

## Трехмерная задача динамики подвеса поплавкового гироскопа

В. В. Карачун<sup>а</sup>, Я. Ф. Каюк<sup>б</sup>, В. Н. Мельник<sup>а</sup>

<sup>а</sup> Национальный технический университет Украины “Киевский политехнический институт”, Киев, Украина

<sup>б</sup> Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

*Анализируется динамика подвеса поплавкового гироскопа. Строится расчетная модель и аналитически описывается напряженно-деформированное состояние поверхности поплавка. Рассматривается в общем случае произвольно очерченная линия меридиана, что позволяет как частный случай описывать динамику выпуклой, вогнутой и цилиндрической поверхностей поплавка. Объяснена природа возникновения дополнительной погрешности гироскопа под действием проникающего акустического излучения.*

**Ключевые слова:** поплавковый гироскоп, координатные функции, линия меридиана, парциальные частоты, оболочка, инерциальные навигационные системы, гиросtabilизированная платформа.

**Введение.** Поплавковые гироскопы широко используются в системах инерциальной навигации благодаря многофазному подвесу, что позволяет практически устранить сухое трение на выходной оси, улучшить демпфирующие свойства и повысить виброустойчивость приборов. Техническая реализация двухступенного поплавкового дифференцирующего (или интегрирующего) гироскопа представляет собой герметично заключенный в поплавок гироагрегат, погруженный в тяжелую фтор- или хлорорганическую жидкость. Поплавок может иметь положительную, отрицательную либо нулевую плавучесть [1]. Эти приборы используются не только в системах инерциальной навигации, но и в качестве пилотажного оборудования, например, в блоке демпфирующих гироскопов.

Проведенные в последнее время исследования подтвердили факт возмущающего воздействия проникающего акустического излучения на командно-измерительные комплексы летательных аппаратов, в частности, сводя к нулю достоинства идеи взвешивания гироузла. Причиной этого является возникновение акустической вибрации подвеса под действием звуковых волн, что приводит к ухудшению паспортных характеристик изделия [2, 3]. Особенно нежелательно это влияние в сложных системах, например в трехосных гиросtabilизированных платформах, где поплавковый гироскоп выступает в роли чувствительного элемента системы коррекции [4].

Таким образом, инжектируемая в окружающую среду энергия двигательных установок той своей частью, которая реализуется в виде проникающего акустического излучения, будет оказывать нежелательное влияние на навигационное оборудование и приборы управления, вплоть до возникновения особенностей резонансного типа – волновое совпадение, пространственно-частотный резонанс [5]. В первом случае это приводит к появлению дополнительных погрешностей навигационного оборудования, во втором – к систематическому дрейфу главной оси с последующей потерей одной степени свободы (гироскоп направления).

**Постановка задачи.** Чтобы детально проанализировать природу упругого взаимодействия подвеса гироскопа (поплавка) с акустическим воздействием, необходимо составить его дифференциальные уравнения и изучить в общем случае трехмерную задачу. В качестве исходного примем предположение об однородности и изотропности материала поплавка, соответствующее закону Гука. Перемещения точек боковой поверхности поплавка полагаем существенно меньшими его толщины, что позволяет построить наиболее простой вариант линейной теории.

Широкое использование при технической реализации многих элементов бортовой аппаратуры различных типов оболочек способствовало развитию достаточно простых, но эффективных методов их расчета [6–8].

Приближенный подход состоит в том, что трехмерная задача сводится к более простой – задаче о равновесии и деформации срединной поверхности оболочки. Упрощение реализуется путем принятия соответствующих статико-геометрических гипотез. Этот простейший вариант теории основан на использовании гипотез Кирхгофа–Лява, которые подразумевают:

перпендикулярность и прямоугольность волокон оболочки к срединной поверхности после деформации при неизменной их длине;

пренебрежимо малые значения нормальных напряжений на площадках, параллельных срединной поверхности, по сравнению с напряжениями на перпендикулярных к ней площадках.

**Линейные дифференциальные уравнения оболочки. Внешние возмущения общего вида.** Предположим, что оболочка относится к криволинейным ортогональным координатам  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . Обозначим через  $A_1$  и  $A_2$  параметры Ламе срединной поверхности оболочки. Тогда, добавив силы инерции, можем воспользоваться уравнениями равновесия оболочки, которые в развернутом виде записываются следующим образом [9]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial A_2 T_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 S}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{R_1} \left( \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_1} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \left( \frac{A_1 H}{R_1} \right) + \frac{1}{R_2} \frac{\partial A_1 H}{\partial \alpha_2} = -A_1 A_2 q_1 + \rho A_1 A_2 h \frac{\partial^2 U_1}{\partial t^2}; \\ & \frac{\partial A_1 T_2}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 S}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 T_1}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{R_2} \left( \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 M_1}{\partial \alpha_2} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( \frac{A_2 H}{R_2} \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial A_2 H}{\partial \alpha_1} = -A_1 A_2 q_2 + \rho A_1 A_2 h \frac{\partial^2 U_2}{\partial t^2}; \\ & \frac{T_1}{R_1} + \frac{T_2}{R_2} - \frac{1}{A_1 A_2} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \frac{1}{A_1} \left( \frac{\partial A_2 M_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1^2 H}{\partial \alpha_2} - \frac{\partial A_2 M_2}{\partial \alpha_1} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{\partial}{\partial \alpha_2} \frac{1}{A_2} \left( \frac{\partial A_1 M_2}{\partial \alpha_2} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2^2 H}{\partial \alpha_1} - \frac{\partial A_1 M_1}{\partial \alpha_2} \right) \right\} = q_n + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \end{aligned} \right. \quad (1)$$

где

$$q_1 = p_1 + \frac{m_1}{R_1} \approx p_1; \quad q_2 = p_2 + \frac{m_2}{R_2} \approx p_2;$$

$$q_n = p_n + \frac{1}{A_1 A_2} \left( \frac{\partial A_2 m_1}{\partial \alpha_1} + \frac{\partial A_1 m_2}{\partial \alpha_2} \right) \approx p_n,$$

ибо в большинстве случаев величины  $m_i$  имеют порядок  $hr$ , так что, отождествляя  $q_i$  и  $p_i$ , тем самым отбрасываются слагаемые порядка  $h/R$  по сравнению с единицей;  $T_1, T_2$  – нормальные усилия;  $S$  – касательное усилие;  $M_1, M_2$  – изгибающие моменты;  $H$  – крутящий момент;  $\rho$  – плотность материала оболочки;  $h$  – толщина оболочки;  $u_i$  – упругие перемещения точек срединной поверхности в направлении координаты  $\alpha_i$ .

