

Устойчивость неидеальных цилиндрических оболочек

Г. Д. Гавриленко

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Предложенная ранее на основе нелинейной теории оболочек методика приближенной оценки критических нагрузок оболочек используется для анализа влияния начальных несовершенств произвольной формы на параметры критических нагрузок. Результаты расчетов сравниваются с известными экспериментальными и теоретическими данными, соответствующими общей потере устойчивости оболочек и исчерпанию их несущей способности.

Ключевые слова: нелинейная теория, модели оболочек, несовершенства формы, критические нагрузки.

Введение. Значительное различие между теоретическими и экспериментально полученными критическими нагрузками обусловило необходимость разработки новых методов исследования процесса потери устойчивости.

Первые методики расчета гладких цилиндрических оболочек в линейной постановке базировались на идеализированной расчетной схеме [1–4]. Оболочка принималась геометрически совершенной и идеально упругой, исходное состояние – безмоментным.

Еще С. П. Тимошенко и С. В. Biezeno, как указано в [5], в задачах по прощелкиванию стержней и сферического купола использовали положения нелинейной теории. Затем L. H. Donnell [6] и K. Marguerite [7] окончательно сформулировали основы геометрически нелинейной теории для гладких оболочек. В [8, 9] установлен важный момент в поведении сжатых цилиндров: снижение нагрузки в закритической стадии деформирования.

В [10, 11] предпринималась попытка с помощью безмоментной линейной теории оболочек получить уточненные верхние критические нагрузки как теоретически, так и экспериментально. Несмотря на использование достаточно аккуратно изготовленных моделей, различие между теоретическими и экспериментальными критическими нагрузками оказалось весьма существенным [10, табл. 28]. В частности, для гладких оболочек экспериментальные значения критических нагрузок отличались от теоретических в два-три раза [10]. Чтобы добиться совпадения теории с экспериментом, исследовали ребристые оболочки [10, табл. 28 и 29]. В результате различие между теорией и экспериментом для оболочек с четырьмя шпангоутами и возрастающим числом стрингеров (24, 32, 40, 48) достигло более 70% (по отношению к средним экспериментальным величинам более 60%), т.е. минимальные теоретические критические нагрузки по-прежнему значительно превышали даже средние экспериментальные значения.

Устранить это различие попытались при исследовании партии оболочек со стрингерами и шпангоутами, которые имели существенно большие площади поперечных сечений, чем рассмотренные ранее [10, табл. 29]. В результате для гладких и шпангоутных оболочек минимальные теорети-

ческие значения напряжений оказались в два-три раза больше экспериментальных; для стрингерных оболочек экспериментальные значения в 1,9 ($k = 16$ стрингеров) и в 1,3 ($k = 64$) раза меньше теоретических; для стрингерно-шпангоутных оболочек теоретические значения в два раза превышали (для $k_1 = 4$ шпангоутов и $k = 16$ стрингеров) экспериментальные, и только при $k_1 = 4$ и $k = 64$ различие между этими значениями уменьшилось.

Еще одна попытка добиться совпадения теоретических значений критических нагрузок с экспериментальными для стрингерных и шпангоутных оболочек была предпринята в [11, табл. 9.4]. Для стрингерных оболочек минимальные теоретические значения превышали экспериментальные средние в 1,8–2,12 раза, для стрингерно-шпангоутных оболочек – в 1,57–1,94 раза.

Таким образом, в работах [10, 11] при использовании теории безмоментных оболочек значения критических нагрузок как в гладких, так и в ребристых оболочках оказались существенно выше экспериментальных. Авторы работы [11] отмечали, что для достижения совпадения теоретических значений критических нагрузок с экспериментальными необходимо применять нелинейную теорию и учитывать начальные несовершенства формы [10].

Первые фундаментальные исследования устойчивости несовершенных оболочек проводились в [12–14]. В работах [12, 14] экспериментально и теоретически изучалось влияние неправильностей формы общего вида на величину критической нагрузки при потере устойчивости продольно сжатой цилиндрической оболочки. Модели медных оболочек изготавливали электролитическим методом. В отличие от известных работ, авторы [13, 14] построили трехмерные графики измеренных начальных неправильностей формы поверхностей и кривые их роста при увеличении нагрузки.

