

Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщение 1. Слабый резонанс

В. В. Матвеев, О. А. Бовсуновский

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассматривается приближенный аналитический метод расчета вибродиагностических параметров колебательного процесса упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого упругой системой с одной степенью свободы при билинейной асимметричной характеристике восстанавливающей силы, в области слабого субгармонического резонанса порядка 1/2.

Ключевые слова: вынужденные колебания, нелинейные колебания, основной и субгармонический резонансы, билинейная асимметричная характеристика восстанавливающей силы, закрывающаяся трещина усталости, вибродиагностика усталостного повреждения.

Введение. Повышенный интерес к изучению колебаний упругих тел при наличии повреждений типа усталостных трещин обусловлен как необходимостью оценки возможного изменения вибрационного состояния элементов конструкций в процессе их длительной эксплуатации, так и разработки эффективных методов вибродиагностики наличия таких повреждений. При этом исследования продолжают проводить по трем основным направлениям: традиционное, т.е. определение изменения собственных частот колебаний конструктивных элементов при наличии трещин [1–7] и отслеживание изменения форм колебаний [8, 9]; определение параметров нелинейных эффектов колебательных процессов, обусловленных наличием закрывающейся или “дышащей” трещины [10–14]; оценка влияния трещины на характеристики демпфирования колебаний упругих тел [15–18].

Одним из менее исследованных направлений является установление зависимостей между параметрами закрывающейся трещины и параметрами колебательного процесса упругого тела при нелинейных резонансах, обусловленных наличием такой трещины. Это связано со сложностью аналитического решения задачи и постановки корректного эксперимента.

Проведенный ранее [19] анализ методов расчета вынужденных колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной свидетельствует о значительных трудностях в нахождении удобных для использования решений. Получаемые системы сложных определяющих уравнений требовали в конечном итоге численного решения. Имеющиеся замкнутые решения не описывали или искажали поведение системы в области резонансов на обертоном собственной или внешней частоты, а иногда и в области основного резонанса.

Предложенный приближенный аналитический метод нахождения решения для области слабого супергармонического резонанса 2-го порядка показывает удовлетворительное соответствие между результатами расчета и данными численных решений [19]. Ниже рассматривается возможность прибли-

женного расчета параметров стационарного колебательного процесса для случая субгармонического резонанса порядка $1/2$, базирующегося на основных положениях, используемых для супергармонического резонанса.

Методика приближенного расчета. Поставленная задача решается с учетом следующих исходных положений:

1) упругое тело при относительно малых размерах трещины нормального отрыва, что позволяет пренебречь некоторым различием в формах колебаний на полуциклах деформирования разного знака, представляется для заданной формы колебаний моделью системы с одной степенью свободы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы. Вынужденные колебания рассматриваемой системы описываются дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2h \frac{du}{dt} + \omega^2 [1 - 0,5\alpha(1 + \text{sign } u)]u = q_0 \sin vt. \quad (1)$$

Здесь ω – собственная частота колебаний неповрежденного тела; α – параметр, характеризующий относительное изменение жесткости тела,

$$\alpha = \frac{K - K_T}{K}, \quad (2)$$

где K – жесткость тела с закрытой трещиной, которая принимается равной жесткости неповрежденного тела; K_T – жесткость при наличии открытой трещины, $K_T < K$.

Примеры определения параметра α для стержневых элементов с трещинами нормального отрыва при продольных и изгибных колебаниях рассмотрены в [20], для прямоугольных пластин – в [21];

2) полагаем, что при субгармоническом резонансе кроме основной гармоники колебаний, соответствующей частоте вынуждающей силы, возникают колебания со спектром гармонических составляющих основного резонанса, т.е. соответствующих спектру свободных колебаний;

3) для области основного резонанса ($v \approx \omega$) используется решение, полученное с помощью асимптотического метода нелинейной механики [22]:

$$u = A \sin(vt - \gamma) + A_0 + \sum_{n=2,4,\dots} A_n \cos n(vt - \gamma),$$

где A_0 – постоянная составляющая; A_n – амплитуды высших гармоник,

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} A; \quad A_n = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2\alpha}{\pi(n^2 - 1)^2} A.$$

Резонансная частота ω_0 принимается равной частоте свободных колебаний упругой системы с асимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, определяемой параметром α [19],

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}} \omega \approx \sqrt{1-\alpha} \omega. \quad (3)$$

С учетом отмеченного решение уравнения (1) для области субгармонического резонанса порядка 1/2 отыскиваем в виде

$$u = A_0 + A_{1/2} \sin\left(\frac{\nu}{2}t - \gamma_{1/2}\right) + A_1 \sin(\nu t - \gamma_1) + \sum_{n=2,4,\dots} A_n \cos n\left(\frac{\nu t}{2} - \gamma_{1/2}\right), \quad (4)$$

где

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} A_{1/2}; \quad A_n = (-1)^{\frac{n}{2}+1} \frac{2\alpha}{\pi(n^2-1)^2} A_{1/2}. \quad (5)$$

При этом для случая слабого резонанса ($A_{1/2} < A_1$) с учетом малости коэффициентов $\frac{2\alpha}{\pi(n^2-1)^2}$ гармоническими составляющими с амплитудами A_n можно пренебречь. Тогда основные гармоники колебательного процесса при субгармоническом резонансе порядка 1/2 можно представить в виде схемы, изображенной на рис. 1.

