УДК 539.3

Устойчивость ортотропных тонкостенных цилиндрических оболочек при кручении. Сообщение 1. Теория

А. И. Маневич, Е. Ф. Прокопало

Днепропетровский национальный университет, Днепропетровск, Украина

Методом разложения по малому параметру получено аналитическое решение задачи устойчивости ортотропной и конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки при кручении. Известное классическое решение представляет собой первое приближение для данного решения. Выполнен детальный численный анализ для изотропных и ортотропных оболочек. Показано, что для изотропных оболочек относительно малой и средней длины погрешность классического решения составляет 10...20%. Для ортотропных оболочек погрешность классического решения, как правило, больше, чем для изотропных, и может составлять 40%.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, ортотропная и изотропная оболочки, устойчивость, кручение.

Введение. Задачи устойчивости цилиндрической оболочки при кручении, относящиеся к числу классических задач теории устойчивости оболочек, рассматривались в работах E. Schwerin, L. H. Donnell, Х. М. Муштари, В. М. Даревского, П. Е. Товстика и др. Достаточно полный обзор исследований, посвященных этому вопросу, представлен в монографиях, обзорах и статьях [1–8]. Линейная задача устойчивости решалась методом Бубнова–Галеркина с использованием тригонометрических аппроксимаций формы перемещений и различных упрощений полных уравнений, а также методом асимптотического интегрирования.

В расчетной практике нашли применение те решения, которые приводят к достаточно простым конечным формулам. В работе [1] предложены расчетные формулы для шарнирно опертых и защемленных оболочек малой и средней длины. Простое решение для шарнирно опертых оболочек средней длины получено Х. М. Муштари, В. М. Даревским и другими на основе аппроксимации прогиба двумя тригонометрическими функциями вида

$$w = C[\sin(\theta_m \xi + n\varphi) - \sin(\theta_{m+2} \xi + n\varphi)], \tag{1}$$

где

$$\xi = \frac{x}{R}; \qquad \varphi = \frac{y}{R}; \qquad \theta_m = \frac{m\pi R}{L};$$

x, y – продольная и окружная координаты; R – радиус оболочки; n – число окружных волн; m – параметр, определяющий наклон образующихся при выпучивании волн к образующей. Это решение легко обобщается на случай ортотропных и конструктивно-анизотропных оболочек (G. Gerard, В. М. Даревский). Для ортотропной оболочки критическое значение касательного напряжения определяется по формуле [5]

$$\tau_{cr} = 0{,}74\frac{E_x^{3/8}E_y^{5/8}}{(1-\nu_x\nu_y)^{5/8}}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/4}\left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

где h, L – толщина и длина оболочки; E_x, E_y – модули упругости соответственно в продольном и кольцевом направлении; ν_x, ν_y – коэффициенты Пуассона, $E_x\nu_y = E_y\nu_x$.

Для конструктивно-анизотропной оболочки имеем [5]

$$\frac{N_{12}}{h} = 0{,}74\frac{E[\lambda_{11}^3\mu_{22}^5(1-\nu_{12}\nu_{21})^3]^{1/8}}{1-\nu^2}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/4}\left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}, \tag{3}$$

где N_{12} – сдвигающее усилие в оболочке; λ_{11}, μ_{22} – параметры, характеризующие мембранную жесткость B_{11} в продольном направлении и изгибную жесткость D_{22} в кольцевом.

Решения (2), (3) (далее будем называть их классическими) получены с использованием ряда упрощений, основанных на малости изменяемости прогиба в продольном направлении по сравнению с таковой в окружном. Такие упрощения могут приводить к заметной погрешности для относительно коротких оболочек, особенно для ортотропных и конструктивно-анизотропных. Для конструктивно-анизотропных оболочек из (3) получим, что на их устойчивость влияют не жесткости B_{22}, B_{12}, D_{11}, D_{33}, а B_{11} и D_{22}. Этот вывод, конечно, является следствием принятых упрощений. Представляет интерес уточнение решения, которое позволило бы более точно учитывать влияние относительной длины оболочки и всех мембранных и изгибных жесткостей. В [7] выполнено численное исследование и получены некоторые оценки влияния этих жесткостей на основе решения в рядах в зависимости от значения параметра Батдорфа.

