ISSN 1561-9087 *Прикладна гідромеханіка. 2004. Том 6 (78), N 1. С. 73 – 76*

УДК 536.24

ГРУППОВОЙ АНАЛИЗ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА И ЭНЕРГИИ В КОНИЧЕСКИХ ЗАЗОРАХ И ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ТЕПЛООБМЕНЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ДИСКА

И. В. ШЕВЧУК, А. А. АВРАМЕНКО

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

Получено 18.04.03

С помощью группового анализа получены автомодельные переменные и функции для вращающихся течений с теплообменом в коническом зазоре и нестационарного теплообмена вращающегося диска. Рассчитанные параметры профилей скорости и температуры, а также числа Нуссельта хорошо согласуются с известными экспериментальными данными.

За допомогою групового аналізу отримані автомодельні змінні та функції для обертових течій з теплообміном у конічному зазорі та нестаціонарного теплообміну обертового диску. Розраховані параметри профілів швидкості та температури, а також числа Нуссельта добре узгоджуються з відомими експериментальними даними.

Using group analysis, self-similar variables and functions for rotating flows with heat transfer in a conical gap and transient heat transfer of a rotating disk were obtained. Computed parameters of velocity and temperature profiles, as well as the Nusselt numbers, agree well with experimental data.

ВВЕДЕНИЕ

Теплообмен и гидродинамика в зазорах между диском и конусом, касающимся диска своей вершиной, являются важной фундаментальной и прикладной задачей [1–4]. Течения в зазоре между вращающимся конусом и неподвижным диском используются в вискозиметрии и медицине [1–3]. Метод разложения в ряд по малому параметру позволил получить теоретическое решение упрощенных уравнений Навье-Стокса для малых углов конусности зазора (менее 5^o) [2, 3]. Ни одна из известных работ не содержит данных для одновременно вращающихся диска и конуса, а также результатов для теплообмена.

Нестационарный теплообмен вращающихся дисков имеет место в системах охлаждения дисков турбомашин, компьютеров и других [5]: нестационарными являются процессы при включении или выключении устройств и ряд методик определения коэффициентов теплоотдачи диска.

Задачей настоящей работы является получение автомодельной формы для стационарных уравнений Навье-Стокса и энергии для конического зазора, а также для нестационарного уравнения энергии для вращающегося диска.

1. ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Уравнения Навье-Стокса, неразрывности и теплового пограничного слоя в осесимметричной постановке для цилиндрических координат имеют вид

$$v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+ +\nu\left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

$$v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_r v_\varphi}{r}= =\nu\left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right), \quad (2)$$

$$v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+ +\nu\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right), \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t}+v_r\frac{\partial T}{\partial r}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}=a\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Для обеих задач уравнения (1)–(4) стационарны;

для конического зазора пренебрегаем также производной по времени t в уравнении (5). Граничные условия для задачи в коническом зазоре имеют вид $z=0$:

$$v_r=0, v_z=0, v_\varphi=\Omega r, T_w-T_\infty=c_0 r^{n_*}, \quad (6)$$

$z=h$:

$$v_r=0, v_z=0, v_\varphi=\omega r, T_w=T_\infty. \quad (7)$$

Здесь v_r, v_φ и v_z – составляющие скорости для цилиндрических координат r, φ и z соответственно (на диске $z=0$); p – статическое давление; T – температура; Ω и ω – угловые скорости вращения диска и конуса, соответственно; $h=h(r)$ – высота зазора; ν и a – кинематическая вязкость и температуропроводность; индексы "w" и "∞" означают условия на диске и на достаточном удалении от него; c_0 и n_* – константы.

Дифференциальные уравнения в частных производных (1)–(5) с помощью автомодельных переменных можно редуцировать к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно легко решаемой численно с помощью прикладных математических пакетов ("Mathcad" и др.) [4–8]. Для нахождения автомодельных переменных используем инфинитезимальный генератор, который описывает симметрии уравнений движения и теплообмена (1)–(5) в цилиндрических координатах [7]:

$$q=\left[C_1 2t+C_6\right]\partial_t+C_1 r\partial_r+\left[C_1 z+C_3+C_7 z\right]\partial_z-$$
$$-C_1 v_r\partial_{v_r}+\left[C_7 v_z-C_1 v_z\right]\partial_{v_z}-C_1 v_\varphi\partial_{v_\varphi}+$$
$$+\left[-C_1 NT+C_7 T\right]\partial_T+\left[C_4\tau(t)-C_1 2p\right]\partial_p, \quad (8)$$

где N – произвольная константа, τ – произвольная функция времени, C_1, C_3, C_4, C_6 и C_7 – константы, характеризующие различные типы симметрий.

