

УДК 531/534.57

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ГИДРОУПРУГИХ ВОЛН В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ СО ВСТАВКОЙ

И. Т. СЕЛЕЗОВ*, О. В. ЗВОНАРЕВА**

*Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

**Транспортный университет, Днепропетровск

Получено 19.11.2003

Исследуется распространение неустановившихся волн в полубесконечной цилиндрической оболочке при наличии на некотором расстоянии от торца упругой вставки. Предполагается, что материал оболочки вязкоупругий, жидкость вязкая несжимаемая. Движение оболочки описывается уравнениями теории оболочек Кирхгофа-Лява, движение жидкости – уравнениями, осредненными по поперечному сечению. Задача решается преобразованием Лапласа по времени с последующим численным обращением. Проводится анализ численных результатов для радиального перемещения оболочки при наличии упругой вставки.

Досліджується розповсюдження неусталених хвиль у напівнескінченій циліндричній оболонці при наявності на деякій відстані від торця пружної вставки. Припускається, що матеріал оболонки в'язкопружний, рідина в'язка нестислива. Рух оболонки описується рівняннями Кирхгофа-Лява, рух рідини – рівняннями, що осереднені за поперечним перетином. Задача розв'язується за допомогою перетворення Лапласа у часі з наступним чисельним звертанням. Наведено аналіз чисельних результатів для радіального переміщення оболонки при наявності пружної вставки.

Unsteady wave propagation from the end face of a semi-infinite cylindrical shell in the presence of insertion at some distance is investigated. It is assumed that the shell material is viscoelastic and fluid is viscous. The motion of shell is described by the Kirchhoff-Love theory, the fluid motion by the equations averaged over the cross-section. The problem is solved by the Laplace transform in time with a consequent numerical inversion. The analysis of numerical results for shell radial displacement in the presence of elastic insertion is carried out.

ВВЕДЕНИЕ

Распространение гидроупругих волн в цилиндрической оболочке, заполненной жидкостью, представляет большой научный и прикладной интерес как в инженерных приложениях, так и в гемодинамике. И не случайно эта проблема была предметом многочисленных исследований [2-4, 6, 9-11], среди которых отметим [12], где приведена обширная литература, характеризующая состояние проблемы, а также показано, что в местах стыка сосудов имеет место сильная концентрация сдвиговых и изгибных напряжений.

Необходимо отметить и работу [6], в которой впервые проведена оценка влияния энергетических затрат сердца при наличии стеноза кровеносного сосуда. При перекрытии стенозом поперечного сечения до 50% энергетические затраты не сильно возрастают и сердце справляется с такой нагрузкой, а при дальнейшем уменьшении поперечного сечения сосуда зависимость оказывается существенно нелинейной и энергия, необходимая на преодоление стеноза, резко возрастает, приближая ситуацию к критической.

Ранее были рассмотрены задачи для полубесконечной однородной оболочки [14] и оболочки со стыком [5]. Исследуемая в данной статье задача

существенно усложняется из-за наличия упругой вставки в оболочке на некотором расстоянии от торца $x = 0$, к которому приложен импульс давления в начальный момент времени $\tau = 0$. Основной сосуд характеризуется радиусом срединной поверхности R_1 , слева от вставки $0 < x < 1$ и справа $x_2 < x < \infty$. В области вставки $x \in [x_1, x_2]$ радиус срединной поверхности равен R_2 . Такая задача может моделировать стеноз (сужение кровеносного сосуда) $R_2 < R_1$ при $x \in [x_1, x_2]$ или имплантацию некоторого участка сосуда вместо поврежденного $R_2 > R_1$ или $R_2 < R_1$ при $x \in [x_1, x_2]$.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение оболочки описывается уравнениями теории оболочек Кирхгофа-Лява с учетом вязкоупругих свойств согласно модели Кельвина-Фойгта. Различные применяемые модели вязкоупругости представлены в [13]. В случае осесимметричных колебаний математическая постановка задачи в безразмерной форме представляется в следующем виде:

дифференциальные уравнения движения оболочки

$$L_{1i}\bar{u}_{xi} + L_{2i}\bar{u}_{ri} = -\frac{4k_{0i}}{Re}\bar{v}_i, \quad (1)$$

$$L_{3i}\bar{u}_{xi} + L_{4i}\bar{u}_{ri} = -k_{0i}\bar{p}_i, \quad (i = 1, 2, 3); \quad (2)$$

