

Напряженное состояние многослойных оболочек вращения типа пневматических шин, контактирующих с жестким основанием

Е. И. Беспалова, Г. П. Урусова

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Предложена методика решения контактной задачи для предварительно нагруженных анизотропных оболочек вращения применительно к расчету напряженного состояния пневматических шин. Используются основные соотношения неклассической модели оболочек с учетом всех видов поперечной деформации. Предварительные напряжения в оболочке, вызванные различного рода осесимметричными нагрузками, учитываются как параметрические члены при линеаризации исходных геометрически нелинейных уравнений среднего изгиба. Для решения соответствующих двумерных краевых задач применяется комбинация аналитических и численных подходов. На примере конструкции типа пневматической шины исследуется влияние внутреннего давления на величину зоны ее контакта с жестким основанием, нагрузочную характеристику и статическую жесткость.

Ключевые слова: оболочки вращения, слоистость, анизотропия, контактное взаимодействие, пневматическая шина, обжатие, жесткое основание, численно-аналитические подходы, анализ расчетов.

Введение. Одной из основных задач механики пневматических шин является определение их напряженно-деформированного и теплового состояния в реальных режимах работы, т.е. при всем комплексе специфических нагрузок, вызванных движением по дорожному тракту с учетом его профиля, механических свойств, неровностей и других особенностей. Вопросам рационального проектирования и построения расчетных схем шин, изучения их работоспособности и прогнозирования эксплуатационных свойств, разработке новых моделей деформирования, адекватных исследуемым процессам в шине, посвящены многочисленные публикации, например [1–4], что позволит оценить сложность и актуальность этих задач.

В строгой постановке задачи механики пневматических шин классифицируются как нестационарные связанные задачи термовязкоупругости, которые весьма сложны в плане построения математической модели, особенно ее реализации [5]. Один из рациональных подходов к анализу работы шины базируется на разумном упрощении расчетных схем и математических моделей путем последовательного учета воздействующих нагрузок (внутреннее давление и центробежные силы, статический контакт с дорожным покрытием, силы инерции и другие виды нагрузок) [2]. При этом основные количественные результаты, необходимые для конструирования шины и анализа ее нагрузочной характеристики, статической жесткости, уровня нагруженности, могут быть получены при исследовании контактного взаимодействия неподвижной шины с дорожным покрытием. Такие исследования проводились в рамках моделей разного уровня сложности, в частности по одномерным моделям балки и кольца на упругом основании, безмоментной модели сетчатых оболочек, классической модели, модели типа Тимошенко и модели оболочек с учетом поперечных сдвигов и обжатия

[1–4, 6, 7]. В последнее время расчет шин все чаще проводится на основе пространственной постановки задачи с реализацией по методу конечных элементов [8, 9]. Такой подход, дающий достоверные результаты, как правило, при весьма существенной дискретизации области, целесообразно использовать для окончательной отработки конструктивной схемы шины. На этапе ее проектирования удобнее использовать более простые подходы, построенные по двумерным моделям с привлечением численно-аналитических методик [3, 6]. Ниже описан один из таких подходов к решению контактных задач для оболочек вращения общего вида, разработанный на базе неклассической модели с учетом всех видов поперечной деформации. Работоспособность этого подхода иллюстрируется на примере обжатия типовой радиальной шины, контактирующей с жестким основанием.

1. Постановка задачи и методика ее решения. Рассматриваются многослойные оболочки вращения сложной формы меридиана, собранные из анизотропных слоев переменной толщины и жестко связанные между собой в единый пакет, что исключает их взаимное проскальзывание и отрыв. Вся оболочка как трехмерное тело отнесена к пространственной криволинейной системе координат s, θ, ζ , где s – длина дуги меридиана; θ – центральный угол в поперечном сечении; ζ – координата, отсчитываемая по нормали к выбранной координатной поверхности $\zeta = \text{const}$. На краях оболочки $s = s_0$ и $s = s_R$ допускаются любые виды граничных условий, сформулированные в соответствии с характером нагружения и смещения контура.