В представленном виде уравнения (1) использовать неудобно. Поэтому целесообразно провести ряд преобразований, после которых записать их в форме, приемлемой для интегрирования.

**Оболочка произвольного очертания.** Оболочка вращения произвольного очертания образуется при вращении любой кривой вокруг выбранной оси симметрии. Предполагаем, что эта кривая не пересекает ось вращения (рис. 1). Опорная (инерциальная) и связанная системы координат изображены на рис. 1, где приняты следующие обозначения:  $r = f(z)$  – кривая вращения;  $r$  – расстояние от оси вращения до рассматриваемой точки  $M$ .

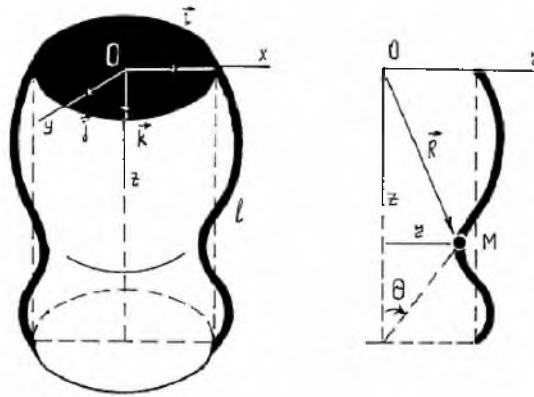


Рис. 1. Поплавок в виде оболочки вращения произвольного очертания.

Длину оболочки примем равной  $l$ . Тогда  $z \in [0, l]$ . Пусть  $\varphi$  – координата, определяющая положение точки  $M$  на параллели. Тогда для бесконечно малого расстояния между двумя точками по срединной поверхности оболочки можно записать соотношение

$$dS^2 = dS_1^2 + dS_2^2,$$

где  $dS_1, dS_2$  – дифференциалы дуги по меридиану и вдоль параллели соответственно.

Поскольку

$$dS_1^2 = [1 + f'^2(z)]dz^2;$$

$$dS_2^2 = r^2 d\varphi^2 = [f(z)]^2 d\varphi^2,$$

получим

$$dS^2 = [1 + f'^2(z)]dz^2 + [f(z)]^2 d\varphi^2, \quad (2)$$

откуда следует, что в качестве координат  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  целесообразно выбрать  $\alpha_1 = z$ ;  $\alpha_2 = \varphi$ .

Тогда

$$A_1 = \sqrt{1 + f'^2(z)}; \quad A_2 = f(z). \quad (3)$$

В качестве координат  $\alpha_i$  можно выбрать также другие криволинейные координаты.

Запишем уравнения движения оболочки в координатах  $\alpha_1 = z$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ , осуществив при этом в уравнениях (1) соответствующие замены в обозначениях:

$$U_1 \Rightarrow U_z; \quad U_2 \Rightarrow U_\varphi; \quad W \Rightarrow W; \quad \alpha_1 \Rightarrow z; \quad \alpha_2 \Rightarrow \varphi; \quad \frac{\partial}{R(1+\xi)\partial\varphi} = \frac{\partial}{\partial S}.$$

С учетом изложенного уравнения (1) примут иной вид, если для конкретности оболочку полагать вогнутой или выпуклой [10]:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} - (1 + 2\nu)\xi'(z) \frac{\partial U_z}{\partial z} + [(1 + \nu\mu)\xi'^2(z) - \nu\xi''(z)]U_z + \\ & + \frac{1}{R(1+\xi)} \left[ \frac{1+\nu}{2} + \nu(1+\mu)\xi(z) \right] \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial \varphi} - \\ & - \frac{1}{R(1+\xi)} \left\{ -[(1+\nu)\mu + 3\mu^2]\xi'(z)W + (\mu + \nu) \frac{\partial W}{\partial z} \right\} = \\ & = \frac{1-\nu^2}{Eh} [1 + 2\mu\xi(z)] \left( -q_1 + \rho h \frac{\partial^2 U_z}{\partial t^2} \right); \\ & \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial s^2} + \frac{1}{2}(1+\nu)[1 - (1+\mu)\xi(z)] \frac{\partial^2 U_z}{\partial z \partial s} - \\ & - \frac{1}{2}(1-\nu)[1 - 2(1+\mu)\xi(z)] \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z^2} - \\ & - \frac{1}{2}(1-\nu)(1+\mu)\xi'(z) \frac{\partial U_\varphi}{\partial z} - \\ & - \frac{1}{2}(3-\nu)\xi'(z) \frac{\partial U_z}{\partial s} + \frac{1}{2}(1-\nu)\xi''(z)U_\varphi - \end{aligned} \right. \quad (4a)$$