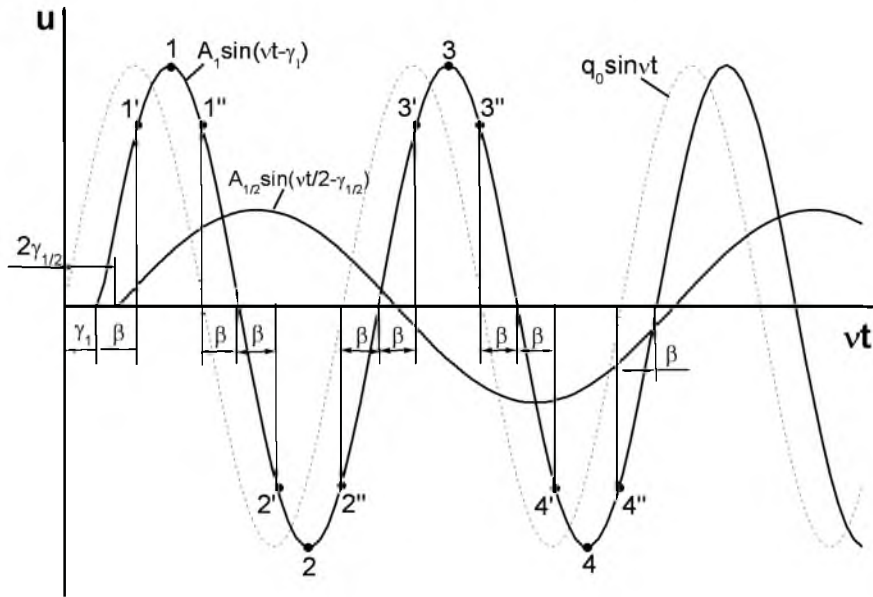


Рис. 1. Основные гармоники колебательного процесса.

Неизвестные параметры $A_{1/2}$, A_1 , $\gamma_{1/2}$, γ_1 определяем с помощью подхода [19], суть которого состоит в удовлетворении уравнения (1) в моменты известного значения билинейной характеристики восстанавливающей силы.

В качестве основных моментов времени при $u > 0$ и значении частоты свободных колебаний $(1-\alpha)\omega^2$ примем

$$t_1' = \frac{\beta + \gamma_1}{\nu}; \quad t_1'' = \frac{\pi - (\beta - \gamma_1)}{\nu}; \quad t_3' = \frac{2\pi + (\beta + \gamma_1)}{\nu};$$

$$t_3'' = \frac{3\pi - (\beta - \gamma_1)}{\nu}, \quad (6)$$

при $u < 0$ и значении частоты свободных колебаний ω –

$$t_2' = \frac{\pi + (\beta + \gamma_1)}{\nu}; \quad t_2'' = \frac{2\pi - (\beta - \gamma_1)}{\nu}; \quad t_4' = \frac{3\pi + (\beta + \gamma_1)}{\nu};$$

$$t_4'' = \frac{4\pi - (\beta - \gamma_1)}{\nu}. \quad (7)$$

Этим моментам времени на первой гармонике $A_1 \sin(\nu t - \gamma_1)$ соответствуют точки $1', 1'', 3', 3''$ и $2', 2'', 4', 4''$ (рис. 1). При этом значение β должно удовлетворять условию

$$A_1 \sin \beta > A_{1/2} \quad (8)$$

и выбираться в интервале $\beta_0 \leq \beta \leq \pi/2$, где $\beta_0 = \arcsin A_{1/2}/A_1$. Однако следует заметить, что в случае известных значений γ_1 и $\gamma_{1/2}$ величина β_0 может быть и значительно меньше.

Подставляя решение (5) для выбранных моментов времени (6), (7) в уравнение (1), получаем следующие пары исходных уравнений:

$$\left[\begin{aligned} & (1 - \alpha)A_0 \pm \left[(1 - \alpha) - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \left[\sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) + \right. \\ & \left. + \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} \pm \frac{\nu h}{\omega^2} \left[\cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) - \right. \\ & \left. - \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} + 2 \frac{\nu h}{\omega^2} A_1 \cos \beta + A_1 \left[(1 - \alpha) - \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \beta = \\ & = \frac{q_0}{\omega^2} (\sin \beta \cos \gamma_1 + \cos \beta \sin \gamma_1); \quad (1', 3') \end{aligned} \right. \quad (9a)$$

$$\left[\begin{aligned} & (1 - \alpha)A_0 \pm \left[(1 - \alpha) - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \left[\cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) + \right. \\ & \left. + \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} \pm \frac{\nu h}{\omega^2} \left[\sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) - \right. \\ & \left. - \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} - 2 \frac{\nu h}{\omega^2} A_1 \cos \beta + A_1 \left[(1 - \alpha) - \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \beta = \\ & = \frac{q_0}{\omega^2} (\sin \beta \cos \gamma_1 - \cos \beta \sin \gamma_1); \quad (1'', 3'') \end{aligned} \right.$$

$$\begin{cases}
 A_0 \pm \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \left[\cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) - \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} \mp \\
 \mp \frac{\nu h}{\omega^2} \left[\sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) + \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} - 2 \frac{\nu h}{\omega^2} A_1 \cos \beta - \\
 - A_1 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \beta = - \frac{q_0}{\omega^2} (\sin \beta \cos \gamma_1 - \cos \beta \sin \gamma_1); & (2', 4') \\
 A_0 \pm \left[1 - \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \left[\sin \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) - \cos \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} \mp \\
 \mp \frac{\nu h}{\omega^2} \left[\cos \frac{\beta}{2} \cos \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) + \sin \frac{\beta}{2} \sin \left(\frac{\gamma_1}{2} - \gamma_{1/2} \right) \right] A_{1/2} + 2 \frac{\nu h}{\omega^2} A_1 \cos \beta - \\
 - A_1 \left[1 - \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \beta = - \frac{q_0}{\omega^2} (\sin \beta \cos \gamma_1 - \cos \beta \sin \gamma_1). & (2'', 4'')
 \end{cases} \quad (96)$$

Для удобства дальнейшего анализа приведенные уравнения (9) пронумерованы в соответствии с обозначением точек на рис. 1. При этом верхние знаки относятся к уравнениям (1'), (1''), (2') и (2''), нижние – к уравнениям (3'), (3''), (4') и (4'').