При проведении большинства лабораторных экспериментов применяются очень тонкие оболочки ($r/t > 400$), и поэтому определение размеров их отклонений от правильной формы (несколько процентов толщины стенки оболочки) является очень трудной задачей, хотя авторы [13, 14] успешно с ней справились. Была разработана специальная экспериментальная программа и создано соответствующее оборудование, детально описанное в [15]. В случае общей потери устойчивости получено хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями критических нагрузок ($r/t > 800$).

Аналогичная методика для гладких и ребристых оболочек разработана в [16]. Ее использовали авторы работ [10, 17]. С помощью этой методики получено, что для гладких оболочек ($l/r = 1,95$, $r/t = 400$) различие между значениями теоретических и экспериментальных критических нагрузок составляет +9 и –17%. В [18] также теоретически исследована устойчивость гладких и стрингерных оболочек с учетом начальных несовершенств. При этом для гладких оболочек теоретические значения критических нагрузок превышали экспериментальные на 8...12%, для стрингерных (с уголкового профилем $6 \times 6 \times 0,5$ мм) – на 2...24%. Эти данные неоднократно использовались другими авторами [11, 19]. В [18] теоретические величины критических нагрузок (табл. 9.7) оказались выше экспериментальных максимум на 24%. Следовательно, с помощью методик [16, 18] можно получить

теоретические значения критических нагрузок, которые либо превышают экспериментальные данные, либо оказываются то выше, то ниже их. Детально сравнить эти результаты с данными, полученными другими авторами по нелинейной теории, невозможно, поскольку в [10, 11, 16–19] не указана форма начальных несовершенств.

Методика численной оценки критических нагрузок неидеальных моделей оболочек. Согласно методикам, предложенным в [13, 14, 16, 18], предполагается тщательный обмер поверхностей оболочек. Для получения гармонических компонент неправильностей формы в [13, 14] проводились измерения по всей поверхности оболочки в 2813 экспериментальных точках (число продольных точек 29, окружных – 97). В [16, 18] при измерении начальных отклонений в продольном направлении использовалось 17–18 узлов сетки, в окружном – 32 узла. В формулах для начальных прогибов было удержано 256 членов (128 по косинусам и 128 по синусам: 8 первых гармоник в продольном и 16 в окружном направлениях).

При решении задачи устойчивости во всех указанных исследованиях использовались только трехчленные аппроксимации функций для возмущенного состояния. Такой прием заранее приводит к завышенным значениям критических нагрузок, ибо ограничивает свободу перемещений точек поверхности. Ранее [20] описана методика расчета несовершенных гладких оболочек, не требующая ограничений на форму потери устойчивости. Кроме того, она учитывает все величины нелинейного напряженно-деформированного состояния оболочки.

Методика численного расчета на устойчивость несовершенных оболочек при нелинейном неоднородном докритическом состоянии [21, 22] применялась для решения различных задач [23–26]. В данной работе для расчета докритического состояния используются нелинейные дифференциальные уравнения типа Муштари–Доннелла–Власова. В расчетах на устойчивость применяются линеаризованные уравнения нейтрального равновесия. Решение задач о нелинейном докритическом состоянии и устойчивости получаем с помощью обобщенных уравнений равновесия и устойчивости в конечноразностной форме.

Исследуем продольно сжатую гладкую цилиндрическую оболочку несовершенной формы. В отличие от обычных циклически симметричных задач, когда в качестве расчетного участка можно использовать любой циклически симметричный участок, рассмотрим полную развертку поверхности оболочки.

Граничные условия таковы:

$$\sigma_{\alpha} = \text{const}; \quad w = 0; \quad v = 0; \quad M_x = 0, \quad (1)$$

т.е. на торцах постоянные напряжения σ_{α} , моменты, радиальные перемещения и перемещения в касательной плоскости отсутствуют.