Данная оболочка вращения под действием некоторой вертикальной силы P контактирует с абсолютно жестким плоским основанием. Кроме того, она находится в осесимметричном статическом поле, вызванном различными комбинациями следующих воздействий:

нормальных $q_\zeta(s)$ и меридиональных $q_s(s)$ нагрузок, приложенных в точках координатной поверхности $\zeta = \text{const}$;

контурных усилий и моментов, соответствующих принимаемой модели деформирования и действующих на краях $s = s_0$ и $s = s_R$;

сосредоточенных усилий и моментов, аналогичных контурным, но приложенных в некоторых меридиональных сечениях оболочки $s = s_r = \text{const}$ ($r = 1, R - 1$);

теплового нагрева, определяемого функцией $T(s, \zeta)$, линейно изменяющейся по толщине каждого слоя оболочки.

Для определения области контакта и контактного давления в такой предварительно напряженной оболочке используется достаточно распространенный в механике деформируемых систем подход, основанный на линеаризации исходных нелинейных соотношений выбранной оболочечной модели деформирования. При этом принимаются следующие предположения:

а) исходная задача формулируется на основе соотношений геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении (теория среднего изгиба) [10];

б) для всего пакета слоев оболочки в целом принимается неклассическая модель деформирования с учетом поперечных сдвигов и обжатия при линейной аппроксимации всех компонент вектора перемещений по толщине [11];

в) возмущения оболочки от контактного взаимодействия с основанием принимаются меньшими, чем от осесимметричных воздействий (деформации от контакта накладываются на конечные (или малые) деформации от осесимметричных нагрузок);

г) в зоне контакта учитываются лишь нормальные компоненты контактного давления ($q_{c\xi}(s, \theta) \neq 0$, $q_{cs}(s, \theta) = 0$, $q_{c\theta}(s, \theta) = 0$);

д) кинематическое условие контакта принимается в виде

$$u_y(s, \theta) = \Delta(s, \theta), \quad (1)$$

где $u_y(s, \theta)$ – сумма проекций смещений внешней поверхности оболочки на ось y , нормальную к опорной плоскости; $\Delta(s, \theta)$ – исходный зазор, определяемый формой внешней поверхности оболочки.

В соответствии с предположениями а) и б) исследуемое состояние оболочки описывается двухмерной нелинейной краевой задачей, которую в принятой системе координат s, θ на поверхности $\xi = \text{const}$ условно можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{N}}{\partial s} = L\vec{N} + \vec{G} + \vec{q}^{con}, \quad s \in (s_{r-1}, s_r), \quad r = \overline{1, R}, \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (2)$$

$$S_r \vec{N} = \vec{F}_r^c, \quad s = s_r, \quad r = \overline{1, R-1}; \quad (3)$$

$$B_r \vec{N} = \vec{b}_r, \quad s = s_r, \quad r = 0; R \quad (4)$$

с условиями периодичности в окружном направлении – $\vec{N}(s, \theta + 2\pi) = \vec{N}(s, \theta)$, где $\vec{N} = \{N_s, N_{s\theta}, Q_s, M_s, M_{s\theta}, P_s, u, v, w, \psi_s, \psi_\theta, \psi_\xi\}^T$ – искомая вектор-функция, компоненты которой имеют следующий физический смысл: N_s , $N_{s\theta}$ и Q_s – соответственно нормальное, сдвигающее и перерезывающее усилия в сечении $s = \text{const}$; M_s и $M_{s\theta}$ – изгибающий и крутящий моменты в этом же сечении; P_s – момент первого порядка касательных напряжений поперечного сдвига; u, v, w – перемещения точек координатной поверхности в направлениях s, θ, ξ соответственно; ψ_s, ψ_θ – полные углы поворота первоначально прямолинейного элемента, которые отождествляются с поперечными сдвигами; ψ_ξ – поперечная нормальная деформация; матричный дифференциальный оператор L построен по основным соотношениям принятой модели деформирования [11] и имеет второй порядок по переменной θ ; компоненты вектора $\vec{G} = \{g_m\}$ – квадратичные функции искомых компонент вектора \vec{N} , соответствующие геометрически нелинейной теории оболочек в квадратичном приближении [10]; S_r и B_r – матрицы, определяющие сосредоточенные воздействия в сечении $s = s_r$ ($r = 1, R-1$) и вид граничных условий на контуре $s = s_r$ ($r = 0; R$); $\vec{q}^0, \vec{q}^{con}, \vec{F}_r^c$ и \vec{b}_r – векторы, характеризующие соответственно осесимметричные

распределенные нагрузки и температурные поля, неизвестное контактное давление как реакцию основания, сосредоточенные усилия и моменты в сечении $s = s_r$ ($r = \overline{1, R-1}$) и контурные воздействия ($r = 0; R$).