С целью усреднения значений тригонометрических функций угла β в интервале его возможного изменения ($\beta_0 \dots \pi/2$) заменим их средними значениями:

$$\begin{aligned}
 (\sin N\beta)_{\text{cp}} &= 2 \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{\sin N\beta d\beta}{\pi - 2\beta_0} = -2 \frac{\cos N \frac{\pi}{2} - \cos N\beta_0}{N(\pi - 2\beta_0)}; \\
 (\cos N\beta)_{\text{cp}} &= 2 \int_{\beta_0}^{\pi/2} \frac{\cos N\beta d\beta}{\pi - 2\beta_0} = 2 \frac{\sin N \frac{\pi}{2} - \sin N\beta_0}{N(\pi - 2\beta_0)}.
 \end{aligned} \quad (10)$$

Из рассмотрения алгебраических сумм приведенных исходных уравнений, которые включают параметры колебательного процесса двух периодов гармоник возбуждения, принимая, согласно (5), $A_0 = A_{1/2} \alpha / \pi$, находим выражения для соотношения амплитуд $\bar{A} = A_{1/2} / A_1$ и сдвига фаз $\Delta\gamma = \gamma_{1/2} - \gamma_1$.

Суммы [(1') + (4')] - [(1'') + (4'')] \equiv [(2') + (3')] - [(2'') + (3'')] определяют

$$\lg \Delta\gamma_1 = - \frac{(2 - \alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2}{\alpha - 2h \frac{\nu}{\omega^2}}, \quad (11)$$

суммы $[(1') + (4')] + [(1'') + (4'')] и [(2') + (3')] + [(2'') + (3'')] -$

$$\bar{A}_{1(\pm)} = \pm 4\alpha\pi \cos \beta_0 \left\{ 4\pi \left(\cos \frac{\beta_0}{2} - \sin \frac{\beta_0}{2} \right) \left[\left[(2 - \alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \Delta\gamma_1 - \left(\alpha - 2 \frac{h\nu}{\omega^2} \right) \cos \Delta\gamma_1 \right] \pm 2\alpha(2 - \alpha)(\pi - 2\beta_0) \right\}^{-1}, \quad (12)$$

где знаки “+” относятся к первой сумме, “-” – ко второй.

Другие варианты алгебраических сумм, исключая необходимость нахождения абсолютных значений амплитуды A_1 и сдвига фаз γ_1 и $\gamma_{1/2}$, определяют следующие выражения для \bar{A} и $\Delta\gamma$:

суммы $[(1') + (2')] - [(1'') + (2'')] \equiv [(3') + (4')] - [(3'') + (4'')] -$

$$\operatorname{tg} \Delta\gamma_2 = - \frac{\alpha + 2h \frac{\nu}{\omega^2}}{(2 - \alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2}, \quad (13)$$

суммы $[(1') + (2')] + [(1'') + (2'')] и [(3') + (4')] + [(3'') + (4'')] -$

$$\bar{A}_{2(\pm)} = \pm 4\alpha\pi \cos \beta_0 \left\{ 4\pi \left(\cos \frac{\beta_0}{2} - \sin \frac{\beta_0}{2} \right) \left[\left[(2 - \alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos \Delta\gamma_2 - \left(\alpha + 2 \frac{h\nu}{\omega^2} \right) \sin \Delta\gamma_2 \right] \pm 2\alpha(2 - \alpha)(\pi - 2\beta_0) \right\}^{-1}, \quad (14)$$

где знаки “+” относятся к первой сумме, “-” – ко второй. Следует заметить, что выражения (13) и (14) легко преобразуются к виду (11) и (12) при условии $\Delta\gamma_2 = \pi/2 - \Delta\gamma$. Различаться они будут только одним множителем: вместо $\alpha - 2 \frac{h\nu}{\omega^2}$ будет $\alpha + 2 \frac{h\nu}{\omega^2}$.

Учитывая, что в отличие от супергармонического резонанса [19] на периоде низшей гармоники колебаний имеются четыре экстремальных значения второй гармоники, соответствующие известному значению жесткости системы, рассмотрим наиболее простой способ определения приближенного значения относительной амплитуды \bar{A} . Принимая в уравнениях (9) значение $\beta = \pi/2$, что соответствует точкам 1, 2, 3, 4 на рис. 1, получаем четыре исходных уравнения (1), (2), (3), (4). Алгебраические суммы этих уравнений $[(1) + (4)]$ и $[(1) + (2)] - [(3) + (4)]$ определяют следующее выражение для нахождения приближенного значения искомой относительной амплитуды низшей гармоники:

$$\bar{A}_3 = \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2} \left\{ \left[(2-\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \Delta\gamma_3 - \left(\alpha - 2 \frac{\nu h}{\omega^2} \right) \cos \Delta\gamma_3 \right\} + \frac{\alpha}{\pi} (2-\alpha)}, \quad (15)$$

где

$$\Delta\gamma_3 = \arctg \frac{(2-\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2}{\alpha + 2 \frac{\nu h}{\omega^2}}. \quad (16)$$

Результаты расчета. Анализ полученных выражений показывает, что зависимости $\bar{A}_{1(+)} = f_1(\alpha)$ и $\bar{A}_{2(-)} = f_2(\alpha)$ при заданной величине h/ω и $\nu = 2\omega_0$ практически совпадают, а значения $\bar{A}_{1(-)}$ и $\bar{A}_{2(+)}$ – взаимоисключающие и далее не используются.