$$\begin{aligned}
& \left[ -\frac{1}{R(1+\zeta)} \left\{ 1 + \nu\mu - [(1+\nu)\mu + 3\nu\mu^2] \xi(z) + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left[ (1+3\nu)\mu^2 + \frac{15}{2}\nu\mu^3 \right] \xi^2(z) \right\} \frac{\partial W}{\partial s} = \right. \\
& = [1 - \xi(z)]^2 \left( -q_2 + \rho h \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial t^2} \right) \frac{1 - \nu^2}{Eh}; \\
& - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 - \nu)[2 + \xi(z)] \frac{\partial^3 W}{\partial z \partial s^2} + [1 + 2(1 - \nu)\xi'(z)] \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \right. \\
& \left. + \nu \xi'(z) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} + \frac{1 - \nu}{R(1 + \zeta)} [1 + \mu(\mu - 2)\xi(z)] \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial s} \right\} - \\
& - \frac{\partial^4 W}{\partial s^4} - \nu \frac{\partial^4 W}{\partial z^2 \partial s^2} + \mu \xi'(z) \frac{\partial^3 W}{\partial z^3} + [1 + \mu(1 - \nu)] \xi'(z) \frac{\partial^3 W}{\partial z \partial s^2} - \quad (46) \\
& - \mu(\nu + \mu) \xi'^2(z) \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - (\nu + \mu) \mu \xi'(z) \xi''(z) \frac{\partial W}{\partial z} - \\
& - \frac{1}{R(1 + \zeta)} [1 + (2 + \mu^2)\xi(z)] \frac{\partial^3 U_\varphi}{\partial s^3} - \frac{\nu\mu}{R(1 + \zeta)} \frac{\partial^3 U_z}{\partial z \partial s^2} + \\
& + \frac{\mu^2 \xi'(z)}{R(1 + \zeta)} \frac{\partial^2 U_z}{\partial z^2} + \frac{\mu(1 - \nu)}{R(1 + \zeta)} \xi'(z) \frac{\partial^2 U_\varphi}{\partial z \partial s} + \\
& + \frac{12}{h^2} \left[ \frac{\mu + \nu}{R(1 + \zeta)} \frac{\partial U_z}{\partial z} + \frac{1 + \mu\nu}{R(1 + \zeta)} \frac{\partial U_\varphi}{\partial s} - \frac{1 + \mu\nu}{R(1 + \zeta)} \xi'(z) U_z \right] = \\
& = -\frac{1}{D} [1 - (1 - \mu)\xi(z)] \left( q_3 + \rho h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \right),
\end{aligned}$$

где  $\xi(z) = \frac{\delta}{R + \delta} \left( \frac{2z}{l} - 1 \right)^2$ ;  $\mu = 8s(1 + s)\eta^2$ ;  $2\mu \ll 1$ ;  $\eta = \frac{R}{l}$ ;  $s = \frac{\delta}{R} \ll 1$ ;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $E$  – модуль Юнга;  $\delta$  – величина подъема линии меридиана оболочки.

Если принять  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = R = \text{const}$ ,  $\delta = 0$ , то получим уравнения цилиндрической оболочки.

**Приближенный метод интегрирования.** Метод изложим в общем виде, что позволит получить частные случаи.

Предположим, что поверхность поплавок нагружена произвольным внешним динамическим воздействием (распределенным или сосредоточенным: в точке, по линии, по площади и т.п.) и на его краях ( $z = 0$ ,  $z = 1$ ) заданы некоторые граничные условия: кинематические, геометрические или силовые.

Суть предлагаемого метода состоит в следующем:

проводится процедура разделения переменных в уравнениях движения с помощью метода Фурье;

затем используется метод Бубнова–Галеркина.

Поскольку рассматриваются замкнутые оболочки вращения, в окружном направлении (вдоль параллели) следует ожидать периодичности силовых, кинематических полей, т.е. они должны определенным образом зависеть от периодических функций типа  $\cos k\varphi$ ,  $\sin k\varphi$  ( $k = 0, 1, \dots$ ). Поэтому нагрузки

$$q_i^* = q_i^*(t, z, \varphi), \quad i = \overline{1, 3}$$

можно представить в виде рядов Фурье по координате  $\varphi$ :

$$q_i^* = q_i^*(t, z, \varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} [q_{i,k}^{(1)}(t, z) \cos k\varphi + q_{i,k}^{(2)}(t, z) \sin k\varphi], \quad i = \overline{1, 3}. \quad (5)$$

В соответствии с (5) координатные функции запишем так:

$$U_z = U_z(t, z, \varphi);$$

$$U_\varphi = U_\varphi(t, z, \varphi);$$

$$W = W(t, z, \varphi).$$

Вначале представим их в виде

$$U_z = \sum_{k=0}^{\infty} [U_{z,k}^{(1)}(t, z) \cos k\varphi + U_{z,k}^{(2)}(t, z) \sin k\varphi]; \quad (6)$$

$$U_\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} [U_{\varphi,k}^{(1)}(t, z) \sin k\varphi + U_{\varphi,k}^{(2)}(t, z) \cos k\varphi]; \quad (7)$$

$$W = \sum_{k=0}^{\infty} [W_k^{(1)}(t, z) \cos k\varphi + W_k^{(2)}(t, z) \sin k\varphi]. \quad (8)$$

Подставим соотношения (5)–(8) в уравнения движения (4), сгруппируем слагаемые, содержащие одинаковые гармоники  $\cos k\varphi$ ,  $\sin k\varphi$ , и приравняем их к нулю. При этом следует отдельно записать равенства для  $k = 0$ ,  $k = 1$  и  $k \geq 2$ . Если  $k = 0$ , имеет место осесимметричное деформирование,  $k = 1$  соответствует антисимметричной динамической деформации,  $k \geq 2$  – циклически деформируемому случаю.