В данной работе методом разложения по малому параметру получено аналитическое решение задачи устойчивости ортотропной и конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки, уточняющее решения (2), (3). По отношению к этому решению классические формулы представляют решение в первом приближении. Для изотропной оболочки выполнено детальное численное исследование полученного решения. Показано, что для изотропных оболочек относительно малой и средней длины погрешность классического решения составляет 10...20% (в сторону завышения критической нагрузки). Для ортотропных оболочек выполнен общий параметрический анализ. Погрешность классического решения для таких оболочек, как правило, больше, чем для изотропных, и может составлять 40%.

1. **Основные уравнения и решение для ортотропной оболочки**.

1.1. ***Исходные уравнения***. При решении линейной задачи устойчивости цилиндрической оболочки (в общем случае – конструктивно-ортотропной) под действием сдвигающих усилий N_{12} будем исходить из дифференциального уравнения устойчивости в виде [9] (уравнения, приведенные в [5], равносильны [9], но несколько отличаются по форме):

$$\nabla_2^4(\nabla_1^4 w + 2N_{12} w_{,xy}) + (\nabla_3^4 - \nabla_R)^2 w = 0, \tag{4}$$

где ∇_1^4, ∇_2^4, ∇_3^4, ∇_R – дифференциальные операторы,

$$\nabla_1^4 = D_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4};$$
$$\nabla_2^4 = \left(1 - \frac{B_{12}^2}{B_1 B_2}\right)^{-1} \left(\frac{1}{B_2} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2}{B_3} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{1}{B_1} \frac{\partial^4}{\partial y^4}\right); \tag{5}$$
$$\nabla_3^4 = K_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + K_3 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + K_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4}; \qquad \nabla_R = \frac{1}{R} w_{,xx}.$$

Выражения для жесткостных параметров D_i, B_i, K_i в общем случае конструктивно-ортотропной оболочки несимметричного строения (с эксцентричными ребрами) приведены в [9]. Для оболочки симметричного строения имеем $K_i = 0$ $(i = 1, \ldots, 3)$. Для ортотропной оболочки запишем

$$D_1 = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}; \qquad D_2 = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}; \qquad D_3 = \frac{h^3}{12}\left(\frac{\nu_x E_y}{(1 - \nu_x \nu_y)} + 2G\right);$$
$$B_1 = \frac{E_x h}{1 - \nu_x \nu_y}; \qquad B_2 = \frac{E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}; \qquad B_3 = \frac{2B_1 B_2 B_{33}}{B_1 B_2 - B_{12}^2 - 2B_{12} B_{33}}; \tag{6}$$
$$B_{12} = \frac{\nu_x E_y h}{1 - \nu_x \nu_y}; \qquad B_{33} = Gh; \qquad 1 - \frac{B_{12}^2}{B_1 B_2} = 1 - \nu_x \nu_y.$$

Функцию прогиба $w(x, y)$ принимаем в виде (1), полагая оболочку шарнирно опертой. Подставляя функцию (1) в (4) и приравнивая множители при одинаковых синусах к нулю, получаем выражения для критического усилия ортотропной оболочки:

$$N_{12} = \frac{1}{2\theta_m n R^2}\left[f_1(\theta_m, n) + \frac{\theta_m^4 R^2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{f_2(\theta_m, n)}\right];$$
$$N_{12} = \frac{1}{2\theta_{m+2} n R^2}\left[f_1(\theta_{m+2}, n) + \frac{\theta_{m+2}^4 R^2 (1 - \nu_1 \nu_2)}{f_2(\theta_{m+2}, n)}\right], \tag{7}$$

где

$$f_1(\theta_m, n) = D_1 \theta_m^4 + 2D_3 \theta_m^2 n^2 + D_2 n^4;$$
$$f_2(\theta_m, n) = \frac{1}{B_2}\theta_m^4 + \frac{2}{B_3}\theta_m^2 n^2 + \frac{1}{B_1} n^4. \tag{8}$$