Поскольку в выражениях (12) и (14) неизвестно значение β_0 , рассмотрим вначале решение при $\beta_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \bar{A}_{1(+)} &= \frac{2\alpha}{\alpha(2-\alpha) + 2 \left\{ \left[(2-\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \sin \Delta\gamma_1 - \left(\alpha - 2h \frac{\nu}{\omega^2} \right) \cos \Delta\gamma_1 \right\}} \equiv \\ &\equiv \frac{2\alpha}{\frac{2}{\sin \Delta\gamma_1} \left[(2-\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] + \alpha(2-\alpha)} \equiv \\ &\equiv \frac{2\alpha}{\alpha(2-\alpha) - \frac{2}{\cos \Delta\gamma_1} \left(\alpha - 2 \frac{h\nu}{\omega^2} \right)}; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \bar{A}_{2(-)} &= \frac{2\alpha}{\alpha(2-\alpha) - 2 \left\{ \left[(2-\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right] \cos \Delta\gamma_2 - \left(\alpha + 2 \frac{h\nu}{\omega^2} \right) \sin \Delta\gamma_2 \right\}} \equiv \\ &\equiv \frac{2\alpha}{\alpha(2-\alpha) - \frac{2}{\cos \Delta\gamma_2} \left[(2-\alpha) - \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{\omega} \right)^2 \right]} \equiv \\ &\equiv \frac{2\alpha}{\frac{2}{\sin \Delta\gamma_2} \left(\alpha + 2 \frac{h\nu}{\omega^2} \right) + \alpha(2-\alpha)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Определив для заданных значений α и h относительную амплитуду низшей гармоники \bar{A} , неизвестное значение β_0 найдем из условия $\sin \beta_0 \approx \bar{A}$, затем, используя формулы (12) и (14) – уточненное значение \bar{A} . Определяя новое значение β_0 из условия, что $\sin \beta_0$ равен найденному уточненному значению, возможно дальнейшее уточнение \bar{A} . Заметим, что использование более простого способа (см. формулу (15)) не требует предварительного определения величины β_0 .

На рис. 2 в качестве примера представлены расчетные зависимости $\bar{A}(\alpha)$, полученные для случая субгармонического резонанса при $h/\omega = 0,0016$ и $0,0032$, что примерно соответствует значению логарифмического декремента свободных колебаний $\delta = 0,01$ и $0,02$ ($h/\omega = \delta/2\pi$). Видно, что определяемые по формуле (15) значения \bar{A} завышены, по формулам (17) и (18) они занижены по сравнению с исходными, вычисляемыми по зависимостям (12) и (14). Результаты расчета по формулам (17) и (18) полностью совпадают между собой во всем рассматриваемом диапазоне значений α . По-видимому, для практической приближенной оценки относительной амплитуды низшей гармоники целесообразно использовать формулы (17) или (18), что значительно упрощает расчет.

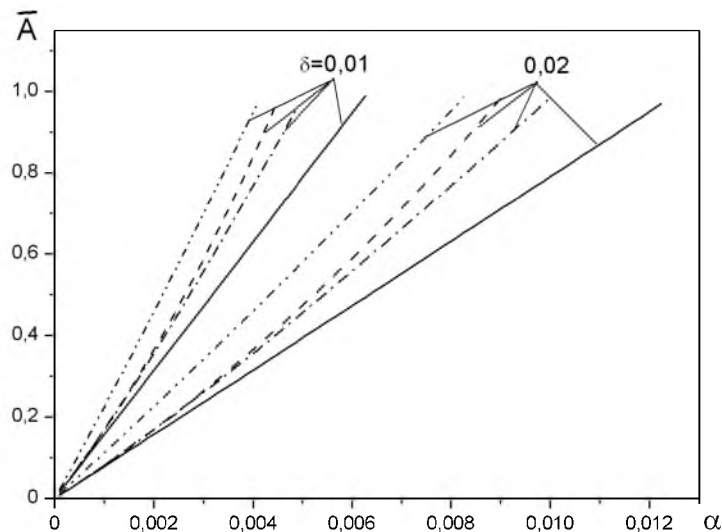


Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники \bar{A} от параметра α при субгармоническом резонансе ($\nu = 2\omega_0$) для значений логарифмического декремента колебаний $\delta = 0,01$ и $0,02$. (Сплошные линии – по формулам (17) и (18), штриховые и штрихпунктирные – по формулам (12) и (14) соответственно при выборе значения β_0 из условия $\sin \beta_0 \approx \bar{A}$, штриховые с двумя пунктирами – по (15).)

На рис. 3. показаны расчетные зависимости $\bar{A}(\alpha)$ для субгармонического резонанса при различных значениях логарифмического декремента свободных колебаний, на рис. 4 – зависимости $\bar{A}(\delta)$ при различных значениях параметра α . Как видно, при любой постоянной величине логарифмического декремента свободных колебаний значение относительной амплитуды \bar{A} практически прямо пропорционально параметру α , при постоянной величине параметра α – обратно пропорционально декременту δ .