Матрицы и детали процедуры расчетов описаны ранее [21, 22]. Указанная методика применялась при расчете оболочек, представленных в [13, 14]. При этом определены коэффициенты Фурье для измеренных начальных прогибов по формулам

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{mn} = \frac{2}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi r} w_0(x, y) \cos \frac{2m\pi x}{l} \cos \frac{ny}{r} dx dy; \\ B_{mn} = \frac{2}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi r} w_0(x, y) \cos \frac{2m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{r} dx dy; \\ C_{mn} = \frac{2}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi r} w_0(x, y) \sin \frac{2m\pi x}{l} \cos \frac{ny}{r} dx dy; \\ D_{mn} = \frac{2}{\pi l} \int_0^l \int_0^{2\pi r} w_0(x, y) \sin \frac{2m\pi x}{l} \sin \frac{ny}{r} dx dy, \end{array} \right. \quad (2)$$

где m – число полуволин по длине оболочки; n – число волн по окружности; $w_0(x, y)$ – величины начальных прогибов в точках замеров.

Сведения об оболочках [13] приведены в табл. 1, где E – модуль Юнга; $p = N/N_{cl}$; N – критическая нагрузка несовершенной оболочки; N_{cl} – критическая нагрузка идеальной оболочки, $N_{cl} = 0,605 EFt/r$ (F – площадь поперечного сечения оболочки); величины p_T , p_ε , p_0 относятся соответственно к решениям по предлагаемой в данной работе методике, экспериментальным результатам и решениям по методике [13]. Длина оболочек составляла 206 мм, радиус – 100 мм. База, на которой проведены измерения, равнялась 175 мм, т.е. на расстоянии 15 мм от краев оболочки. В табл. 1 отсутствует значение p_0 для оболочки А7 (авторы [13] ее не приводят), а для оболочки А12 не указано значение p_T , поскольку в литературных источниках об этой величине нет сведений.

Т а б л и ц а 1

Сведения о материале оболочек и параметрах критических нагрузок

Оболочка	$E \cdot 10^{-12}$, Па	t , мм	p_T	p_ε	p_0
А7	0,10736	0,112	0,5675	0,553/0,597	–
А8	0,10808	0,116	0,515	0,658	0,651
А9	0,10452	0,1135	0,59	0,734	0,827
А12	–	–	–	0,673	0,764

В табл. 2 представлены скорректированные данные работы [14] для $A(m, n) = A_{mn}/t$, $B(m, n) = B_{mn}/t$, $C(m, n) = C_{mn}/t$, $D(m, n) = D_{mn}/t$. Указанные величины [14] не отвечают результатам эксперимента, так как подвергались обработке с целью определения базы отсчета, т.е. так называемой “совершенной” оболочки, как указано в начале работы. Чтобы добиться совпадения расчетных данных с экспериментальными, вносились корректировка (в табл. 2 цифры в скобках). Это позволило добиться близкого совпадения формы сечения на развертке в окружном направлении для оболочек А7 (верхний край), А8 и А9 (нижние края) с экспериментально полученными формами сечений (рисунок). Сечения выбраны потому, что

они соответствуют максимальным амплитудам начальных прогибов в оболочках.

На рисунке для всех трех оболочек показаны формы прогибов на краях. Данные построены при нагрузках, близких к критическим: для А7 при $p = 0,56$, для А8 при $p = 0,515$, для А9 при $p = 0,59$. Как видно, форма всех оболочек в основном определяется начальными прогибами, ибо упругие прогибы весьма малы и суммарные прогибы близки по форме к начальным. Поэтому несущая способность указанных оболочек определяется в основном общей потерей устойчивости.