Приравнивая правые части обоих уравнений (7), получаем уравнение для определения числа волн по кольцу n в зависимости от параметров оболочки и параметра m. Чтобы выделить функциональную часть этой зависимости и перейти к безразмерным величинам, первое уравнение (7) с учетом (6), (8) запишем в виде

$$\frac{N_{12}}{E_1 h}=\frac{1}{2mn}\frac{L}{\pi R}\left[\rho^2 f_1^0(\theta_m, n)+\frac{m^4}{f_2^0(\theta_m, n)}\left(\frac{\pi R}{L}\right)^4\right], \tag{9}$$

где

$$\rho^2=\frac{D_2}{B_1(1-\nu_1\nu_2)R^2}; \tag{10}$$

$$\begin{aligned} f_1^0(\theta_m, n)&=\frac{D_1}{D_2}\theta_m^4+\frac{2D_3}{D_2}\theta_m^2 n^2+n^4;\\ f_2^0(\theta_m, n)&=\frac{B_1}{B_2}\theta_m^4+\frac{2B_1}{B_3}\theta_m^2 n^2+n^4, \end{aligned} \tag{11}$$

и представим n^2 следующим образом:

$$n^2=\frac{\pi R}{L\sqrt{\rho}}n_0^2 \tag{12}$$

(как видно из приведенного ниже, n_0 – число (в первом приближении) при $\theta_m << n$, не зависящее от параметров оболочки).

Подставим (12) в (11) и затем в (9), в результате чего получим

$$\frac{N_{12}}{E_1 h}=\frac{\rho^{5/4}}{2mn_0}\left(\frac{\pi R}{L}\right)^{1/2}\left[\tilde{f}_1^0(m, n_0)+\frac{m^4}{\tilde{f}_2^0(m, n_0)}\right], \tag{13}$$

где

$$\tilde{f}_1^0(m, n_0)=\frac{D_1}{D_2}\left(\frac{\pi R}{L}\right)^2\rho m^4+\frac{2D_3}{D_2}\frac{\pi R}{L}\sqrt{\rho}m^2 n_0^2+n_0^4; \tag{14а}$$

$$\tilde{f}_2^0(m, n_0)=\frac{B_1}{B_2}\left(\frac{\pi R}{L}\right)^2\rho m^4+\frac{2B_1}{B_3}\frac{\pi R}{L}\sqrt{\rho}m^2 n_0^2+n_0^4. \tag{14б}$$

Из (7) следует, что, заменив m в правой части (13) $m+2$, ее величина не изменяется. Следовательно, получаем уравнение, определяющее n_0:

$$\frac{1}{m}\left[\tilde{f}_1^0(m, n_0)+\frac{m^4}{\tilde{f}_2^0(m, n_0)}\right]=\frac{1}{(m+2)}\left[\tilde{f}_1^0(m+2, n_0)+\frac{(m+2)^4}{\tilde{f}_2^0(m+2, n_0)}\right]. \tag{15}$$

Если в уравнении (15) пренебречь в функциях $\tilde{f}_1^0(m, n_0)$ и $\tilde{f}_2^0(m, n_0)$ (14) первыми двумя слагаемыми по сравнению с n_0^4, т.е. положить $\tilde{f}_1^0(m, n_0) = \tilde{f}_2^0(m, n_0) = n_0^4$, то получим приближенные решения [2–5] и, в частности, формулу (2) (после подстановки выражения n_0 через m в (13) и минимизации по m). Таким образом, эти приближенные решения основаны на малости параметра

$$\varepsilon = \frac{\pi R}{L}\sqrt{\rho} \tag{16}$$

по сравнению с n_0^2 (величина $\sqrt{\rho}$ для изотропной оболочки имеет порядок $\sqrt{h/R}$: $\sqrt{\rho} = \frac{1}{\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}}\sqrt{h/R}$). Отметим, что параметр ε связан с обычно используемым в теории оболочек “параметром подобия” χ [3, 4] простой зависимостью: $\varepsilon = 1/\chi$.