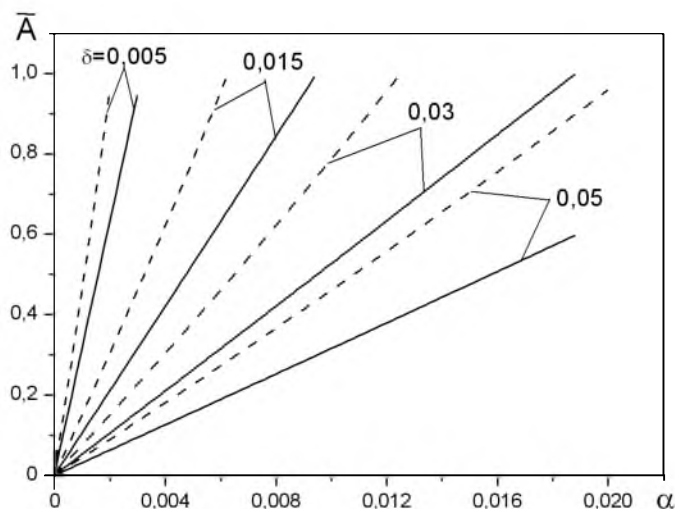


Рис. 3. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники \bar{A} от параметра α при субгармоническом резонансе ($\nu = 2\omega_0$) для различных значений логарифмического декремента колебаний δ . (Здесь и на рис. 4: сплошные линии – по формулам (17), (18), штриховые – по (15).)

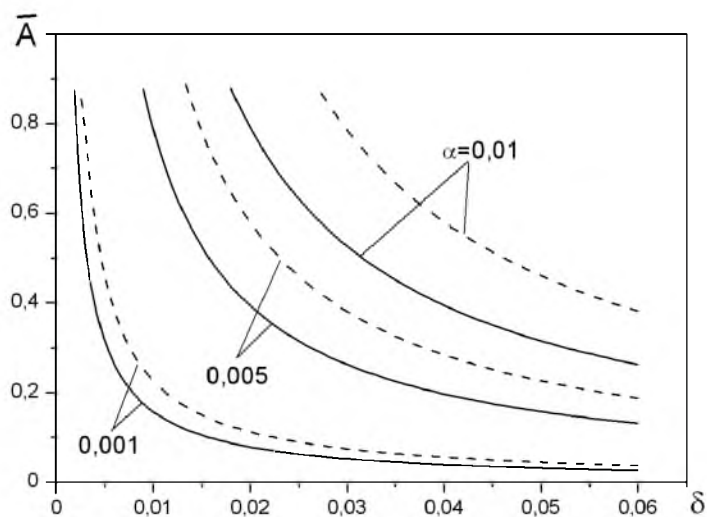


Рис. 4. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники \bar{A} от логарифмического декремента колебаний δ для различных значений параметра α .

Анализ полученных результатов показывает, что выражения (17) и (18) определяют единую линейную зависимость относительной амплитуды \bar{A} от параметра α :

$$\bar{A} = \frac{\pi \alpha}{2 \delta}, \quad (19)$$

а выражение (15) – зависимость

$$\bar{A} \approx \frac{3\pi \alpha}{4 \delta}, \quad (20)$$

которая определяет значение \bar{A} , в 1,5 раза большее, чем по (19). Таким образом, при слабом резонансе относительная амплитуда \bar{A} для любых значений α и δ прямо пропорциональна их отношению при коэффициенте пропорциональности 1,47...2,3.

Рис. 5 иллюстрирует амплитудно-частотные зависимости, полученные с использованием формул (15), (17) и (18) для значения $\delta = 0,02011$ при $\alpha = 0,01$. Там же в качестве сравнения пунктирной линией показана амплитудно-частотная зависимость для области основного резонанса. Для субгармонического резонанса зависимости построены в относительных координатах $\bar{A} = \bar{A}(v)/\bar{A}(v = 2\omega_0)$ и $\bar{v} = v/2\omega_0$, для основного резонанса – $\bar{A}_0 = A(v)/A(v = \omega_0)$ и $\bar{v} = v/\omega_0$.

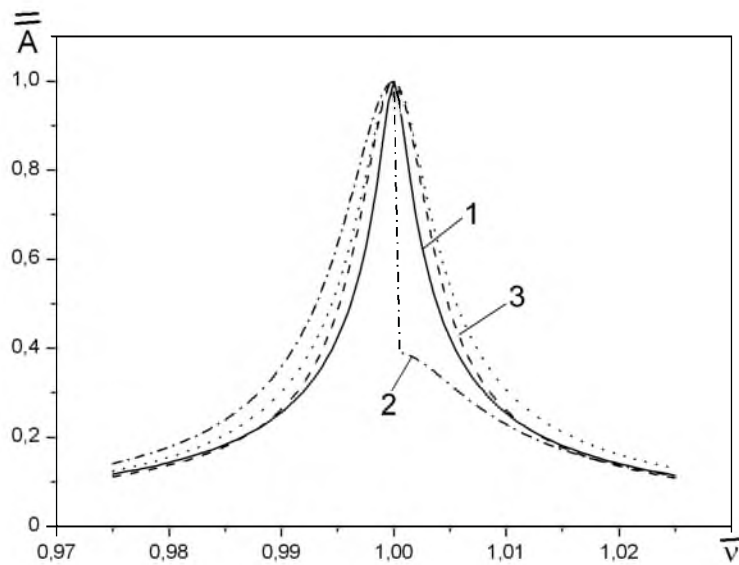


Рис. 5. Амплитудно-частотная зависимость в области субгармонического резонанса, определенная по формулам (17) – кривая 1, (18) – кривая 2 и (15) – кривая 3 для случая $\delta = 0,02011$ при значении параметра $\alpha = 0,01$.