Согласно предположению в) исследуемое состояние оболочки можно представить в виде

$$\vec{N} = \vec{N}^0 + \vec{N}^{con}, \quad (5)$$

где вектор-функция \vec{N}^0 характеризует напряженно-деформированное состояние при осесимметричных воздействиях (доконтактное состояние), а \vec{N}^{con} – контактное взаимодействие оболочки с основанием.

В соответствии с этим исходная нелинейная задача (2)–(4) сводится к двум следующим связанным задачам относительно векторов \vec{N}^0 и \vec{N}^{con} :

задача о деформировании оболочки при заданных осесимметричных нагрузках

$$\frac{d\vec{N}^0}{ds} = L^0 \vec{N}^0 + \vec{G}(s, \vec{N}^0, \dots) + \vec{q}^0, \quad s \in (s_{r-1}, s_r), \quad r = \overline{1, R}; \quad (6)$$

$$S_r \vec{N}^0 = \vec{F}_r^c, \quad s = s_r, \quad r = \overline{1, R-1}; \quad (7)$$

$$B_r \vec{N}^0 = \vec{b}_r, \quad s = s_r, \quad r = 0; R \quad (8)$$

(L^0 – матричный дифференциальный оператор нулевого порядка);
контактная задача для предварительно напряженной оболочки

$$\frac{\partial \vec{N}^{con}}{\partial s} = \tilde{L} \vec{N}^{con} + \vec{q}^{con}, \quad s \in (s_{r-1}, s_r), \quad r = \overline{1, R}, \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad (9)$$

$$S_r \vec{N}^{con} = 0, \quad s = s_r, \quad r = \overline{1, R-1}; \quad (10)$$

$$B_r \vec{N}^{con} = 0, \quad s = s_r, \quad r = 0; R \quad (11)$$

с условиями периодичности по θ , где \tilde{L} – матричный дифференциальный оператор, соответствующий оператору L в (2), который в результате линеаризации функции \vec{G} относительно вектора \vec{N}^{con} содержит компоненты вектора \vec{N}^0 в качестве параметрических членов; вектор \vec{q}^{con} содержит неизвестную нормальную составляющую контактного давления $q_{c\dot{c}}(s, \theta) \neq 0$.

Полученные задачи (6)–(8) и (9)–(11) в методическом плане можно трактовать как два последовательных этапа решения исходной задачи в целом.

На первом этапе определяется напряженно-деформированное состояние оболочки при заданных осесимметричных воздействиях. В общем случае конечных деформаций эта задача является нелинейной, и для ее решения могут быть использованы методы квазилинеаризации или простой итерации [12] с последующим численным решением последовательности линеаризованных задач. В данной работе исследование ограничено нагрузками, вызывающими малые деформации оболочки, так что задача (6)–(8) может рассматриваться в линейной постановке. Для ее решения используется численный метод ортогональной прогонки, хорошо зарекомендовавший себя при решении статических задач теории оболочек по разным моделям деформирования [7, 11].

Для определения области контакта и контактного давления в такой предварительно нагруженной оболочке (второй этап решения задачи) применяется методика, разработанная ранее для ненагруженных оболочек [13]. Методика основана на использовании метода последовательных приближений для определения области контакта, обобщении метода фиктивных сил строительной механики для нахождения контактного давления как реакции связей, численно-аналитического метода решения задач статики оболочек вращения. Приведем общую схему решения контактной задачи в предположении симметрии оболочки относительно меридионального сечения $s = 0$.