2. **Асимптотическое решение**. Для того чтобы получить более точное решение, разложим n_0^2 и уравнение (13) в ряд по ε, оставив лишь члены порядка $\varepsilon^0(=1)$ и ε^1 (члены порядка ε^2 отбрасываются, так как для изотропной оболочки ε^2 имеет порядок h/R). Представим n_0^2 в виде (b пока неизвестный коэффициент)

$$n_0^2 = \tilde{n}_0^2(1 + b\varepsilon + \ldots) \tag{17}$$

и запишем разложения

$$\begin{cases} \tilde{f}_1^0(m, n_0) = n_0^4 + \dfrac{2D_3}{D_2} m^2 n_0^2 \varepsilon + \ldots = \tilde{n}_0^4(1 + b\varepsilon)^2 + \\ + \dfrac{2D_3}{D_2} m^2 \tilde{n}_0^2(1 + b\varepsilon)\varepsilon + \ldots \approx \tilde{n}_0^4 + \left(2b\tilde{n}_0^4 + \dfrac{2D_3}{D_2} m^2 \tilde{n}_0^2\right)\varepsilon + \ldots; \\ \tilde{f}_2^0(m, n_0) = n_0^4 + \dfrac{2B_1}{B_3} m^2 n_0^2 \varepsilon + \ldots = \tilde{n}_0^4(1 + b\varepsilon)^2 + \\ + \dfrac{2B_1}{B_3} m^2 \tilde{n}_0^2(1 + b\varepsilon)\varepsilon + \ldots \approx \tilde{n}_0^4 + \left(2b\tilde{n}_0^4 + \dfrac{2B_1}{B_3} m^2 \tilde{n}_0^2\right)\varepsilon + \ldots; \\ \dfrac{1}{\tilde{f}_2^0(m, n_0)} = \dfrac{1}{\tilde{n}_0^4}\left[1 + \left(2b + \dfrac{2B_1}{B_3}\dfrac{m^2}{\tilde{n}_0^2}\right)\varepsilon + \ldots\right]^{-1} = \\ = \dfrac{1}{\tilde{n}_0^4}\left[1 - \left(2b + \dfrac{2B_1}{B_3}\dfrac{m^2}{\tilde{n}_0^2}\right)\varepsilon + \ldots\right]. \end{cases} \tag{18}$$

Заменив m в (18) $m+2$, получим аналогичные выражения для $\tilde{f}_1^0(m+2, n_0)$ и $\tilde{f}_2^0(m+2, n_0)$. Подставим эти выражения в уравнение (15) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях последнего. В результате получим решения в первом и втором приближениях.

2.1. ***Решение в первом приближении (классическое решение)***. Коэффициенты при членах порядка ε^0 входят в уравнение

$$(m+2)\left(\tilde{n}_0^4+\frac{m^4}{\tilde{n}_0^4}\right)=m\left[\tilde{n}_0^4+\frac{(m+2)^4}{\tilde{n}_0^4}\right],$$

откуда

$$\tilde{n}_0^8=F(m);\qquad F(m)=m(m+2)(3m^2+6m+4). \tag{19}$$

Подставим полученное значение $\tilde{n}_0$ в выражения (14), в которых в этом приближении остаются только последние слагаемые:

$$\tilde{f}_1^0(m,n_0)=\tilde{f}_2^0(m,n_0)=\sqrt{F(m)}.$$

Теперь эти выражения подставим в формулу для критического касательного усилия (13):

$$\frac{N_{12}^0}{E_1h}=\frac{\rho^{5/4}}{2}\left(\frac{\pi R}{L}\right)^{1/2}\Phi(m), \tag{20}$$

где

$$\Phi(m)=\frac{1}{m\sqrt[8]{F(m)}}\left[\sqrt{F(m)}+\frac{m^4}{\sqrt{F(m)}}\right]. \tag{21}$$

Значение параметра m определяется из условия минимума критической нагрузки, т.е. минимума $\Phi(m)$. Минимум легко находится численно, он достигается при $m_*=1{,}3768$ и равен $\Phi(m_*)=3{,}9807$. Из (19) имеем $F(m_*)=$ $=83{,}4428$, откуда $\tilde{n}_0=1{,}7384$, а формула (20) сводится к

$$\frac{N_{12}^0}{E_1h}=3{,}5278\left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}\rho^{5/4}. \tag{22}$$

Для ортотропной оболочки параметр ρ равен (из (10) и (6))

$$\rho=\frac{1}{\sqrt{12(1-\nu_1\nu_2)}}\sqrt{\frac{E_y}{E_x}\frac{h}{R}}. \tag{23}$$

После подстановки (23) в (22) получим классическое решение (2).