дифференциальные уравнения движения жидкости [1, 14], выражающие закон сохранения импульса и закон сохранения массы

$$\frac{\partial \bar{v}_i}{\partial \tau} + R_{0i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial x} = -\frac{8}{Re} \bar{v}_i, \quad (3)$$

$$a_i R_{0i} \frac{\partial \bar{p}_i}{\partial \tau} + \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x} + 2R_{0i} \frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial \tau} = 0; \quad (4)$$

граничные условия на торце ($\bar{x}=0$) типа свободно-го опирания торца, выражающие равенство нулю радиального перемещения и изгибающего момента и отсутствие осевых деформаций, а также приложение импульса давления

$$\bar{u}_{r1}(\tau, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=0} = \frac{\partial^2 \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=0} = 0, \quad (5)$$

$$\bar{p}_1(\tau, \bar{x}) \Big|_{\bar{x}=0} = f(\tau);$$

условия сопряжения в поперечном сечении $\bar{x}=\bar{x}_1$, выражающие равенство осредненных скоростей и давлений жидкости, а также равенство радиальных и осевых перемещений оболочки, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сдвиговых сил

$$\bar{v}_1 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = \bar{v}_2 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1}, \quad \bar{p}_1 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = \bar{p}_2 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1},$$

$$\bar{u}_{r1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = \bar{u}_{r2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1}, \quad \bar{u}_{x1} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = \bar{u}_{x2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = \frac{\partial \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1},$$

$$E_{01}H_{01}^3 \frac{\partial^2 \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = E_{02}H_{02}^3 \frac{\partial^2 \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1},$$

$$E_{01}H_{01}^3 \frac{\partial^3 \bar{u}_{r1}}{\partial \bar{x}^3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} = E_{02}H_{02}^3 \frac{\partial^3 \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}^3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1},$$

$$E_{01}H_{01} \left(\frac{\partial \bar{u}_{x1}}{\partial \bar{x}} - \frac{\nu_0}{R_{01}} \bar{u}_{r1} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1} =$$

$$= E_{02}H_{02} \left(\frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial \bar{x}} - \frac{\nu_0}{R_{02}} \bar{u}_{r2} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_1};$$

условия сопряжения в поперечном сечении $\bar{x}=\bar{x}_2$

$$\bar{v}_2 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = \bar{v}_3 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2}, \quad \bar{p}_2 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = \bar{p}_3 \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2},$$

$$\bar{u}_{r2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = \bar{u}_{r3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2}, \quad \bar{u}_{x2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = \bar{u}_{x3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = \frac{\partial \bar{u}_{r3}}{\partial \bar{x}} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2},$$

$$E_{02}H_{02}^3 \frac{\partial^2 \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = E_{03}H_{03}^3 \frac{\partial^2 \bar{u}_{r3}}{\partial \bar{x}^2} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2},$$

$$E_{02}H_{02}^3 \frac{\partial^3 \bar{u}_{r2}}{\partial \bar{x}^3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} = E_{03}H_{03}^3 \frac{\partial^3 \bar{u}_{r3}}{\partial \bar{x}^3} \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2},$$

$$E_{02}H_{02} \left(\frac{\partial \bar{u}_{x2}}{\partial \bar{x}} - \frac{\nu_0}{R_{02}} \bar{u}_{r2} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2} =$$

$$= E_{03}H_{03} \left(\frac{\partial \bar{u}_{x3}}{\partial \bar{x}} - \frac{\nu_0}{R_{03}} \bar{u}_{r3} \right) \Big|_{\bar{x}=\bar{x}_2};$$

условия регулярности при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$:

$$\bar{u}_{x3}(\tau, \bar{x}) = \bar{u}_{r3}(\tau, \bar{x}) = \bar{p}_3(\tau, \bar{x}) = \bar{v}_3(\tau, \bar{x}) \rightarrow 0; \quad (8)$$

начальные условия, выражающие равенство нулю искомым функций в начальный момент времени $\tau = 0$,

$$\bar{v}_i(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = \bar{p}_i(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = 0,$$

$$\bar{u}_{xi}(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = \bar{u}_{ri}(\tau, \bar{x}) \Big|_{\tau=0} = \frac{\partial \bar{u}_{xi}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} =$$

$$= \frac{\partial \bar{u}_{ri}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (9)$$