На начальном шаге метода последовательных приближений ($n = 0$) выбирается некоторая область контакта $\Omega_{cn} = \{s, \theta: |s| \leq s_n^*; |\theta| \leq \theta_n^*\}$, заведомо включающая искомую область ($\Omega_c \in \Omega_{cn}$), а неизвестное контактное давление $q_{c\zeta n}(s, \theta)$ принимается в ней в приближенном виде:

$$q_{c\zeta n}(s, \theta) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \alpha_{ij} q_{si}(s) q_{\theta j}(\theta), \quad (12)$$

где

$$q_{si}(s) = \begin{cases} \varphi_i(s), & |s| \leq s_n^*; \\ 0, & |s| > s_n^*; \end{cases} \quad q_{\theta j}(\theta) = \begin{cases} \psi_j(\theta), & |\theta| \leq \theta_n^*; \\ 0, & |\theta| > \theta_n^*; \end{cases} \quad (13)$$

α_{ij} – неизвестные коэффициенты; $q_{si}(s)$, $q_{\theta j}(\theta)$ – кусочно-заданные (локализованные) функции своих переменных; $\varphi_i(s)$, $i = 1, 2, \dots$, $\psi_j(\theta)$, $j = 1, 2, \dots$ – некоторые полные системы функций на отрезках $|s| \leq s_n^*$ и $|\theta| \leq \theta_n^*$ соответственно.

Для определения коэффициентов α_{ij} строится $M = I \times J$ вспомогательных задач вида (9)–(11) при фиктивных нагрузках $f_{ij}(s, \theta) = q_{si}(s) q_{\theta j}(\theta)$, $i = 1, I$; $j = 1, J$, соответствующих базисным функциям в (13).

Численно-аналитический подход к решению каждой вспомогательной двумерной краевой задачи основан на разложении всех факторов напряженно-деформированного состояния \vec{N}_{ij}^{con} в тригонометрические ряды Фурье по окружной координате θ :

$$\vec{N}_{ij}^{con} = \sum_{k=0}^{\infty} \vec{N}_{ijk}^{con}(s) \begin{Bmatrix} \cos k\theta \\ \sin k\theta \end{Bmatrix} \quad (14)$$

и сведения ее для каждой k -й гармоники ряда (14) к одномерной краевой задаче 12-го порядка относительно неизвестных функциональных коэффициентов \vec{N}_{ijk}^{con} :

$$\frac{d\vec{N}_{ijk}^{con}}{ds} = \tilde{L}_k \vec{N}_{ijk}^{con} + \vec{q}_{ijk}, \quad s \in (s_{r-1}, s_r), \quad r = \overline{1, R}; \quad (15)$$

$$S_r \vec{N}^{con} = 0, \quad s = s_r, \quad r = \overline{1, R-1}; \quad (16)$$

$$B_{kr} \vec{N}_{ijk}^{con} = 0, \quad s = s_r, \quad r = 0; R \quad (17)$$

($\vec{q}_{ijk} = \{0, 0, q_{si}(s)q_{\theta jk}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}^T$; $q_{\theta jk}$ – коэффициенты разложения функций $q_{\theta j}(\theta)$ в ряд Фурье).

На основе полученных решений вспомогательных задач, кинематического условия контакта (1), условия статической эквивалентности заданной силы и контактного давления строится система алгебраических уравнений относительно искомых коэффициентов α_{ij} с применением коллокационных или интегральных подходов [13–15]. Решение этой системы совместно с представлением (12) определяет приближенное распределение искомого контактного давления в фиксированной области Ω_{cn} . Условие неотрицательности найденного давления служит критерием для уточнения области Ω_{cn} . Последующее применение описанных процедур к уточненной области Ω_{cn+1} проводится вплоть до получения устойчивых значений всех искомых факторов контактной задачи.

Ниже с помощью разработанной методики определяется напряженное состояние пневматической шины при ее контакте с плоским основанием.