Как видно, наблюдается заметное расхождение в результатах при данном значении α . Формулы (15) и (17) определяют более узкие резонансные пики по сравнению с основным резонансом, а амплитудно-частотная зависимость, полученная по формуле (18), при $\bar{v} \leq 1$ характеризуется наибольшими значениями относительной амплитуды \bar{A} при одной и той же величине \bar{v} , при $\bar{v} > 1$ – существенным срывом резонансной амплитуды и наименьшими значениями \bar{A} . Очевидно, можно предположить, что более достоверный результат дает формула (17), которая, как и (18), получена из рассмотрения полного периода свободных колебаний системы, амплитуда которых и представляет интерес. Отметим, что с уменьшением величины параметра α (рис. 6) резонансные пики, определенные по формулам (15) и (17), практически совпадают с основным резонансом, при определении по формуле (18) наблюдается некоторое отличие при значительном уменьшении величины срыва резонансной амплитуды.

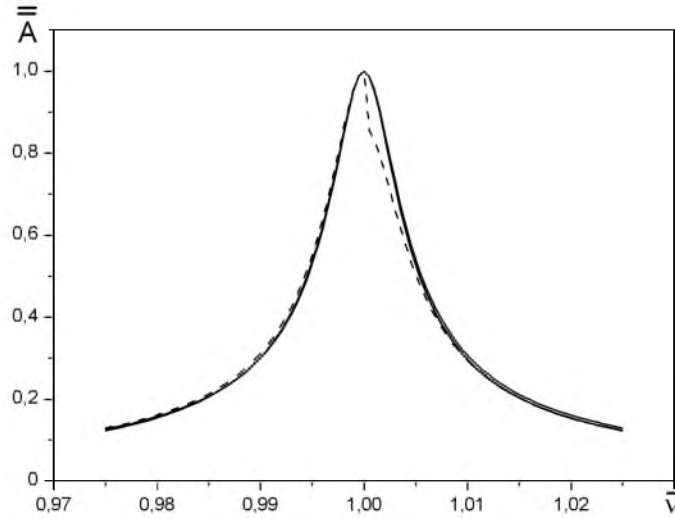


Рис. 6. Амплитудно-частотная зависимость в области субгармонического и основного резонансов.

Определение абсолютных значений амплитуды и сдвига фазы основной гармоники вынужденных колебаний. Как и ранее [19], полагаем, что амплитуда гармоники $A_1 \sin(\nu t - \gamma_1)$ соответствует решению вынужденных колебаний линейной системы с собственной частотой тела с закрывающейся трещиной (3):

$$\frac{A_1}{q_0} = \frac{1}{\omega_0^2} \left\{ \left[1 - \left(\frac{\nu}{\omega_0} \right)^2 \right]^2 + 4 \left(\frac{\nu}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{h}{\omega_0} \right)^2 \right\}^{-1/2}, \quad (21)$$

сдвиг фазы γ_1 определяется из баланса подводимой энергии ΔW_q и энергии ΔW_h , поглощаемой за цикл колебаний с периодом $2\pi/\omega_0$.

В случае моногармонического возбуждения и вязкого трения имеем

$$\Delta W_q = 2\pi q_0 A_1 \sin \gamma_1;$$

$$\Delta W_h = 4\pi h \nu [1 + 0,25 \bar{A}^2] A_1^2.$$

Из условия $\Delta W_q = \Delta W_h$ находим

$$\sin \gamma_1 = 2h\nu [1 + 0,25 \bar{A}^2] A_1 / q_0, \quad (22)$$

где A_1/q_0 определяется формулой (21). Учитывая, что рассматривается область частот возбуждения $\nu > \omega_0$, в расчете следует принимать значение $\pi/2 < \gamma_1 < \pi$.

По полученным значениям γ_1 и $\Delta\gamma$ (см. (13) или (11)) находим

$$\gamma_{1/2} = \frac{\gamma_1}{2} - \Delta\gamma_1. \quad (23)$$

По вычисленным значениям \bar{A} (15), (17) и (18), A_1/q_0 (21), γ_1 и $\gamma_{1/2}$ (22), (23) находим искомое решение (4).

На рис. 7 в качестве иллюстрации графиков функции (4) показаны расчетные зависимости относительной величины перемещения $\bar{u}(\omega_0 t) = u(\omega_0 t)/A_1$ в диапазоне значений аргумента $0 \leq \omega_0 t \leq 2\pi$ для случая субгармонического резонанса ($\nu = 2\omega_0$) при $\alpha = 0,007$ и $h/\omega = 0,0032$. Заметим, что полученные решения (4) строго соответствуют исходному уравнению (1).