Схему реализации метода проиллюстрируем на уравнениях (4). Исканые функции аппроксимируем в общем виде

$$\begin{aligned}
U_{z,k}^{(s)} &= \sum_{j=0}^{\infty} A_{z,j}^{(sk)}(t) U_{z,j}^{(sk)}(z); \\
U_{\varphi,k}^{(s)} &= \sum_{j=0}^{\infty} B_{\varphi,j}^{(sk)}(t) U_{\varphi,j}^{(sk)}(z); \\
W_k^{(s)} &= \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(sk)}(t) W_j^{(sk)}(z),
\end{aligned} \tag{9}$$

где использованы такие значения:

$$s = \overline{1, 2}; \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad \{U_{z,j}^{(sk)}(z)\}, \{U_{\varphi,j}^{(sk)}(z)\}, \{W_j^{(sk)}(z)\} \tag{10}$$

– множества координатных функций в направлении координаты  $z$ , полные и независимые в интервале  $(0, 1)$ .

В случае применения метода Бубнова–Галеркина предполагается, что аппроксимации вида (9) удовлетворяют всем (кинематическим и силовым) граничным условиям при  $z = 0$ ,  $z = 1$ . (Какой конкретный вид должны иметь граничные условия для функций  $U_{z,k}^{(s)}$ ,  $U_{\varphi,k}^{(s)}$  и  $W_k^{(s)}$  на краях оболочки, т.е. при  $z = 0$  и  $z = 1$ , является предметом дальнейших исследований.) Вместе с тем можно отметить, что концы оболочки ( $z = 0$ ,  $z = 1$ ) свободны от закреплений и это усложняет проблему выбора функций (10).

Изначально в соотношения (9) введем функции  $\omega(z)$  Кравчука, с помощью которых можно удовлетворить любым граничным условиям.

Применительно к нашей задаче – это функции типа

$$z^m (1-z)^n, \tag{11}$$

где  $m, n$  – целые (неотрицательные) числа.

Таким образом,

$$\begin{cases}
U_{z,j}^{*(sk)}(z) = z^{m_1} (1-z)^{n_1} U_{z,j}^{(sk)}(z); \\
U_{\varphi,j}^{*(sk)}(z) = z^{m_2} (1-z)^{n_2} U_{\varphi,j}^{(sk)}(z); \\
W_j^{*(sk)}(z) = z^{m_3} (1-z)^{n_3} W_j^{(sk)}(z).
\end{cases} \tag{12}$$

Проинтегрируем дифференциальные уравнения (4), подставив в них аппроксимации вида

$$U_{z,k}^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{z,j}^{(10)}(t) U_{z,j}^{*(10)}(z); \quad U_{\varphi,k}^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} B_{\varphi,j}^{(10)}(t) U_{\varphi,j}^{*(10)}(z); \tag{13}$$

$$W_k^{(1)} = \sum_{j=0}^{\infty} C_j^{(10)}(t) W_j^{*(10)}(z). \quad (14)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{\infty} \left[ A_{z,j}^{(10)}(t) \frac{\partial^2 U_{z,j}^{*(10)}(z)}{\partial z^2} - A_{z,j}^{(10)}(t) \frac{\partial U_{z,j}^{*(10)}}{\partial t} a_1(2z-1) - \right. \\ & \left. - A_{z,j}^{(10)}(t) a_2 U_{z,j}^{*(10)}(z) - a_4 c_1^{(10)}(t) \frac{\partial W_j^{*(10)}}{\partial z} \right] = \\ & = - [1 + \alpha_1(2z-1)^2] q_{1,0}^{(1)}(t, z) + \alpha^2 [1 + \alpha_1(2z-1)^2] \sum_{j=0}^{\infty} \ddot{A}_{z,j}^{(10)}(t) U_{z,j}^{(10)}(z). \quad (15) \end{aligned}$$

Умножив (15) на произвольную функцию  $U_{z,p}^{(10)}(z)$  и проинтегрировав от 0 до 1, получим систему обычных дифференциальных уравнений для определения амплитудных коэффициентов:

$$\sum_{j=0}^{\infty} [a_{z,jp}^{(10)} \ddot{A}_{z,j}^{(10)}(t) + b_{z,jp}^{(10)} A_{z,j}^{(10)}(t) + c_{jp}^{(10)} C_1^{(10)}(t)] = Q_p^{(10)}(t), \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (16)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{z,jp}^{(10)} &= \alpha \int_0^1 U_{z,j}^{*(10)}(z) U_{z,p}^{*(10)} dz; \\ b_{z,jp}^{(10)} &= - \int_0^1 \frac{\partial^2 U_{z,j}^{*(10)}(z)}{\partial z^2} U_{z,p}^{*(10)} dz + a_1 \int_0^1 \frac{\partial U_{z,j}^{*(10)}}{\partial z} (2z-1) U_{z,p}^{*(10)} dz + \\ & \quad + a_2 \int_0^1 U_{z,j}^{*(10)} U_{z,p}^{*(10)} dz; \\ c_{jp}^{(10)} &= a_4 \int_0^1 \frac{\partial W_j^{*(10)}}{\partial z} U_{z,p}^{*(10)} dz; \\ Q_p^{(10)}(t) &= \int_0^1 [1 + \alpha_1(2z-1)^2] q_{10}^{*(10)}(t, z) U_{z,p}^{*(10)} dz; \end{aligned}$$



$$\sum_{j=0}^{\infty} [a_{z,jp}^{(11)} \ddot{A}_{z,j}^{(11)}(t) + b_{z,jp}^{(11)} A_{z,j}^{(11)} - b_{\varphi,jp}^{(11)} B_{\varphi,j}^{(11)} + c_{jp}^{(11)} C_j^{(11)}] = Q_p^{(11)}(t), \quad (17)$$

$$p = 1, 2, \dots,$$

ГДЕ

$$a_{z,jp}^{(11)} = \alpha \int_0^1 [1 + \alpha_1(2z-1)^2] U_{z,j}^{*(11)} U_{z,p}^{*(11)} dz;$$