Для построения автомодельной переменной $\eta(r,z)$ необходимо на основе q_1 записать уравнение в частных производных, содержащее только независимые переменные [7]:

$$r\frac{\partial\eta(r,z)}{\partial r}+z\frac{\partial\eta(r,z)}{\partial z}=0. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) методом характеристик дает

$$\eta=\frac{z}{r}. \quad (10)$$

Аналогичным образом находим выражения для автомодельных функций, выбрав в качестве параметрической переменной маршевую координату r:

$$F(\eta)=\frac{v_r r}{\nu}, G(\eta)=\frac{v_\varphi r}{\nu}, H(\eta)=\frac{v_z r}{v},$$
$$P(\eta)=\frac{pr^2}{\rho\nu^2}, \Theta(\eta)=\frac{T-T_\infty}{T_w-T_\infty}. \quad (11)$$

Подставляя выражения (11) в уравнения (1)–(5) и опуская члены, содержащие производные по r, имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями:

$$F^2+G^2+2P+F'L+\eta P'+F''M=0, \quad (12)$$

$$G'L+G''M=0, \quad (13)$$

$$P'-H(1+F)-H'L-H''M=0, \quad (14)$$

$$H'-\eta F'=0, \quad (15)$$

$$\Theta''=\mathrm{Pr}\left[n_* F\Theta+\Theta'(H-\eta F)\right], \quad (16)$$

$\eta=0$:

$$F=H=0, G=G_0, \Theta=1, \quad (1)$$

$\eta=\eta_1$:

$$F=H=0, G=G_1, \Theta=0, \quad (2)$$

где $M=1+\eta^2$; $L=3\eta+\eta F-H$; $G_0=\mathrm{Re}_\Omega$; $G_1=\mathrm{Re}_\omega$; $\mathrm{Re}_\Omega=\Omega r^2/\nu$; $\mathrm{Re}_\omega=\omega r^2/\nu$; $\eta_1=h/r$; $\mathrm{Pr}=\nu/a$ – число Прандтля. Индексы "0" и "1" означают условия при $\eta=0$ и $\eta=1$ соответственно. Здесь и ниже штрихи обозначают производные по координате η. Локальное число Нуссельта рассчитывается по соотношениям:

$$\mathrm{Nu}=-\Theta'_{\eta=0}, \mathrm{Nu}=K_1\mathrm{Re}_\omega^{1/2}, \quad (19)$$

где $\mathrm{Nu}=q_w r/[\lambda(T_w-T_\infty)]$; q_w – тепловой поток на диске; λ – коэффициент теплопроводности.

Система (12)-(14) решалась с помощью пакета MathCAD при $\mathrm{Re}=1$, $\eta_1=0.0698$, $\mathrm{Pr}=0.71$ (воздух), где $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_\omega\eta_1^2/12$ или $\mathrm{Re}=\mathrm{Re}_\Omega\eta_1^2/12$.

Точность моделирования составляющих скорости иллюстрируется результатами расчета угла закрутки потока $\varphi_w=\mathrm{arctg}\,(-F'_w/G'_w)$ на поверхности неподвижного диска при вращающемся конусе. Расчетные данные хорошо согласуются с экспериментальными [2] (рис. 1).

Как следует из рис. 2, при вращающемся конусе и неподвижном диске течение является центробежным на конусе и центростремительным на диске (кривая *1*); при вращающемся диске и неподвижном конусе направление течений изменяется

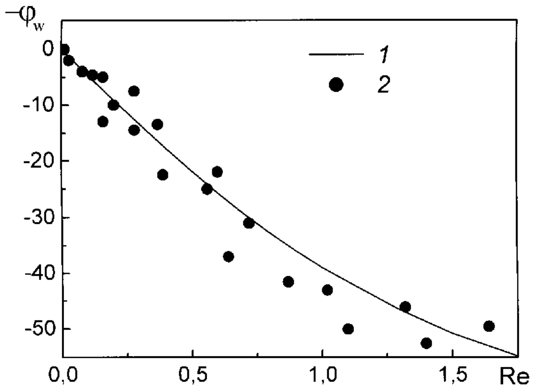

Рис. 1. Угол закрутки потока на поверхности неподвижного диска при вращающемся конусе: *1* – уравнения (12)-(15), *2* – эксперимент [2], $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_\omega \eta_1^2/12$