2.2. ***Решение во втором приближении***. Переходим ко второму приближению, которое позволяет определить b (17) и уточнить n_0 и критическое усилие.

Приравнивая в (15) после подстановки в него (18) коэффициенты при ε^1, находим

$$(m+2)\left[2b\widetilde{n}_0^4 + \frac{2D_3}{D_2}m^2\widetilde{n}_0^2 - \frac{m^4}{\widetilde{n}_0^4}\left(2b + \frac{2B_1}{B_3}\frac{m^2}{\widetilde{n}_0^2}\right)\right] =$$

$$= m\left[2b\widetilde{n}_0^4 + \frac{2D_3}{D_2}(m+2)^2\widetilde{n}_0^2 - \frac{(m+2)^4}{\widetilde{n}_0^4}\left(2b + \frac{2B_1}{B_3}\frac{(m+2)^2}{\widetilde{n}_0^2}\right)\right], \qquad (24)$$

откуда с учетом полученного из уравнения первого приближения равенства $\widetilde{n}_0^8 = F(m)$ (19) имеем

$$b = \frac{1}{2(3m^2 + 6m + 4)\sqrt[4]{F(m)}}\left(F(m)\frac{D_3}{D_2} - F_1(m)\frac{B_1}{B_3}\right), \qquad (25)$$

где

$$F_1(m) = 5m^4 + 20m^3 + 40m^2 + 40m + 16.$$

Если при вычислении b принять m равным значению, полученному в первом приближении ($m = 1{,}3768$), тогда

$$b = 0{,}7691\frac{D_3}{D_2} - 2{,}000766\frac{B_1}{B_3}.$$

В частности, для изотропной оболочки ($D_3/D_2 = 1$, $B_1/B_3 = 1$) имеем $b = -1{,}2316$. Чтобы получить более точное решение, учитывающее зависимость m от ρ, необходимо выражение для b как функции от m (25) подставить в (17) (вместе с $\widetilde{n}_0 = \sqrt[8]{F(m)}$), а затем полученное выражение для n_0^2 – в (18) и (13). Тогда для критического касательного усилия запишем выражение вида (20):

$$\frac{N_{12}^0}{E_1 h} = \frac{\rho^{5/4}}{2}\left(\frac{\pi R}{L}\right)^{1/2}\Phi_1(m, \varepsilon), \qquad (26)$$

где

$$\Phi_1(m, \varepsilon) = \frac{1}{mF^{5/8}(m)}\left\{F(m) + m^4 + \left[\frac{D_3}{D_2}F_2(m) - \frac{B_1}{B_3}F_3(m)\right]\varepsilon\right\}; \qquad (27)$$

$$F_2(m) = \frac{m^2(m+2)}{F^{1/4}(m)}(7m^3 + 21m^2 + 20m + 6); \qquad (28)$$

$$F_3(m) = \frac{m^2}{F^{3/4}(m)}\left[2m^4 + \frac{(m+2)F_1(m)}{\sqrt{F(m)}}(m^3 + 9m^2 + 12m + 6)\right]. \qquad (29)$$

Для каждого заданного ε значение m определяется из условия минимума $\Phi_1(m, \varepsilon)$ по m. Минимизация выполняется численно.

3. **Анализ уточненного решения**.

3.1. ***Изотропная оболочка***. Для изотропной оболочки параметр m и функция $\Phi_1(m, \varepsilon)$ зависят только от ε. Расчеты выполняли в пакете Maple в диапазоне ε (0; 0,2). Полученные численные результаты представлены в таблице, где даны значения m_* для точек минимума и соответствующие значения n_0, b и $\Phi_1(m_*, \varepsilon)$. Там же приведены отношения критической нагрузки N_{12} к классическому значению N_{12}^{cl}, определяемому формулой (2), т.е. полученному в первом приближении.

