают, что с увеличением D удар между телами ослабевает, и контактная сила уменьшается. С

дальнейшим ростом D тела перестают ударяться, амплитуда основного тела уменьшается и далее с увеличением D не изменяется: присоединенное тело становится динамическим безударным гасителем. В зависимости от начального расстояния между телами $D = 0,05; 0,1; 0,4; 0,5$ и $0,7$ м амплитуда колебаний основного тела составляет соответственно $0,453678; 0,509651; 0,409748; 0,200138$ и $0,200138$ м.

4. Анализ эффективности динамического безударного и ударного гасителей колебаний. Было проведено сравнение эффективности динамического безударного и ударного гасителей колебаний основной массы при действии на нее нагрузки (гармонической или стохастической). На рис. 4 нижняя кривая соответствует амплитудно-частотной характеристике основного тела системы с динамическим безударным гасителем под действием гармонической нагрузки. Максимальная амплитуда основного тела равна $0,23$ м, в то время как максимальная амплитуда основного тела системы с ударным гасителем с оптимальными параметрами – $0,56$ м. При действии на основное тело стохастической нагрузки, описанной в п. 2, среднеквадратичное отклонение перемещений основного тела системы с динамическим безударным гасителем составляет $0,029036$ м, с ударным – $0,032916$ м.

Таким образом, как при гармонической, так и при стохастической нагрузке динамический безударный гаситель эффективнее ударного гасителя колебаний одностороннего действия. Этот вывод аналогичен результату, полученному в [10] методом граничных условий (с использованием коэффициента восстановления) для системы с одной степенью свободы и для сооружений башенного типа. В [10] указывается, что несмотря на большую эффективность динамического гасителя, сравнение следует проводить исходя также из других позиций. В частности, необходимо учитывать конструктивные особенности, удобство монтажа, долговечность конструкции, возможность длительной эксплуатации без ремонта и замены элементов конструкции гасителя и т.д. Ударные гасители обладают большой надежностью и удобны в эксплуатации. Сопоставление должно в конечном итоге иметь комплексный, инженерный характер.

Выводы

1. Введение в уравнения движения виброударной упругой системы силы контактного взаимодействия, описанной законом Герца, позволяет надежно моделировать удар между соударяющимися телами как при гармонической, так и стохастической внешней нагрузке и получить закон движения тел виброударной системы на всей временной оси, включая период удара. Это, в свою очередь, дает возможность в дальнейшем применить метод продолжения решения по параметру и построить кривую нагружения и амплитудно-частотные характеристики виброударной системы.

2. Применение метода проекции градиента с коррекцией невязки в ограничениях и разработанного программного комплекса обеспечивает оптимизацию параметров виброударной системы. Проанализировано влияние всех параметров присоединенного тела на амплитуду колебаний основной массы.

3. Динамический безударный гаситель колебаний основной массы эффективнее ударного гасителя одностороннего действия как при гармонической, так и при стохастической внешней нагрузке, действующей на основное тело.

Резюме

На основі числового аналізу встановлено, що введення в рівняння руху віброударної пружної системи сили контактної взаємодії, що змінюється за законом Герца, дозволяє надійно моделювати удар між тілами, що співударяються, як при гармонічному, так і стохастичному зовнішньому навантаженні. Це забезпечує отримання закону руху тіл віброударної системи на всій часовій вісі разом із періодом удару. Виконано числову оптимізацію параметрів віброударної системи методом проекції градієнта з корекцією нев'язки в обмеженнях. Проведено порівняльний аналіз ефективності динамічного та ударного гасителів коливальних систем.

1. *Бабицкий В. И.* Теория виброударных систем: Приближенные методы. – М.: Наука, 1978. – 352 с.
2. *Иванов А. П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Междунар. программа образования, 1997. – 336 с.
3. *Гуляев В. И., Баженов В. А., Кошкин В. Л.* Методы оптимизации в строительной механике. – Киев, 1988. – 192 с.
4. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. – М.: Стройиздат, 1965. – 448 с.
5. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 509 с.
6. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
7. *Диментберг М. Ф.* Нелинейные стохастические задачи механических колебаний. – М.: Наука, 1980. – 368 с.
8. *Гончаренко С. М., Погорелова О. С., Постникова Т. Г.* Моделивання динамічного руху віброударної системи з використанням сили контактної взаємодії // Вібрації в техніці та технологіях. – 2006. – № 2. – С. 20 – 27.
9. *Дехтярюк С. С., Погорелова О. С., Постникова Т. Г., Гончаренко С. М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд. – Київ: Київ. нац. ун-т будівництва і архітектури. – 2003. – Вип. 73. – С. 31 – 44.
10. *Корнев Б. Г., Зевин А. А., Резников Л. М.* Сравнительный анализ эффективности динамического и ударного гасителей колебаний. – М.: Строит. механика и расчет сооружений. – 1972. – № 3. – С. 38 – 41.

Поступила 25. 10. 2007