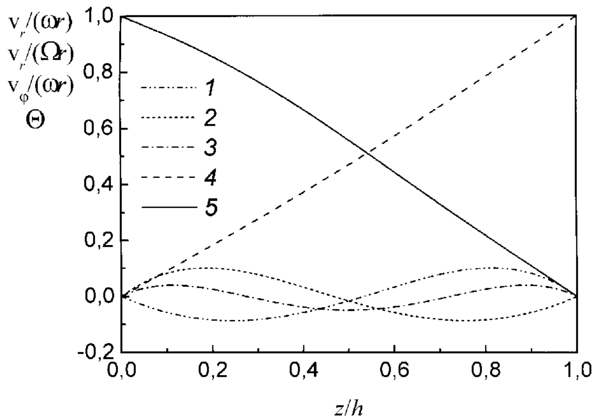

Рис. 2. Профили радиальной (*1*–*3*), тангенциальной (*4*) скорости и температуры (*5*) в зазоре при $\eta_1 = 0.0698$, $\mathrm{Re} = 1$: *1* – $v_r/(\omega r)$ при $\mathrm{Re}_\omega = 2463$ и $\Omega = 0$; *2* – $v_r/(\Omega r)$ при $\mathrm{Re}_\Omega = 2463$ и $\omega = 0$; *3* – $v_r/(\omega r)$ при $\mathrm{Re}_\omega = -\mathrm{Re}_\Omega = 2463$; *4* – $v_\varphi/(\omega_r)$ при $\mathrm{Re}_\omega = 2463$ и $\Omega = 0$; *5* – Θ при $Re_\omega = 2463$ и $\Omega = 0$, $\mathrm{Pr} = 0.71$, $n_* = 2$.

на противоположное (кривая *2*); при противоположно вращающихся диске и конусе течение является центробежным вблизи обеих поверхностей и центростремительным у середины зазора (кривая *3*). Тангенциальная компонента скорости изменяется практически линейно между значениями на границах зазора, а безразмерная температура монотонно убывает от 1 на диске до 0 на конусе (см. рис. 2).

Для неподвижного диска при вращающемся конусе получено $\mathrm{Nu} = 15.28, 13.40, 9.35$ и $K_1 = 0.308, 0.270, 0.188$ при $n_* = -1, 0, 2$ соответственно, что сопоставимо с данными для свободного вращающегося диска, где $K_1 = 0.189, 0.326, 0.519$ при тех же n_* [7]. Константа K_1 уменьшается с ростом n_*, так как знаки v_r и dT_w/dr противоположны. Для вращающегося диска при неподвижном конусе получено $\mathrm{Nu} = 13.33, 15.35, 19.13$ и $K_1 = 0.269, 0.309, 0.386$ при тех же n_*, то есть в этом случае при увеличении n_* константа K_1 возрастает, хотя и медленнее, чем в случае свободного вращающегося диска. При противоположно вращающихся диске и конусе имеем $\mathrm{Nu} = 14.21, 14.44, 14.85$ и $K_1 = 0.286, 0.291, 0.299$ при $n_* = -1, 0, 2$, то есть число Нуссельта растет с ростом n_*.

Для построения автомодельных форм нестационарного теплообмена свободного вращающегося диска логично использовать ту же симметрию q_1 инфинитезимального генератора (8), но в качестве параметрической переменной использовать время t. Повторяя расчеты автомодельных форм по схеме, приведенной выше, находим

$$\eta = z/(\nu t)^{1/2}, H(\eta) = v_z(t/\nu)^{1/2}. \qquad (20)$$

В результате автомодельное уравнение теплового пограничного слоя для изотермического диска и граничные условия имеют вид

$$\Theta'' = \mathrm{Pr}[g_*\Theta + \Theta'(H - \eta/2)], \qquad (21)$$

$$\Theta = 1|_{\eta=0}\, , \; \Theta = 0|_{\eta\to\infty}\, . \qquad (22)$$

Здесь

$$g_* = \left(\frac{t}{F_t}\right) \cdot \left(\frac{dF_t}{dt}\right), F_t(t) = \frac{T_w(t) - T_\infty}{T_{w,i} - T_\infty},$$

где $T_{w,i} = \mathrm{const}$ – температура диска в начальный момент времени, штрихи обозначают производные по η.

Для полубесконечного тела в направлении z при отсутствии радиальной теплопроводности имеем [9]:

$$F_t(t) = \frac{T_w(t) - T_\infty}{T_{w,i} - T_\infty} = \exp(\gamma^2) \cdot \mathrm{erfc}\,(\gamma),$$

$$g_* = \gamma^2 - \gamma/(\pi^{1/2} F_t). \qquad (23)$$

Выражения для константы K_1 и параметра γ следующие:

$$K_1 = -\left(\frac{d\Theta}{d\zeta}\right)\bigg|_{\zeta=0} = \frac{1}{\sqrt{\omega t}}\left(\frac{d\Theta}{d\zeta}\right)\bigg|_{\eta=0},$$

$$\gamma = \frac{K_1}{\mathrm{Pr}^{1/2}}\left(\frac{a_w}{a}\right)^{1/2}\frac{\lambda}{\lambda_w}\sqrt{\Omega t}, \qquad (24)$$