Зависимость параметров волнообразования и безразмерной критической нагрузки изотропной оболочки от параметра $\varepsilon = (\pi R/L)\sqrt{\rho}$

ε	m_*	n_0	b	$\Phi_1(m_*, \varepsilon)$	$\psi = N_{12}/N_{12}^{cl}$
0	1,377	1,738	−1,232	3,9810	1,0000
0,02	1,250	1,666	−1,237	3,9350	0,9779
0,04	1,145	1,602	−1,244	3,8640	0,9558
0,06	1,055	1,543	−1,254	3,8080	0,9337
0,08	0,975	1,488	−1,266	3,7300	0,9116
0,10	0,905	1,436	−1,279	3,6440	0,8895
0,15	0,738	1,304	−1,322	3,3955	0,8342
0,20	0,591	1,174	−1,380	3,1010	0,7790

Значения m_* и n_0 заметно уменьшаются с ростом ε; коэффициент $\Phi_1(m_*, \varepsilon)$ при критической нагрузке также изменяется, но значительно меньше, и в рассмотренном интервале ε для изотропной оболочки составляет не более 22%. Отметим, что коэффициент b также зависит от ε, но весьма слабо.

Результаты расчетов (таблица) можно с достаточной точностью аппроксимировать линейными зависимостями от ε (получены в пакете Maple методом наименьших квадратов, погрешность менее 3%):

$$m_* = 1{,}377 - 3{,}801\varepsilon; \qquad n_0 = 1{,}738 - 2{,}763\varepsilon;$$
$$\Phi_1(m_*, \varepsilon) = 3{,}981 - 4{,}328\varepsilon; \qquad \psi = 1{,}0 - 1{,}087\varepsilon. \tag{30}$$

Таким образом, критические значения касательных напряжений для изотропной оболочки во втором приближении определяются формулой (2) с поправочным множителем ψ, определяемым (30). С учетом (16) имеем

$$\tau_{cr} = 0{,}74\frac{E}{(1-\nu^2)^{5/8}}\left(\frac{h}{R}\right)^{5/4}\left(\frac{R}{L}\right)^{1/2}\left(1{,}0 - 1{,}087\frac{\pi R}{L}\sqrt{\rho}\right). \tag{31}$$

Подставляя в (31) выражение для ρ (23), окончательно запишем

$$\tau_{cr} = 0{,}74 \frac{E}{(1-\nu^2)^{5/8}} \left(\frac{h}{R}\right)^{5/4} \left(\frac{R}{L}\right)^{1/2} \left[1{,}0 - \frac{1{,}835}{(1-\nu^2)^{1/4}} \frac{R}{L} \left(\frac{h}{R}\right)^{1/2}\right]. \qquad (32)$$

Поскольку поправочный коэффициент всегда меньше единицы, уточненное значение критического напряжения ниже классического, полученного в первом приближении. Различие между решениями возрастает с уменьшением L/R и исчезает при $L/R \to \infty$. Уточненная зависимость критического напряжения τ_{cr} от параметра L/R несколько отличается от полученной по классическому решению: падение τ_{cr} с ростом L/R оказывается более медленным.

На рис. 1 приведена зависимость безразмерного критического касательного напряжения $\frac{\tau_{cr}}{E} \cdot 10^3$ от параметра L/R для изотропной оболочки при $R/h = 300$, построенная по формуле (32). Для сравнения там же нанесены результаты расчета по классическому решению (2) и по формуле Доннела для шарнирно опертой оболочки [1, 4].

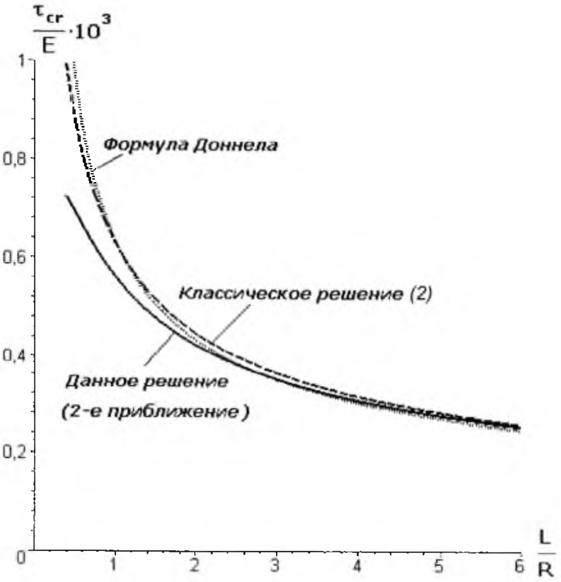

Рис. 1. Зависимость безразмерного критического касательного напряжения от относительной длины изотропной оболочки при $R/h = 300$, полученная по различным решениям.