В уравнениях (1)-(4) и условиях (5)-(9) все искомые функции зависят от продольной координаты \bar{x} и времени τ и приняты обозначения: \bar{u}_x и \bar{u}_r – продольное и радиальное перемещения оболочки соответственно; \bar{v} – продольная осредненная скорость движения жидкости; \bar{p} – осредненное давление жидкости; L_1, L_2, L_3, L_4 – пространственно-временные вязкоупругие дифференциальные операторы (приведены ниже); $f(\tau)$ – заданный импульс давления; $E_i (i = 1, 2, 3)$ – модуль Юнга; $h_i (i = 1, 2, 3)$ – толщина оболочки; $R_i (i = 1, 2, 3)$ – радиус срединной поверхности оболочки; η_i и ζ_i – коэффициенты вязкости оболочки; ν_0 – коэффициент Пуассона; ρ_0 – плотность. Величины $\bar{v}_1, \bar{p}_1, \bar{u}_{x1}, \bar{u}_{r1}$ определяются в области $0 < \bar{x} < \bar{x}_1$, величины $\bar{v}_2, \bar{p}_2, \bar{u}_{x2}, \bar{u}_{r2}$ – в области $\bar{x}_1 < \bar{x} < \bar{x}_2$, величины $\bar{v}_3, \bar{p}_3, \bar{u}_{x3}, \bar{u}_{r3}$ определяются в области $\bar{x} > \bar{x}_2$.

Выше приняты следующие обозначения и введены безразмерные величины:

$$L_{1i} = \left(1 + 2A_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \frac{\partial^2}{\partial \bar{x}^2} - U_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$L_{2i} = L_{3i} = -\frac{1}{R_{0i}} \left(\nu_0 + B_i \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right),$$

$$L_{4i} = \left(1 + 2A_i \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\frac{1}{12} \frac{h_i^2}{R_1^2} H_{0i}^2 \frac{\partial^4}{\partial \bar{x}^4} + \frac{1}{R_{0i}^2} \right) +$$

$$+ U_i^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2},$$

$$\begin{aligned}
 A_i &= k_{2i}^* \frac{3\zeta_i + \eta_i}{3\zeta_i + 4\eta_i}, B_i = k_{2i}^* \frac{3\zeta_i + 2\eta_i}{3\zeta_i + 4\eta_i}, \\
 a_i &= \frac{\rho_i v_0^2}{K_i}, k_{2i}^* = 2\eta_i \frac{v_0}{R_1} \frac{1 - \nu_0}{E_i}, k_{0i} = \frac{\rho_0}{\rho_i} \frac{R_1}{h_1} U_i^2, \\
 U_i &= \frac{v_0}{c_{0i}}, c_{0i}^2 = \frac{E_i}{\rho_0 (1 - \nu_0^2)}, \bar{u}_{xi} = \frac{u_{xi}}{R_1}, \bar{u}_{ri} = \frac{u_{ri}}{R_1}, \\
 \bar{p}_i &= \frac{p_i}{\rho_0 v_0^2}, \bar{v} = \frac{v}{v_0}, \tau = \frac{v_0}{R_1} t, \bar{x} = \frac{x}{R_1}, \zeta_i = \frac{2}{3} \eta_i, \\
 R_{01} &= 1, R_{02} = \frac{R_2}{R_1}, R_{03} = \frac{R_3}{R_1}, \\
 H_{01} &= 1, H_{02} = \frac{h_2}{h_1}, H_{03} = \frac{h_3}{h_1}, \\
 E_{01} &= 1, E_{02} = \frac{E_2}{E_1}, E_{03} = \frac{E_3}{E_1}.
 \end{aligned}$$

Здесь v_0 – характерная скорость течения; Re – число Рейнольдса; K_i – объемный модуль упругости; v_i – средняя скорость, определяемая зависимостью

$$\pi R_i^2 v_i = \int_0^{R_i} 2\pi r v_{xi} dr.$$

2. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Начально-краевая задача (1)-(9) решается методом преобразований Лапласа по времени τ :

$$f^L(s, \bar{x}) = \int_0^\infty \bar{f}(\tau, \bar{x}) e^{-s\tau} d\tau,$$

где s – параметр преобразований Лапласа.