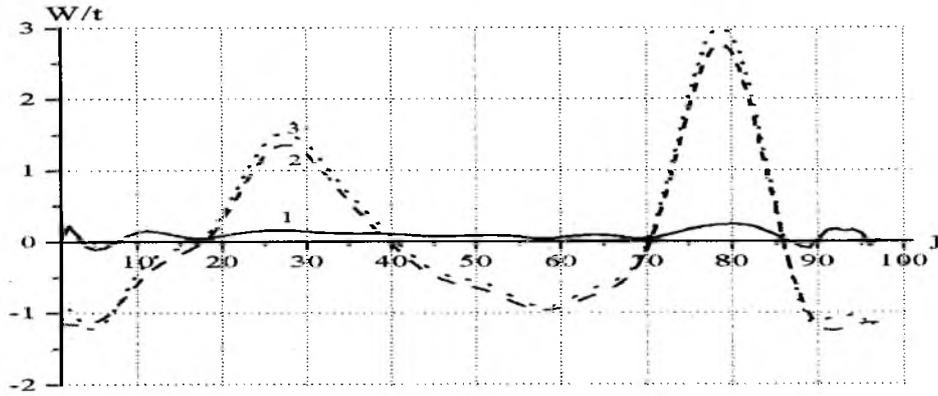
Т а б л и ц а 2

Главные компоненты начальных несовершенств формы оболочек

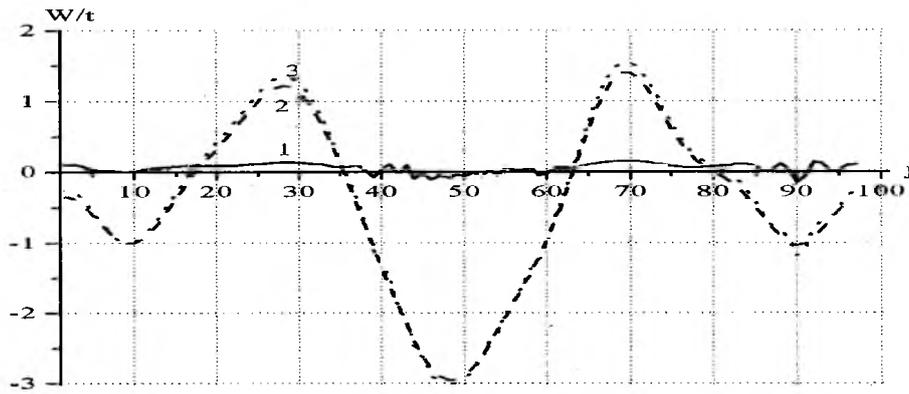
Оболочка А7		Оболочка А8				Оболочка А9	
$A(1, 2)$	(0,7)	$A(1, 1)$	(0,5)	$B(2, 3)$	-0,07252	$A(1, 2)$	(-0,2)
$A(0, 2)$	-0,40171	$A(1, 2)$	(-0,8)	$C(0, 6)$	0,09854	$A(0, 2)$	-0,15274
$A(0, 3)$	-0,45609	$A(0, 2)$	-0,61127	$D(1, 0)$	0,61062	$A(0, 3)$	0,15427
$A(0, 4)$	0,10324	$A(0, 3)$	0,65505	$D(2, 0)$	0,26611	$A(0, 6)$	-0,07760
$A(0, 5)$	0,19307	$A(0, 4)$	0,12821	$D(4, 0)$	0,07517	$B(1, 2)$	-0,31208
$A(0, 6)$	0,11413	$A(0, 6)$	0,08617	$D(1, 2)$	0,06527	$B(2, 2)$	-0,14532
$B(6, 2)$	-0,06327	$A(0, 7)$	0,13751	$D(1, 3)$	0,06120	$B(3, 2)$	-0,08739
$B(2, 3)$	-0,07913	$A(1, 0)$	0,10266	$D(1, 4)$	-0,17972	$C(1, 2)$	(0,5)
$C(1, 2)$	(0,4)	$A(2, 0)$	-0,19917	$D(1, 5)$	0,10175	$C(0, 1)$	(-0,4)
$C(0, 2)$	-0,24141	$A(3, 0)$	-0,07959	$D(2, 2)$	0,29195	$C(0, 2)$	(0,8)
$C(0, 3)$	0,14999	$A(4, 0)$	-0,08128	$D(3, 2)$	-0,10536	$C(0, 3)$	(0,3)
$C(0, 4)$	0,50396	$A(5, 0)$	-0,06254	$D(2, 5)$	0,07173	$C(0, 4)$	0,16388
$C(0, 5)$	0,12837	$A(6, 0)$	-0,06369			$C(0, 7)$	-0,08599
$C(0, 6)$	-0,16509	$A(7, 0)$	-0,07160			$D(1, 0)$	0,69449
$C(0, 7)$	(-0,1400)	$B(1, 2)$	-0,22114			$D(1, 2)$	-0,18336
$D(1, 0)$	0,06827	$B(1, 3)$	0,08688			$D(1, 3)$	0,11512
$D(2, 4)$	-0,06428	$B(1, 4)$	-0,11285			$D(1, 4)$	0,07450
		$B(2, 2)$	-0,06762			$D(2, 2)$	-0,09209