Для достаточно коротких оболочек уточненное решение заметно отличается от классического, в частности, при $L/R = 2$; 1 и 0,5 на 5,5; 10,8 и 21,7% соответственно (для данного значения R/h). Очевидно, что погрешностью такой величины нельзя пренебрегать в практических расчетах.

С помощью формулы Доннела получены результаты, близкие к классическому решению, однако с ростом L/R значения τ_{cr} уменьшаются более быстро. В диапазоне малых длин L/R полученные по этой формуле значения τ_{cr} более завышены, чем по классическому решению; при достаточно больших значениях L/R критические напряжения по Доннелу оказываются несколько ниже, чем в данном решении.

3.2. ***Ортотропная оболочка***. Для ортотропной оболочки принято, что значение модуля сдвига G (в поверхности оболочки) выражается через модули упругости в продольном и поперечном направлении формулой

$$G = \frac{E_x E_y}{E_x + E_y + E_x \nu_y + E_y \nu_x}. \tag{33}$$

Тогда отношения жесткостей, входящие в основное уравнение второго приближения (24), выражаются через $\eta = E_x / E_y$ с помощью (6):

$$\frac{B_1}{B_3} = 0{,}5(1+\eta), \qquad \frac{D_3}{D_2} = \frac{\nu_x + \nu_y + 2}{1 + \nu_y + (1+\nu_x)/\eta}. \tag{34}$$

Следовательно, величины m_*, n_0 и $\Phi_1(m_*, \varepsilon)$ становятся функциями η (для данного ε). При рассмотрении влияния отношения η на поправочный коэффициент второго приближения $\psi = N_{12} / N_{12}^{cl}$ необходимо учитывать, что отношение модулей входит также в величину ρ (23), от которой зависит параметр ε (16). Обозначая соответствующие величины для оболочки с равными модулями упругости в обоих направлениях индексом “0”

$$\rho_0 = \frac{1}{\sqrt{12(1-\nu_x \nu_y)}} \frac{h}{R}; \qquad \varepsilon_0 = (\pi R / L)\sqrt{\rho_0}, \tag{35}$$

имеем

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{\eta}}; \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{\sqrt[4]{\eta}}.$$

Подставим выражение для ε вместе с (34) в формулу (27) и после некоторых преобразований получим

$$\Phi_1(m, \varepsilon) = \overline{\Phi}_1(m, \varepsilon_0) = \frac{1}{mF^{5/8}(m)} \{F(m) + m^4 + \Phi_2(m, \eta)(\eta)^{1/4} \varepsilon_0\}, \tag{36}$$

где

$$\Phi_2(m, \eta) = \left[\frac{\nu_x + \nu_y + 2}{\sqrt{\eta}(1+\nu_y) + \dfrac{1}{\sqrt{\eta}}(1+\nu_x)} F_2(m) - 0{,}5\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} + \sqrt{\eta}\right) F_3(m) \right]; \tag{37}$$

функции $F_2(m)$ и $F_3(m)$ определены выражениями (28), (29); функция $\Phi_2(m,\eta)$ обладает свойством симметрии относительно параметра $\eta = E_x/E_y$, она не изменяется при замене $\eta \Leftrightarrow 1/\eta$, т.е. $E_x \Leftrightarrow E_y$, поскольку одновременно происходит замена $\nu_x \Leftrightarrow \nu_y$. Тогда из (36) следует, что роль слагаемого, зависящего от ε_0, т.е. поправки второго приближения, возрастает при $E_x/E_y > 1$.