$$b_{z,jp}^{(11)} = \int_0^1 \left[ a_1(2z-1) \frac{\partial U_{z,j}^{*(11)}}{\partial z} + a_2 U_{z,j}^{*(11)} \right] U_{z,p}^{*(11)} dz;$$

$$b_{\varphi,jp}^{(11)} = a_3 \int_0^1 \frac{\partial U_{\varphi,j}^{*(11)}}{\partial z} U_{z,p}^{*(11)} dz; \quad c_{jp}^{(11)} = a_4 \int_0^1 \frac{\partial W_j^{*(11)}}{\partial z} U_{z,p}^{*(11)} dz;$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} [a_{z,jp}^{(21)} \ddot{A}_{z,j}^{(21)}(t) + b_{z,jp}^{(21)} A_{z,j}^{(21)}(t) + b_{\varphi,jp}^{(21)} B_{\varphi,j}^{(21)}(t) + c_{jp}^{(21)} C_j^{(21)}(t)] = Q_p^{(21)}(t), \quad (18)$$

$$p = 1, 2, \dots;$$

$$a_{z,jp}^{(21)} = \alpha \int_0^1 [1 + \alpha_1(2z-1)^2] U_{z,j}^{*(21)} U_{z,p}^{*(21)} dz;$$

$$b_{z,jp}^{(21)} = \int_0^1 \left[ a_1(2z-1) \frac{\partial U_{z,j}^{*(21)}}{\partial z} + a_2 U_{z,j}^{*(21)} \right] U_{z,p}^{*(21)} dz;$$

$$b_{\varphi,jp}^{(21)} = a_3 \int_0^1 \frac{\partial U_{\varphi,j}^{*(21)}}{\partial z} U_{z,p}^{*(21)} dz; \quad c_{jp}^{(21)} = a_4 \int_0^1 \frac{\partial W_j^{*(21)}}{\partial z} U_{z,p}^{*(21)} dz.$$

Уравнения (16)–(18) записаны в виде, позволяющем по первым двум слагаемым определить парциальные частоты, полагая, например,  $A_1^{(1)}(t) = a_1^{(1)} \exp i\omega_1^{(1)} t$ ;  $A_1^{(2)}(t) = a_1^{(2)} \exp i\omega_1^{(2)} t$  и т.д.

Механизм появления “ложной” угловой скорости, которую гироскоп воспринимает как входную величину, представлен на рис. 2. Наличие упругих перемещений  $V(t)$ ,  $U_{\varphi}(t)$  и  $W(t)$  поверхности поплавок на качающемся основании приводит к появлению сил инерции Кориолиса с результирующим моментом

$$M_n^c(V) = \frac{4I_n \omega_3 \dot{V}(t)}{R} \sin \gamma,$$

составляющие которого равны  $M_1$  и  $M_2$ . Первая приводит к девиации оси, вторая – компенсируется вращающим моментом.

Аналогично для радиальных упругих перемещений  $W(t)$  запишем

$$M_n^c(W) = \frac{4I_n \omega_3 \dot{W}(t) \sin(\bar{\omega}_3, \hat{\vec{W}}(t))}{R}.$$

Составляющая  $M_n$  этого момента компенсируется вращающим моментом,  $M_2$  – приводит к прецессии главной оси.

Угловая скорость основания определяется по схеме, показанной на рис. 3:

$$\begin{aligned} \omega_{x1} &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_{y1} &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_{z1} &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} + \omega_0, \end{aligned}$$

где  $\omega_0$  – измеряемая угловая скорость.

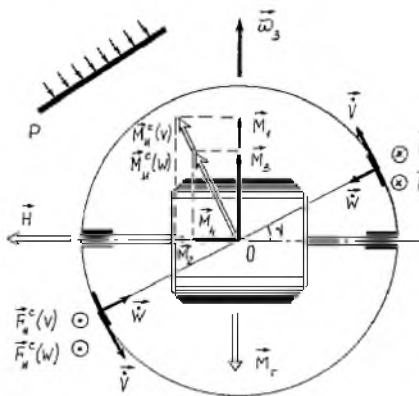


Рис. 2

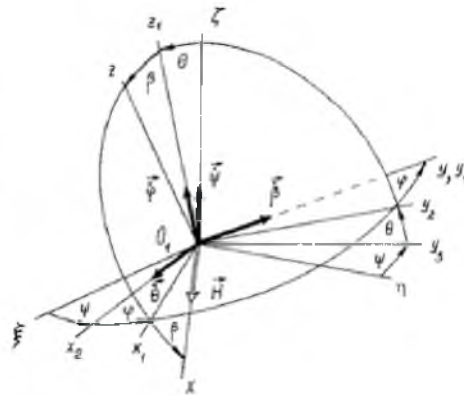


Рис. 3

Рис. 2. Влияние перемещений элементов боковой поверхности поплавка на девиацию датчика угловой скорости.

Рис. 3. Выбор систем координат:  $O_1 \xi \eta \zeta$  – опорная;  $O_1 x_1 y_1 z_1$  – жестко связанная с корпусом ракетоносителя;  $O_1 x y z$  – жестко связанная с поплавком.

Для иллюстрации вышеизложенного рассмотрим числовой пример. С целью упрощения полагаем боковую поверхность поплавка цилиндрической.

Упругие перемещения поверхности подвеса гироскопа под действием плоской волны можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 V(z, \beta, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -im \frac{F_{mn}}{\Delta_{mn}} \exp(im\beta) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right]; \\
 W(z, \beta, t) &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left[ \frac{F_{mn}}{\Delta_{mn}} \exp(im\beta) \sin\left(\frac{n\pi z}{L}\right) \right] \right\}, \quad (19)
 \end{aligned}$$

где

$$\Delta_{mn} = m^2 + \left[ \omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \left[ (\omega^2 \rho + 1) + c^2 \left[ \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 \right]; \quad (20)$$

$$F_{mn}(t) = P_0 \exp(i\omega t) \frac{2n\pi[1 - (-1)^n]}{(n\pi)^2 - (k_0 L)^2} \begin{cases} 1; \\ i \frac{\exp i(-2\pi k_0 \beta_1 R) - 1}{2\pi(k_0 \beta_1 R + m)} \end{cases}; \quad (21)$$

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\omega$  – частота падающей волны;  $0 < z < L$  – продольная координата;  $L$  – длина поплавка;  $0 \leq \beta \leq 2\pi$  – центральный угол (рис. 4).