Из данных табл. 1 следует, что разброс экспериментальных величин p_3 находится в пределах 23% по отношению к минимальному параметру ($p_3 = 0,597$). Только в оболочке А7 обнаружена локальная потеря устойчивости (0,553), а затем общая (0,597). Теоретические величины p_0 либо почти совпали с экспериментальными p_3 (оболочка А8), либо оказались на 12...13% выше (оболочки А8 и А9). Разница между величинами p_T и p_3 для оболочки А7 составляет 2,6% при локальной потере устойчивости и 4,9% от p_3 верхнего при общей потере устойчивости, причем $p_T < p_{3\max}$; для оболочек А8 и А9 – 21 и 19% по отношению к соответствующему p_3 .

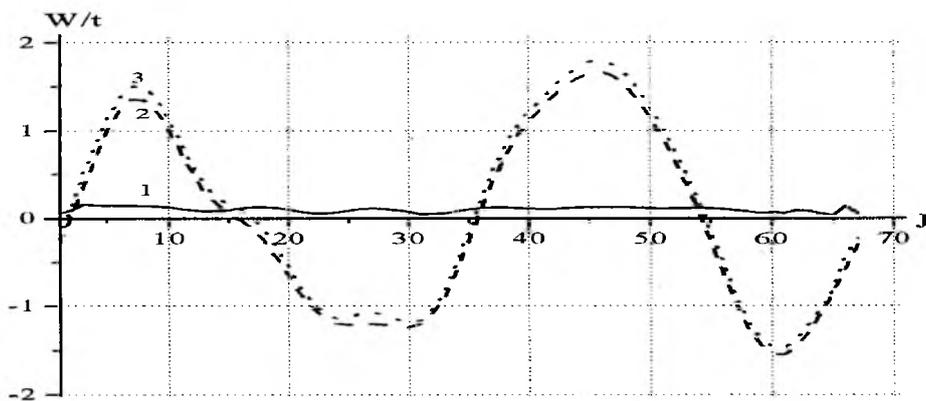
Величины p_T , определенные по предлагаемой методике, оказались меньше p_3 . Это принципиально важно, поскольку на практике следует оперировать значениями, которые определены в запас прочности. Величины, которые оказываются то выше, то ниже экспериментальных, не могут гарантировать их практическую значимость.



a



б



в

Распределение безразмерных прогибов по окружности оболочек: 1, 2, 3 – соответственно упругие, начальные и суммарные прогибы, J – число узлов сетки.

Заключение. Разработана методика численной оценки параметров критических нагрузок для оболочек с произвольными несовершенствами формы. Для моделей оболочек осуществлено сравнение полученных критических нагрузок с известными теоретическими и экспериментальными данными. Расчетные критические нагрузки меньше экспериментальных максимум на 21%, что дает оценку несущей способности этих оболочек в запас прочности. Данная методика позволяет уменьшить объем накапливаемой информации о несовершенствах, ограничиваясь анализом сечений и зон, где начальные прогибы максимальны. Расчеты с использованием максимальных начальных прогибов определяют нижний предел несущей способности реальных объектов.

Резюме

Запропонована раніше на основі нелінійної теорії оболонок методика наближеної оцінки критичних навантажень моделей оболонок використовується для аналізу впливу початкових недосконалостей довільної форми на параметри критичних навантажень. Результати розрахунків порівнюються з відомими експериментальними і теоретичними даними, що відповідають загальній втраті стійкості оболонок та вичерпанню їх несучої здатності.