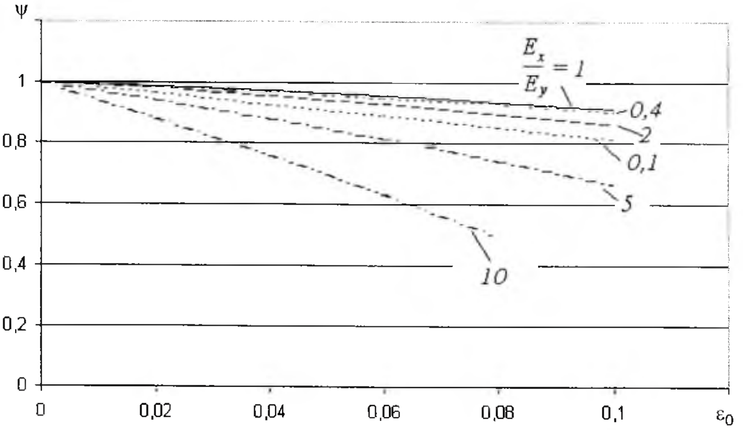

Рис. 2. Зависимость отношения критической нагрузки (во втором приближении) к классическому значению $\psi = N_{12}/N_{12}^{cl}$ от параметра ε_0 для различных E_x/E_y.

На рис. 2 представлена зависимость отношения критической нагрузки (во втором приближении) к классическому значению $\psi = N_{12}/N_{12}^{cl}$, т.е. $\Phi_1(m_*,\varepsilon)/\Phi_1(m_*,0)$, от параметра ε_0 для различных E_x/E_y. При больших значениях E_x/E_y (порядка 5–10) поправка второго приближения может достигать 30...40% и более, в то время как в случае очень малых E_x/E_y она также возрастает по сравнению со случаем $E_x/E_y = 1$, но все же намного меньше, чем для больших E_x/E_y.

Выводы

1. Получено уточненное аналитическое решение задачи устойчивости изотропной, ортотропной и конструктивно-ортотропной цилиндрической оболочки при кручении (для шарнирно опертых краев), учитывающее отбрасываемые в классическом решении “малые” слагаемые.

2. В случае оболочек средней и малой длины погрешность классического решения для изотропных оболочек составляет порядка 10...20%, для ортотропных – до 40% и более.

3. Погрешность классического решения возрастает с увеличением отношения модулей упругости E_x/E_y в продольном и кольцевом направлении.

Резюме

Методом розкладу за малим параметром отримано аналітичний розв’язок задачі стійкості ортотропної і конструктивно-ортотропної циліндричної оболонки при крутінні. Відомий класичний розв’язок є першим наближенням для даного розв'язку. Виконано детальний числовий аналіз для ізотропних та ортотропних оболонок. Показано, що для ізотропних оболонок відносно малої та середньої довжини похибка класичного розв'язку складає 10...20%. Для ортотропних оболонок похибка класичного розв'язку, як правило, більша, аніж для ізотропних, і може сягати 40%.

1. *Donnell L.* Stability of Thin Walled Tubes under Torsion // NACA Report. – 1933. – No. 479.
2. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Гос. изд.-во физ.-мат. лит., 1967. – 984 с.
3. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость круговых цилиндрических оболочек // Итоги науки. Серия "Механика". – М.: ВИНИТИ, 1969. – 348 с.
4. *Григолюк Э. И., Кабанов В. В.* Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
5. *Кабанов В. В.* Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек. – М.: Машиностроение, 1982. – 256 с.
6. *Fung Y. C. and Sechler E. E.* Instability of thin elastic shells // Structural Mechanics: Proc. 1st Symp. Naval Structural Mechanics (Stanford University, 1958). – New York: Pergamon Press, 1960. – P. 115 – 168.
7. *Simitses G. J.* Instability of orthotropic cylindrical shells under combined torsion and hydrostatic pressure // AIAA J., 1967. – **5**, No 8. – P. 1463 – 1469.
8. *Товстик П. Е.* Некоторые задачи устойчивости цилиндрических и конических оболочек // Прикл. математика и механика. – 1983. – **47**, вып. 5. – С. 815 – 822.
9. *Маневич А. И.* Устойчивость и оптимальное проектирование подкрепленных оболочек. – Киев; Донецк: Вища шк., 1979. – 152 с.

Поступила 08. 11. 2006