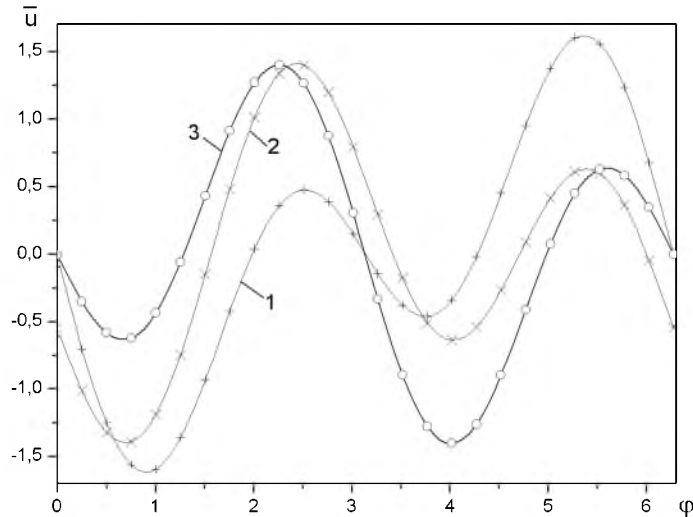


Рис. 7. Графики функции (4), полученные по выражениям (15) – кривая 1, (17) – кривая 2 и (18) – кривая 3.

Оценка достоверности результатов. Достоверность определения основного вибродиагностического параметра наличия трещины (относительной амплитуды \bar{A}) оценим путем сравнения результатов расчета с данными численного решения, полученного методом усреднения по ускорению [23–25].

На рис. 8,а приведены зависимости, полученные по формулам (19) и (20) для настроенного субгармонического резонанса при $\delta = 0,00101$, и данные численного решения. Как видно, численное решение при малых значениях параметра α и логарифмического декремента колебаний δ не дает стабильного результата, что, видимо, обусловлено узкой областью начальных условий, обеспечивающих выход на устойчивый стационарный режим колебаний. Результаты расчета сравнивались также с численным решением при более высоком значении логарифмического декремента колебаний ($\delta = 0,0201$) – рис. 8,б. Видно, что данные численного решения в данном случае также не стабильны, плохо согласуются с расчетом. Очевидно, достоверность предлагаемой методики расчета необходимо проверить еще при ярко выраженном субгармоническом резонансе, где численное решение даст достаточно стабильные результаты.

Однако отметим, что максимальные значения данных численного решения, которые с большей вероятностью могут соответствовать установившимся колебаниям, лучше согласуются с результатами расчета по формуле (19).

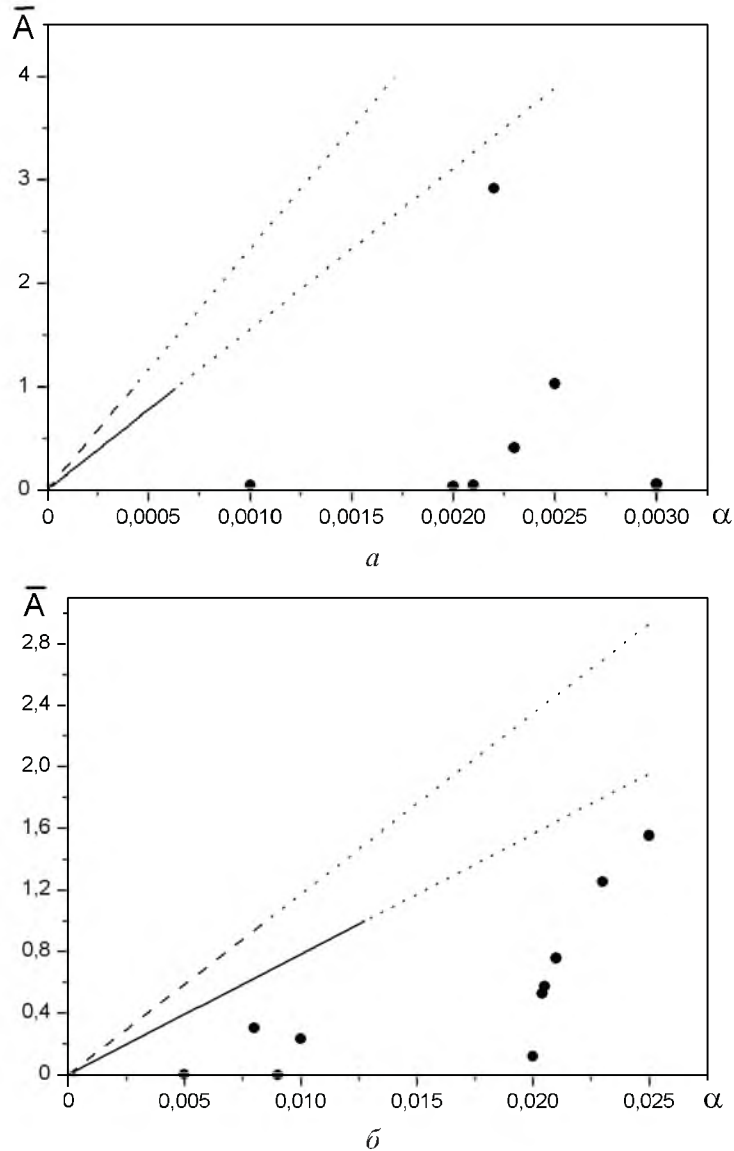


Рис. 8. Расчетная зависимость относительной амплитуды низшей гармоники при субгармоническом резонансе от параметра α , определенная по формулам (19) (сплошные линии) и (20) (штриховые линии), а также данные численного решения (точки) для случаев $\delta = 0,00101$ (а) и $0,0201$ (б).

Заключение. На основе ранее предложенного подхода к решению задачи о вынужденных колебаниях одномассовой упругой системы с билинейной характеристикой восстанавливающей силы в области супергармонического резонанса рассмотрен приближенный метод расчета параметров устойчивого колебательного процесса в области слабого субгармонического резонанса порядка $1/2$. Получены аналитические выражения различных приближений для определения основного вибродиагностического параметра колебаний упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого одно-массовой системой.