1. Lorenz R. Die nicht achsensymmetrische Knickung dünnwandiger Hohlzylinder // Phys. Zeitschrift. – 1911. – **12**, No. 7. – P. 241 – 260.
2. Тимошенко С. П. Устойчивость стержней пластин и оболочек. – М.: Наука, 1971. – С. 457 – 472.
3. Southwell R. On the collapse of tubes by external pressure // Phil. Mag. – 1913. – Ser. 6. – **25**, No. 149. – P. 687 – 697.
4. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
5. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек. Итоги науки // Механика твердого деформируемого тела. – М.: Изд. ВИНТИ, 1969. – 348 с.
6. Donnell L. H. A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compression and bending // Trans. ASME. – 1934. – **56**. – P. 795 – 806.
7. Marguerre K. Theorie der gekrümmten Platte grosser Formänderung // Proc. 5th Int. Congr. on Applied Mechanics. – New York: J. Willey and Son, 1939. – P. 93 – 101.
8. Karman T. L. and Tsien H. S. The buckling of thin cylindrical shells under axial compression // J. Aeronaut. Sci. – 1941. – **8**, No. 8. – P. 303 – 312.
9. Donnell L. and Wan C. C. Effect of imperfections on buckling of thin cylinders and columns under axial compression // J. Appl. Mech. – 1950. – **17**, No. 1. – P. 73 – 83.
10. Амиро И. Я., Заруцкий В. А., Поляков П. С. Ребристые цилиндрические оболочки. – Киев: Наук. думка, 1973. – 248 с.

11. *Амиро И. Я., Заруцкий В. А.* Методы расчета оболочек. Т. 2. Теория ребристых оболочек. – Киев: Наук. думка, 1980. – 368 с.
12. *Hutchinson J.* Axial buckling of pressurized imperfect cylindrical shells // AIAA. – 1965. – **3**. – P. 1461 – 1466.
13. *Arbocz J. and Babcock C. D.* The effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells // J. Appl. Mech. – 1969. – Ser. E. – No. 1. – P. 28 – 38.
14. *Arbocz J. and Babcock C. D., Jr.* Experimental investigation of the effect of general imperfections on the buckling of cylindrical shells // NASA Contractor Report. – 1968. – CR-1163. – 75 p.
15. *Arbocz J.* The Effect of General Imperfections on the Buckling of Cylindrical Shells (PhD Thesis). – California Institute of Technology, 1962. – P. 1 – 50.
16. *Амиро И. Я., Поляков П. С., Паламарчук В. Г.* Устойчивость цилиндрических оболочек несовершенной формы // Прикл. механика. – 1971. – **7**, № 8. – С. 9 – 15.
17. *Заруцкий В. А.* Особенности потери устойчивости ребристых оболочек // Там же. – 2000. – **36**, № 5. – С. 3 – 32.
18. *Паламарчук В. Г., Поляков П. С.* О рациональном подкреплении стрингерной оболочки с начальными погибами // Там же. – 1976. – **12**, № 3. – С. 21 – 27.
19. *Заруцкий В. А.* О комплексных экспериментальных исследованиях устойчивости и колебаний конструктивно-неоднородных оболочек // Там же. – 2001. – **37**, № 8. – С. 38 – 67.
20. *Гавриленко Г. Д., Пальчевский А. С., Якубовский Ю. Е.* Определение критических нагрузок неидеальных моделей оболочек // Пробл. прочности. – 1985. – № 6. – С. 68 – 72.
21. *Гавриленко Г. Д.* Устойчивость ребристых цилиндрических оболочек при неоднородном напряженно-деформированном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1989. – 176 с.
22. *Гавриленко Г. Д.* Устойчивость ребристых оболочек несовершенной формы. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – 190 с.
23. *Gavrilenko G. D.* Stability of cylindrical shells with local imperfections of form // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 12. – P. 1496 – 1500.
24. *Gavrilenko G. D.* Stability and load-carrying capacity of ribbed shells with imperfections of form // Arch. Civil Eng. – 2003. – XLIX, **3**. – P. 255 – 264.
25. *Гавриленко Г. Д.* Влияние размещения дискретных ребер на устойчивость оболочек с локальной вмятиной // Докл. АН Украины. – 2003. – № 4. – С. 44 – 48.
26. *Gavrilenko G. D.* Development of numerical and experimental methods of carrying capacity estimation of shells & comparison theirs results // Stability of Structures (X Symp. 8–12 Sept.). – Zakopane, 2003. – P. 145 – 150.

Поступила 12. 12. 2005