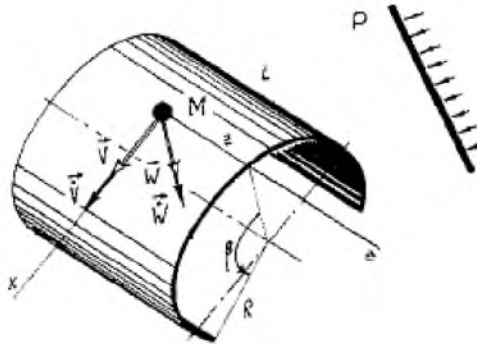


Рис. 4. Дифракция звука на упругой оболочке поплавка.

Интересное явление наблюдается при выполнении условия

$$\omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 = 0. \quad (22)$$

При этом отсутствуют составляющие перемещения поверхности  $W(t)$  в радиальном направлении, в то время как  $V(t)$  в тангенциальном направлении могут быть реализованы.

Соотношение (22) показывает возможность взаимного влияния колебаний в продольном ( $n$ -форм) и поперечном ( $m$ -форм) направлении, что приводит к их подавлению. Преобразовав это соотношение к виду

$$(\omega\sqrt{\rho} - m)(\omega\sqrt{\rho} + m) = \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad (23)$$

можно заключить, что в данном эффекте не принимают участия колебания в поперечном направлении с номерами форм

$$m = \omega\sqrt{\rho}. \quad (24)$$

Проанализируем условия возникновения особенностей резонансного типа, когда величины перемещений могут неограниченно возрастать. Очевидно, что такие возможности оболочкой могут быть реализованы при условии

$$\left[ \omega^2 \rho - m^2 - \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right] \left\{ (\omega^2 \rho + 1) + c^2 \left[ \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 \right\} = -m^2, \quad (25)$$

когда имеют место резонансные частоты:

$$\begin{aligned} \omega^p = (2\rho)^{-1/2} & \left\{ \left[ -\frac{h^2}{12R^2} \left[ \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m^2 - 1 \pm \right. \right. \\ & \left. \pm \left[ \frac{h^2}{12R^2} \left[ \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 \left[ \frac{h^2}{12R^2} \left[ \left(\frac{m}{R}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \right]^2 + \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + m^4 + 3 \right]^{1/2} \right] \right\}^{1/2}. \quad (26) \end{aligned}$$

Полученное соотношение позволяет утверждать, что низшие формы колебаний в продольном направлении практически не влияют на значения резонансных частот  $\omega^p$ , в то время как влияние поперечных, начиная с четвертой формы, проявляется в большей степени. Исключением является случай  $m = 0$ , который, по сути, тривиальный.

Очевидно, что тангенциальная составляющая перемещений поверхности поплавок не будет содержать формы, где  $m = 0$ . Другими словами, будут отсутствовать перемещения  $V_{01}, V_{03}, V_{05}, V_{07}, \dots$ .

Проведем численный анализ с целью установления степени влияния акустического излучения, например, при уровне давления  $P_0$ , равном 140 дБ, на состояние поверхности поплавка. Пусть  $\nu = 0,32$ ;  $L = 0,06$  м;  $\rho = 2,7 \cdot 10^{-2}$  Н · с<sup>2</sup> · м<sup>-4</sup>;  $h = 1 \cdot 10^{-3}$  м;  $c^2 = \frac{h^2}{12R^2} = 2 \cdot 10^{-4}$ ;  $x_0 = 0$ ;  $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ ;  $c_0 = 330$  м/с.

Рассмотрим низшие формы колебаний, а затем оценим полные перемещения  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn}$  и  $\sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}$  элементов поверхности.

В среднем шпангоуте ( $z = L/2$ ), т.е. в сечении, где крепится гиromотор, радиальные перемещения  $W_{mn}$  достигают наибольших значений и составляют около 4,471 мкм при частоте падающей волны  $\omega = 1 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup> и 4,590 мкм при  $\omega = 3 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup> ( $m = 0, n = 1$ ). Максимальные значения прогибов для остальных форм колебаний существенно меньше:

$$\begin{array}{ll} W_{\max} = 0,426 \text{ при } m=1, n=1; & W_{\max} = 0,063 \text{ при } m=6, n=1; \\ W_{\max} = 0,203 \text{ при } m=2, n=1; & W_{\max} = 0,054 \text{ при } m=7, n=1; \\ W_{\max} = 0,133 \text{ при } m=3, n=1; & W_{\max} = 0,047 \text{ при } m=8, n=1; \\ W_{\max} = 0,095 \text{ при } m=4, n=1; & W_{\max} = 0,041 \text{ при } m=9, n=1; \\ W_{\max} = 0,076 \text{ при } m=5, n=1; & W_{\max} = 0,036 \text{ при } m=10, n=1. \end{array}$$

Для более высоких номеров форм колебаний  $n$  значения  $W_{\max}$  еще меньше.

Зафиксируем значение параметра  $n$  (например,  $n = 1$ ). Тогда можно определить  $m$ -формы радиальных колебаний цилиндрической поверхности поплавка (рис. 5, в-н) для значений  $m$ , изменяющихся от девяти до нуля. При этом с увеличением номера  $n$  уменьшается величина радиальных перемещений  $W_{mn}$ . В этих же пределах можно определить результирующие поперечные формы для ряда значений частоты  $\omega$  акустического воздействия:  $W_{\max} = 3,717; 3,879; 4,118; 4,372; 4,692; 4,976$  мкм при  $\omega = 1 \cdot 10^3; 2 \cdot 10^3; 3 \cdot 10^3; 4 \cdot 10^3; 5 \cdot 10^3; 6 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup> соответственно.