После некоторых преобразований для давления p_i^L может быть получено следующее разрешающее уравнение:

$$\begin{aligned}
 n_{1i} \frac{d^8 p_i^L}{d\bar{x}^8} + n_{2i} \frac{d^6 p_i^L}{d\bar{x}^6} + n_{3i} \frac{d^4 p_i^L}{d\bar{x}^4} + \\
 + n_{4i} \frac{d^2 p_i^L}{d\bar{x}^2} + n_{5i} p_i^L = 0. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 n_{1i} &= (1 + 2sA_i) \frac{h_1^2}{12R_1^2} mH_{0i}, \\
 n_{2i} &= m(1 + 2sA_i) U_i^2 s^2 H_{0i} +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ \frac{a_i}{2} (1 + 2sA_i)^2 \frac{h_1^2}{12R_1^2} mH_{0i}, \\
 n_{3i} &= \frac{a_i}{2} (1 + 2sA_i) U_i^2 s^2 H_{0i} + m \left(\frac{(v_0 + sB_i)^2}{R_{0i}^2} - \right. \\
 &\quad \left. - (v_0 + sB_i) \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) \right) H_{0i}, \\
 n_{4i} &= -\frac{a_i}{2} \left(\frac{(v_0 + sB_i)^2}{R_{0i}^2} - (1 + 2sA_i) \times \right. \\
 &\quad \left. \times \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) \right) + \\
 &\quad + ms^2 U_i^2 \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right) - k_{i0} \frac{1 + 2sA_i}{R_{0i} H_{0i}} + \\
 &\quad + \frac{8ms^2 (v_0 + sB_i) k_{0i}}{H_{0i} Re},
 \end{aligned}$$

$$n_{5i} = -\frac{s^2 U_i^2 k_{0i}}{R_{0i} H_{0i}} - \frac{a_i}{2} s^2 U_i^2 \left(\frac{1 + 2sA_i}{R_{0i}^2} + s^2 U_i^2 \right),$$

$$m = \frac{Re}{2s(sRe - 8)}.$$

Решение уравнения (10) в области $(0 < \bar{x} < \bar{x}_1)$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
 P_1^L(s, x) &= e^{-k_1 \bar{x}} (A_1(s) \cos k_2 \bar{x} + A_2(s) \sin k_2 \bar{x}) + \\
 &+ e^{-k_3 \bar{x}} (A_3(s) \cos k_4 \bar{x} + A_4(s) \sin k_4 \bar{x}) + \\
 &+ e^{k_1 \bar{x}} (A_5(s) \cos k_2 \bar{x} + A_6(s) \sin k_2 \bar{x}) + \quad (11) \\
 &+ e^{k_3 \bar{x}} (A_7(s) \cos k_4 \bar{x} + A_8(s) \sin k_4 \bar{x}).
 \end{aligned}$$

Решение уравнения (10) в области $(x_1 < \bar{x} < \bar{x}_2)$ записывается в виде

$$\begin{aligned}
 P_2^L(s, x) &= e^{-k_5 \bar{x}} (A_9(s) \cos k_6 \bar{x} + A_{10}(s) \sin k_6 \bar{x}) + \\
 &+ e^{-k_4 \bar{x}} (A_{11}(s) \cos k_8 \bar{x} + A_{12}(s) \sin k_8 \bar{x}) + \\
 &+ e^{k_5 \bar{x}} (A_{13}(s) \cos k_6 \bar{x} + A_{14}(s) \sin k_6 \bar{x}) + \quad (12) \\
 &+ e^{k_7 \bar{x}} (A_{15}(s) \cos k_8 \bar{x} + A_{16}(s) \sin k_8 \bar{x}).
 \end{aligned}$$