Исходя из анализа зависимостей вибродиагностического параметра (относительной амплитуды низшей гармоники \bar{A}) от величины параметра нелинейности α и логарифмического декремента колебаний δ установлена практически единая прямо пропорциональная зависимость величины \bar{A} от отношения α/δ . Сравнение значения вибродиагностического параметра при супергармоническом и субгармоническом резонансах для одинаковых значений параметра нелинейности α и логарифмического декремента колебаний δ показывает, что во втором случае оно больше примерно на два порядка.

Резюме

Розглядається наближений аналітичний метод розрахунку вібродіагностичних параметрів коливального процесу пружного тіла з тріщиною, що закривається, який моделюється пружною системою з одним ступенем вільності при білінійній асиметричній характеристиці відновлювальної сили, в області слабкого субгармонічного резонансу порядку $1/2$.

1. *Kim J. T. and Stubbs N.* Crack detection in beam-type structures using frequency data // *J. Sound Vibration*. – 2003. – **259**, No. 1. – P. 145 – 160.
2. *Xia Y. and Hoo H.* Statistical damage identification of structures with frequency changes // *Ibid.* – 2003. – **263**, No. 4. – P. 853 – 870.
3. *Khiem N. T. and Lien T. V.* Multi-crack detection for beam by the natural frequencies // *Ibid.* – 2004. – **273**, No. 1-2. – P. 175 – 184.
4. *Hwang H. Y. and Kim C.* Damage detection in structures using a few frequency response measurements // *Ibid.* – **270**, No. 1-2. – P. 1 – 14.
5. *Patil D. P. and Maiti.* Experimental verification of a method of detection of multiple cracks in beams based on frequency measurements // *Ibid.* – 2005. – **281**, No. 1-2. – P. 439 – 451.
6. *Dilena V. and Morassi A. J.* The use of antiresonances for crack detection in beams // *Ibid.* – 2004. – **276**, No. 1-2. – P. 195 – 214.
7. *Dharmaraju N. and Sinha J. K.* Some comments on use of antiresonance for crack identification in beams // *Ibid.* – 2005. – **286**, No. 3. – P. 669 – 671.
8. *Vanlanduit S., Parloo E., and Guillaume P.* One-line detection of fatigue cracks using an automatic mode tracking technique // *Ibid.* – 2003. – **266**, No. 4. – P. 805 – 815.
9. *Loutridis S., Douka E., and Trochidis A.* Crack identification in double-cracked beams using wavelet analysis // *Ibid.* – 2004. – **277**, No. 4-5. – P. 1025 – 1039.
10. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // *Пробл. прочности*. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.
11. *Плахтиенко Н. П.* Резонанс второго порядка пластины, содержащей протяженные дефекты целостности // *Там же*. – 2001. – № 1. – С. 105 – 116.

12. *Matveev V. V. and Bovsunovsky A. P.* Vibration-based diagnostics of fatigue damage of beam-like structures // *J. Sound Vibration*. – 2002. – **249**, No. 1. – P. 23 – 40.
13. *Luzzato E.* Approximate computation of non-linear effects in a vibrating cracked beam // *Ibid.* – 2003. – **265**, No. 4. – P. 745 – 763.
14. *Ji J. C. and Hansen C. H.* On the approximate solution of a piecewise nonlinear oscillator under super-harmonic resonance // *Ibid.* – 2005. – **283**, No. 1-2. – P. 467 – 474.
15. *Бовсуновский А. П.* Об эффективности использования характеристик демпфирования колебаний элементов конструкций для диагностики повреждения // *Пробл. прочности*. – 2002. – № 6. – С. 48 – 60.
16. *Radhakrishnan V. M.* Structural damping an edge crack // *J. Inst. Eng. Met. Sci. Div. (India)*. – 2002. – **83**, Apr. – P. 15 – 21.
17. *Dilena M. and Morassi A.* Detecting cracks in a longitudinally vibrating beam with dissipative boundary conditions // *J. Sound Vibration*. – 2003. – **267**, No. 1. – P. 87 – 103.
18. *Bovsunovsky A. P.* The mechanisms of energy dissipation in the non-propagating fatigue cracks in metallic materials // *Eng. Fract. Mech.* – 2004. – **71**, No. 16-17. – P. 2271 – 2281.
19. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемый методы решения // *Пробл. прочности*. – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
20. *Матвеев В. В., Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций // *Там же*. – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.
21. *Матвеев В. В., Богинич О. Е.* Вибродиагностические параметры усталостного повреждения прямоугольных пластин. Сообщ. 1. Методика определения параметров повреждения // *Там же*. – 2004. – № 6. – С. 5 – 16.
22. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // *Там же*. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
23. *Бовсуновский А. П., Матвеев В. В.* Колебания тел с локальными повреждениями типа трещин усталости // *Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Механіка*. – 2006. – **2**, вип. 10. – С. 116 – 122.
24. *Бовсуновский А. П., Матвеев В. В.* Особенности колебаний упругих тел, обусловленные наличием локальных повреждений типа усталостных трещин // *Надежность и долговечность машин и сооружений*. – 2006. – Вып. 26. – С. 26 – 30.
25. *Бовсуновский А. П.* Сравнительный анализ нелинейных резонансов механической системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы // *Пробл. прочности*. – 2007. – № 2. – С. 72 – 87.

Поступила 24. 11. 2006