Внешний вид образующихся в среднем сечении форм колебаний в поперечном направлении представлен на рис. 6.

Влияние количества суммирующихся форм  $\sum_{m=-m_1}^{m_2} \sum_{n=1}^{n_1}$  по параметрам

$m_1, m_2$  и  $n_1$  на величину максимального радиального прогиба, например, при частоте  $\omega = 1 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup> падающей звуковой волны незначительно (табл. 1). Геометрия форм при этом практически не изменяется.

Очевидно, что влияние параметра  $n$  при изменении значений в двойной сумме, начиная с 20, весьма незначительно и, по сути, не вносит определяющих изменений в максимальные прогибы. Вклад параметра  $m$  еще меньше. Численный анализ перемещений  $V_{mn}$  в тангенциальном направлении для этих же условий показывает, что они на 7-8 порядков меньше

Т а б л и ц а 1

Влияние номера формы колебаний на величину перемещений в радиальном направлении

№ формы колебаний			$W_{\max}$ , МКМ
$m_1$	$m_2$	$n_1$	
-10	10	-9	3,7
-3	3	9	3,6
-5	5	9	3,7
-15	15	9	3,7
-20	20	9	3,7
-10	10	5	3,0
-10	10	25	3,5
-10	10	49	3,5
-10	10	99	3,5
-20	20	9	3,5

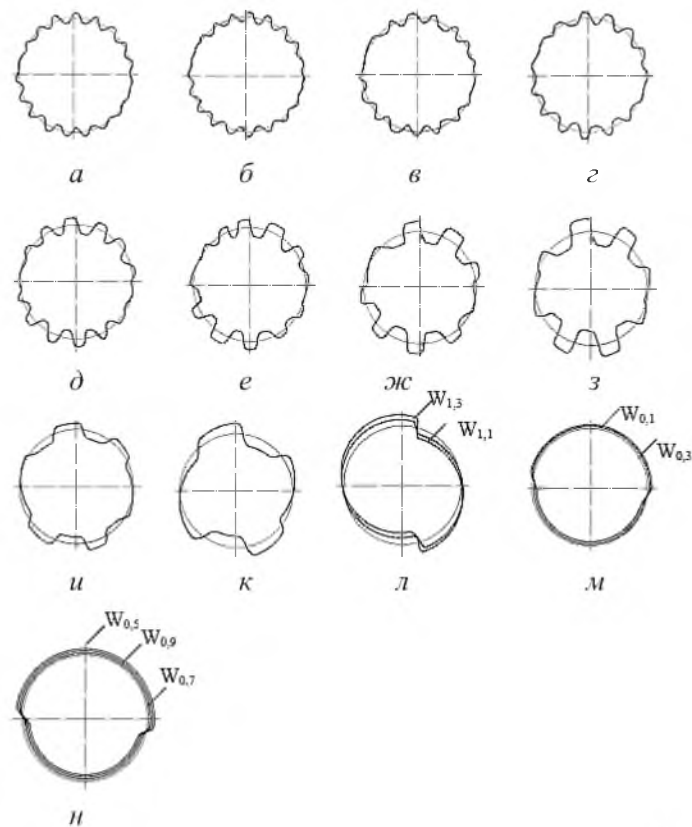


Рис. 5. Изгибные колебания поплавка в среднем шпангоуте при  $\omega = 1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ : а -  $m = 10, n = 1$ ; б -  $m = -10, n = 1$ ; в -  $m = 9, n = 1$ ; г -  $m = 8, n = 1$ ; д -  $m = 7, n = 1$ ; е -  $m = 6, n = 1$ ; ж -  $m = 5, n = 1$ ; з -  $m = 4, n = 1$ ; и -  $m = 3, n = 1$ ; к -  $m = 2, n = 1$ ; л -  $m = 1, n = 1$ ; м -  $m = 0, n = 1, 3$ ; н -  $m = 0, n = 5, 7, 9$ .

абсолютных величин прогибов  $W_{mn}$  в радиальном направлении и составляют  $1,9 \cdot 10^{-8}$  мкм, например, при  $\omega = 1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

Внешний вид  $V$ -формы составляющей перемещения поверхности в тангенциальном направлении под действием звукового излучения представлен на рис. 7. Такая форма согласуется с принятой схемой падения волны (рис. 8). Обладая значительной жесткостью в плоскости шпангоута, т.е. в окружном направлении, конструкция будет реагировать на возмущение практически только верхней частью сечения. И если в этом случае величина  $V$ -формы на 7-8 порядков меньше радиальных перемещений  $W$  (точнее на образованной петле), то в других точках сечения она еще меньше (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Перемещение поверхности подвеса под действием акустической волны в тангенциальном направлении

$m$	$V \cdot 10^{-16}$ , м, при $\beta_i = \frac{2\pi}{80} i$ ( $i = \overline{0, 79}$ )									
	$n$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	6573,9	2825,2	-47,8	435,6	245,6	144,4	130,9	133,0	130,1	123,6
10	115,9	107,6	98,6	89,1	79,1	68,5	57,6	46,3	34,8	23,0
20	11,0	-1,0	-13,0	-24,9	-36,7	-48,2	-59,5	-70,4	-80,8	-90,8
30	-100,1	-108,9	-117,0	-124,4	-131,0	-136,8	-141,8	-145,9	-149,0	-151,2
40	-152,6	-153,0	-152,5	-151,0	-148,6	-145,3	-141,0	-135,9	-129,9	-123,2
50	-115,7	-107,5	-98,6	-89,2	-79,1	-68,6	-57,6	-46,3	-34,7	-23,0
60	-11,0	1,0	13,0	24,9	36,7	48,2	59,4	70,3	80,8	90,8
70	100,3	109,2	117,1	121,7	121,6	136,0	234,6	421,2	46,0	2794,1

**Примечание.**  $V$ -формы перемещений поверхности цилиндрической части поплавка под действием звукового излучения;  $\omega = 1000 \text{ с}^{-1}$ .