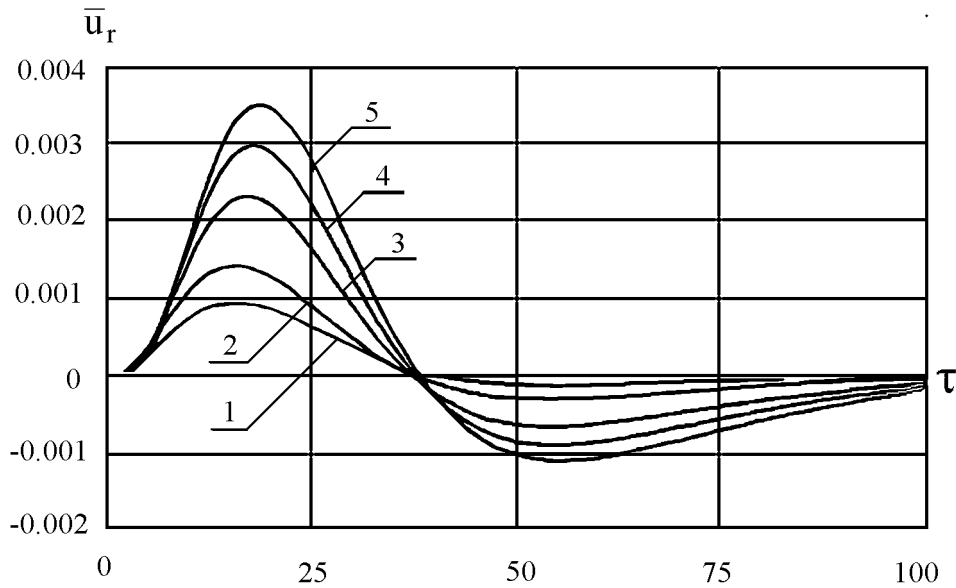


Рис. 1. Изменение радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R_1$ в зависимости от времени τ для различных сечений при $R_2/R_1 = 0.9$:
 1 - $\bar{x}=5$, 2 - $\bar{x}=10$, 3 - $\bar{x}=20$; 4 - $\bar{x}=25$, 5 - $\bar{x}=30$

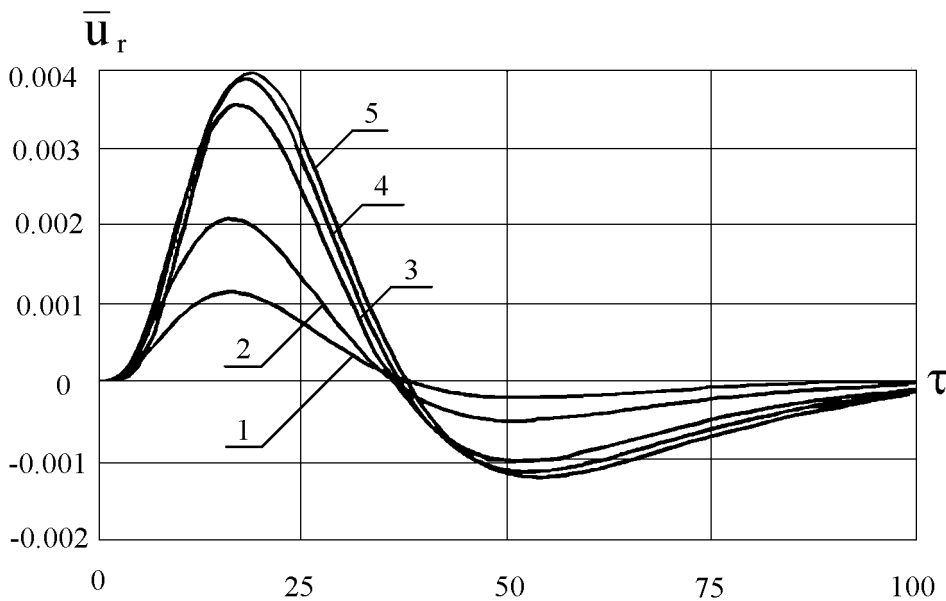


Рис. 2. Изменение радиального перемещения $\bar{u}_r = u_r/R_1$ в зависимости от времени τ для различных сечений при $R_2/R_1 = 1.1$:
 1 - $\bar{x}=5$, 2 - $\bar{x}=10$, 3 - $\bar{x}=20$; 4 - $\bar{x}=25$, 5 - $\bar{x}=30$

Учитывая условия убывания при $|\bar{x}| \rightarrow \infty$ (8), решение уравнения (10) в области $\bar{x} > \bar{x}_2$ принимает вид:

$$p_3^L(s, x) = e^{-k_9 \bar{x}} (A_{17}(s) \cos k_{10} \bar{x} + A_{18}(s) \sin k_{10} \bar{x}) + e^{-k_{11} \bar{x}} (A_{19}(s) \cos k_{12} \bar{x} + A_{20}(s) \sin k_{12} \bar{x}). \quad (13)$$

В решениях (11), (13) $k_m (m = 1, 2, 3, \dots, 12)$ – комплексно-сопряженные корни характеристического уравнения, соответствующие дифференциальному уравнению (10). Скорости и перемещения определяются аналогично.