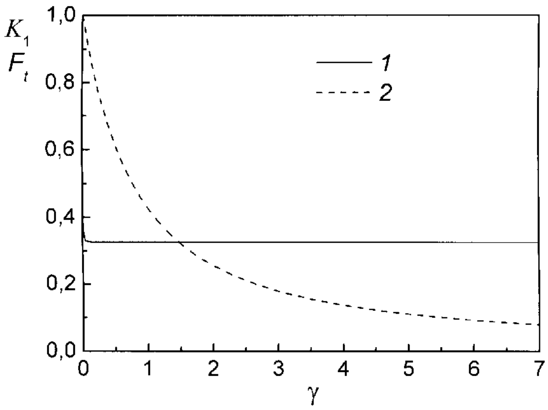

Рис. 3. Изменение K_1 и F_t в зависимости от γ:
1 – K_1; *2* – $F_t(t)$, формула (23)

где $\zeta = z\sqrt{\Omega/\nu}$; индекс "$w$" означает физические свойства диска. Функция $H(\eta)$ в выражении (20) не зависит от времени и находится в результате решения стационарной автомодельной системы уравнений Навье-Стокса для вращающихся дисков [4, 5, 8], в которой время t играет роль параметрической обезразмеривающей переменной вместо $1/\Omega$. Граничным условием для тангенциальной компоненты скорости на диске является $v_\varphi t/r = \Omega t$ вместо $v_\varphi/(\Omega r) = 1$.

Расчеты проведены при $\omega = 52.36$ 1/с (500 об/мин), $\lambda_w = 0.19$ Вт/(м^2·К), $a_w = 1.086 \cdot 10^{-7}$ м^2/с (плексиглас); для воздуха [8] $\lambda = 0.02624$ Вт/(м^2·К), $a = 2.216 \cdot 10^{-5}$ м^2/с (воздух). При вычислении γ использовано стационарное значение $K_1 = 0.326$, чему соответствует $\gamma = 0.0768\sqrt{\Omega t}$. Как показывают данные рис. 3, величина K_1 (и число Нуссельта) принимает значения, соответствующие стационарным условиям, очень быстро, то есть при $\gamma \approx 0.122$ или $t \approx 19$ с; при этом $F_t(t) \approx 0.876$. Это подтверждает обоснованность использования нестационарных методик измерения коэффициента теплоотдачи, считающегося при этом стационарным параметром.

ВЫВОДЫ

1. Переход к автомодельным переменным и функциям для вращающихся течений с теплообменом в коническом зазоре и нестационарного теплообмена вращающегося диска обеспечивает возможность адекватного и точного моделирования параметров этих задач.

2. Для конического зазора рассчитаны течения при вращающемся диске и неподвижном конусе, вращающемся конусе и неподвижном диске, при противоположно вращающихся конусе и диске.

3. Для нестационарного теплообмена вращающегося диска показано, что коэффициент теплоотдачи очень быстро становится стационарной функцией при зависящих от времени температуре диска и потока.

1. *Mooney M., Ewart R. H.* The conicylindrical viscometer // Physics.– 1934.– 5.– P. 350–354.
2. *Sdougos H. P., Bussolari S. R., Dewey C. F.* Secondary flow and turbulence in a cone-and-plate device // Journal of Fluid Mechanics.– 1984.– 11, N 4.– P. 289–295.
3. *Buschmann M.H.* A solution for the flow between a cone and a plate at low Reynolds number // Journal of Thermal Science.– 2002.– 138.– P. 379–404.
4. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя.– М.: Наука, 1974.– 712 с.
5. *Дорфман Л. А.* Гидродинамическое сопротивление и теплоотдача вращающихся тел.– М.: Физматгиз, 1960.– 260 с.
6. *Себиси Т., Брэдшоу П.* Конвективный теплообмен. Физические основы и вычислительные методы.– М.: Мир, 1987.– 590 с.
7. *Авраменко А.А., Басок Б. И., Соловьев Е.Н.* Симметрии уравнений конвективного теплообмена и гидродинамики.– Киев: Наукова думка, 2001.– 94 с.
8. *Шевчук И.В.* Ламинарный теплообмен вращающегося диска при его перпендикулярном обдуве: приближенное аналитическое решение // Теплофизика высоких температур.– 2002.– 40, N 5.– С. 739–747.
9. *Олвер П.* Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1989.– 639 с.
10. *Лыков А. В.* Теория теплопроводности.– М.: Высшая школа, 1967.– 600 с.