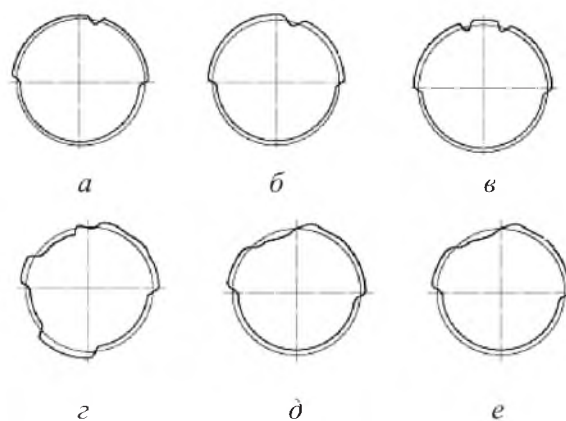


Рис. 6. Формы  $W = \sum_{m=-10}^{10} \sum_{n=1}^9 W_{mn}$ : а -  $\omega = 1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; б -  $\omega = 2 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; в -  $\omega = 3 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; г -  $\omega = 4 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; д -  $\omega = 5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ ; е -  $\omega = 6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ .

При определении результирующих форм колебаний достаточно ограничиться значениями  $m = -150 \dots 150$ ,  $n = 1 \dots 9$  (табл. 3).

Данные приводятся для сечения  $z = 0,01$  м.

Т а б л и ц а 3

Влияние номера формы колебаний на перемещения в тангенциальном направлении

Форма колебаний			$V_{\max} \cdot 10^{-7}$ , МКМ
$m_1$	$m_2$	$n_1$	
-10	10	9	3,000
-15	15	9	4,260
-20	20	9	5,180
-50	50	9	6,450
-100	100	9	6,567
-150	150	9	6,570

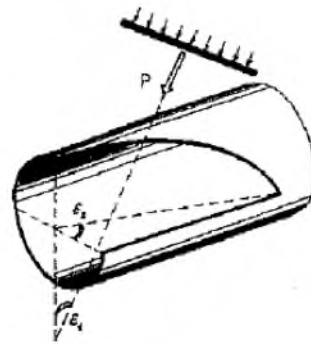
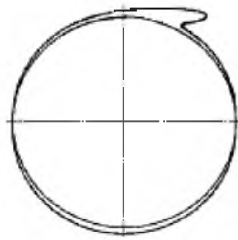


Рис. 7. Перемещения поверхности поплавка в тангенциальном направлении:  $V = \sum_{-150}^{150} \sum_1^{10} V_{mn}$ ;  
 $z = 0,01$  м;  $\omega = 1 \cdot 10^3$  с<sup>-1</sup>.

Рис. 8 (справа). Схема действия звуковой волны на цилиндрическую часть поплавка.

**Заключение.** С помощью приведенных результатов можно объяснить природу упругого взаимодействия проникающего акустического излучения с подвесом поплавкового гироскопа и механизм появления девиации оси фигуры в условиях качающегося основания. Аналитическое описание дифракции звуковых волн на подвесе гироскопа позволяет оценить степень влияния осесимметричного, антисимметричного и циклического нагружения на погрешность измерений.

## Резюме

Аналізується динаміка підвісу поплавкового гіроскопа. Побудовано розрахункову модель та аналітично описується напружено-деформований стан поверхні поплавка. Розглядається у загальному випадку довільно окреслена



лінія меридіана, що дозволяє, як окремий випадок, описати динаміку опуклої, вгнутої та циліндричної поверхонь поплавка. Пояснюється природа виникнення додаткової похибки гіроскопа під дією проникаючого акустичного випромінювання.

1. *Ишлинский А. Ю.* Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. – М.: Наука, 1976. – 671 с.
2. *Карачун В. В.* Прохождение волны избыточного давления через многофазную механическую структуру // *Космічна наука і технологія.* – 1996. – 2, № 3-4. – С. 58 – 61.
3. *Karachun V. V.* About the influence of acoustic influences to the equipment of space apparatus complex: Proc. of Fourth Ukraine-Russia-Chine Symp. on Space Science and Technology. – Ukraine, 1996. – P. 720.
4. *Koshljakov V. N., Karachun V. V., Mel'nick V. N., et al.* The some aspects of flight safety in conditions penetrate acoustic radiation // *The World Congr. "Aviation in the XXI-st Century"*. – Kiev (Ukraine), 2003. – P. 2.37 – 2.40.
5. *Mel'nick V. N. and Karachun V. V.* Some aspects of the gyroscopic stabilzation in aconstic fields // *Int. Appl. Mech.* – 2002. – 38, No. 1. – P. 74 – 80.
6. *Власов В. З.* Контактные задачи по теории оболочек и тонкостенных стержней // *Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук.* – 1949. – № 6. – С. 41 – 45.
7. *Галеркин Б. Г.* К теории упругой цилиндрической оболочки // *Докл. АН СССР.* – 1934. – 4, № 5-6. – С. 73 – 81.
8. *Гузь А. Н., Кубенко В. Д.* Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с.
9. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек. В 2 ч. Ч. 1: Общая теория. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1962. – 274 с.
10. *Карачун В. В., Каюк Я. Ф., Мельник В. Н.* Волновые задачи поплавкового гироскопа. – Киев: ВИПОЛ, 2007. – 228 с.

Поступила 10. 04. 2007