Подставляя решения в граничные условия (5)-

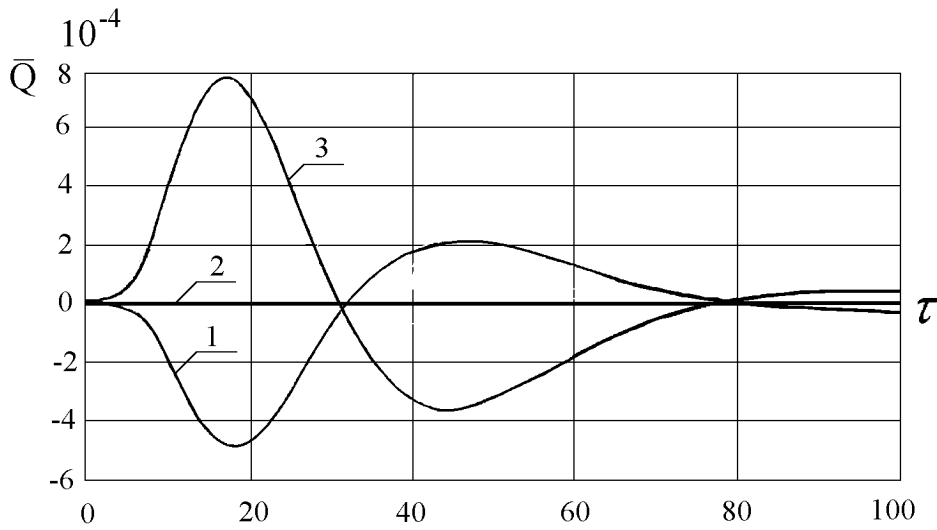


Рис. 3. Изменение перерезывающей силы \bar{Q} в стыке в зависимости от времени τ при $R_2/R_1=0.98$ (кривая 1), при отсутствии стыка $R_2/R_1=1$ (кривая 2) и при $R_2/R_1=1.02$ (кривая 3)

(7), получаем в области изображений систему уравнений для определения коэффициентов $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{20}$:

$$B_1 = B_2 = B_3 = 5,431, \quad k_{01} = k_{02} = k_{03} = 0.6, \\ a_1 = a_2 = a_3 = 0.217810^4, \quad k_{21} = k_{22} = k_{23} = 8.1459, \\ \bar{x}_1 = 10, \quad \bar{x}_2 = 25.$$

$$\sum_{j=1}^{20} A_j(s) e^{m_j \bar{x}} (a_{jn} \cos \lambda_n \bar{x} + b_{jn} \sin \lambda_n \bar{x}) = f_n(s), \quad (14)$$

где первые четыре уравнения ($n = 1, 2, 3, 4$) определяются при $\bar{x} = 0$, еще восемь уравнений ($n = 5, 6, \dots, 12$) определяются в сечении $\bar{x} = \bar{x}_1$, а остальные восемь уравнений ($n = 13, 14, \dots, 20$) – в сечении $\bar{x} = \bar{x}_2$.

В дальнейшем решения были получены для импульса, соответствующего реальному изменению пульсового давления сердца:

$$\bar{p}(\bar{x}, \tau) |_{\bar{x}=0} = \bar{A} \tau^2 e^{-\alpha \tau}, \quad (15)$$

где $\bar{A} = 2.43210^4$, $\alpha = 0.018$.

3. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ И АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Численное обращение преобразования Лапласа реализовано на основе разложений по синусам [8] при следующих параметрах:

$$U_1 = U_2 = U_3 = 0.02191, \\ Re = 2340, \quad A_1 = A_2 = A_3 = 4.073,$$

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 1, 2. Здесь показаны изменения радиального перемещения $u_r = u_r/R_1$ в зависимости от времени τ для различных сечений в оболочке.

На рис. 1 приведены расчеты радиального перемещения \bar{u}_r при отношении радиуса упругой вставки R_2 к радиусу оболочки R_1 , равном 0.9, т. е. $R_1 > R_2$. Кривая 1 соответствует значению радиального перемещения в сечении $\bar{x}=5$ (сечение оболочки до начала вставки), кривая 2 соответствует сечению $\bar{x}=10$ (первый стык между оболочкой и вставкой), кривая 3 соответствует значению $\bar{x}=20$ (сечение принадлежит вставке), кривая 4 соответствует сечению $\bar{x}=25$ (второй стык между оболочкой и вставкой), кривая 5 соответствует сечению $\bar{x}=30$ (сечение оболочки после вставки).

На рис. 2 приведены расчеты радиального перемещения \bar{u}_r в тех же сечениях, но при значениях радиусов $R_1 < R_2$, причем $R_2/R_1 = 1.1$.

При сравнении значений перемещений \bar{u}_r в одинаковых сечениях, но при различных отношениях радиусов оболочки и вставки видно, что поверхность вставки деформируется сильнее при $R_2 > R_1$ (кривые 3 рис. 1, 2). Отсюда следуют рекомендации, что при хирургической замене участка кровеносного сосуда надошивать сосуды с ради-

усом $R_2 < R_1$.

Если сравнивать результаты, полученные для радиального перемещения, с экспериментальными данными задач биомеханики, то кривые рис. 1, 2, которые соответствуют граничным условиям защемления торцов оболочки (8), дают более точное качественное соответствие с данными наблюдений. [7, 11].

Из проведенных расчетов также следует, что в местах резкого изменения толщин имеет место сильная концентрация сдвиговых и изгибных напряжений, как и в случае стыка кровеносных сосудов. На рис. 3 показано изменение перерезывающей силы Q от формы стыка.

Работа выполнена при поддержке Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (Грант 01.07/00079).

1. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем.– М.: Наука, 1967.– 984 с.
2. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.– Киев: Наук. думка, 1989.– 204 с.
3. Селезов И.Т. Волновые процессы в гидродинамических и упругих средах // Прикл. гидромеханика.– 2000.– 2 (74), N 4.– С. 99-118.
4. Селезов И.Т. Исследование неустановившихся волновых движений в гидроупругих системах оболочка–жидкость. // Прикл. проблемы механики тонкостенных конструкций.– М.: Изд. Моск. ун-та,– 2000.– С. 286-305.
5. Селезов И.Т., Звонарева О.В. Распространение неустановившихся гидроупругих волн в полубесконечной кусочно–постоянной цилиндрической оболочке с жидкостью // Динамические системы.– 1999.– Вып. 15.– С. 77-73.
6. Селезов И.Т., Каплун Ю.М. Влияние сужения кровеносного сосуда на распространение пульсового давления крови // Бионика.– 1991.– Вып. 24.– С. 50-54.
7. Физиология кровообращения, регуляция кровообращения (Руководство по физиологии).– Л.: Наука, 1986.– 640 с.
8. Doetsch T. Anleitung zum praktischen Gebrauch der Laplace Transformation. – Muenchen: R. Oldenbourg,– 1956. Русский перевод: Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа.– М.: ГИФМЛ,– 1960.– 208 с.
9. Maxwell J.A., Anliker A.M. The dissipation and dispersion of small waves in arteries and veins with viscoelastic wall properties // Biophys.– 1968.– N 8.– P. 920-950.
10. Moodie E.B., Barday D.W., Tait R.T. A boundary value problems for fluid-filled viscoelastic tubes // Mathematical model.– 1983.– N 4.– P. 195 - 207.
11. Pedley, T J. The fluid mechanics of large blood vessels.– Cambridge, Cambridge University Press,– 1980. Русский перевод: Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.– М.: Мир.– 1983. – 400 с.
12. Selezov I.T., Avramenko O., Fratamico G., Pallotti G., Pettazzoni P. Stress concentration due to advancing heart pulse through a blood vessel joint // J. of Mechanics in Medicine and Biology.– 2001.– Vol. 1, N 2.– P. 79-96.
13. Selezov I.T., Pallotti G., Fratamico G., Pettazzoni P. Viscoelasticity with permanent deformation in investigation of pulse propagation in blood vessels // J. of Mechanics in Medicine and Biology.– 2001.– Vol. 1, N 2.– P. 39-152.
14. Selerov I.T., Zvonareva O.V. Modelling of transient hydroelastic waves in a fluid filled cylindrical shell // Доповіді НАН України.– 1999.– N 7.– С. 66-71.