2. Анализ обжатия оболочки-шины жестким основанием. Пневматическая шина является весьма сложным устройством с широким спектром режимов нагружения. Она может рассматриваться как слоистая резинокордная конструкция, образованная слоями из текстильного или металлического корда с резиновыми прослойками (рис. 1,а). Расчетная схема шины вписывается в рассмотренный класс оболочек вращения. Сечения оболочки-шины $\theta = \text{const}$ и $s = \text{const}$ представлены на рис. 1,а,б. Механические свойства каждого слоя шины как композитного материала определяются осредненно по характеристикам составляющих его компонентов (армирующей нити и заполнителя) с помощью известных формул однонаправленного армированного слоя [3]. В результате такого осреднения каждый слой оболочки является однородным и ортотропным (резинокорд) или изотропным (различные типы резин). Если направление укладки нити в слое ориентировано по отношению к образующей оболочки под некоторым углом ψ , то материал слоя в геометрической системе координат принимается как конструктивно анизотропный с одной плоскостью упругой симметрии.

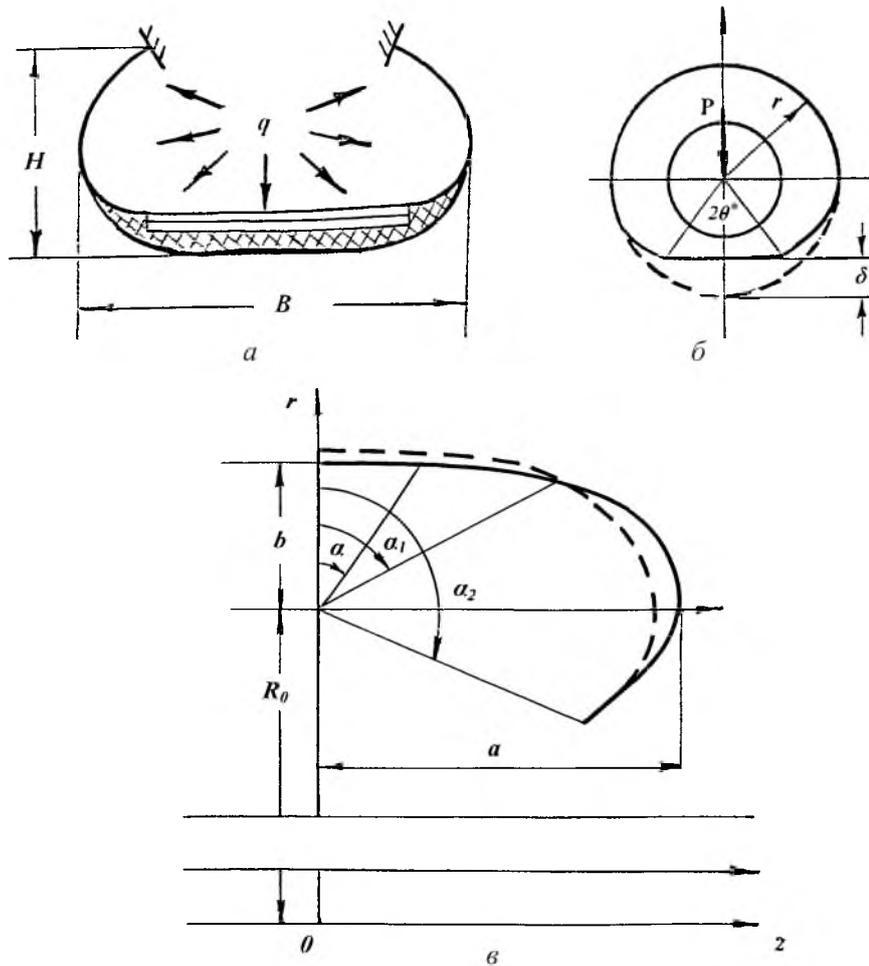


Рис. 1. Внутренняя поверхность оболочки-шины: a – сечение $\theta = \text{const}$; \bar{b} – сечение $s = \text{const}$; ϵ – исходная (сплошная линия) и деформированная (штриховая линия) формы образующей меридиана.

Из широкого спектра нагрузок, действующих на оболочку-шину при обжатии ее жестким основанием, рассмотрим случаи внутреннего давления q , обеспечивающего работоспособность шины, и вертикальной силы P , обусловленной весом автомобиля и груза.

В качестве одного из расчетных вариантов приведена типовая конструкция легкой радиальной шины с параметрами $H = 0,065$ м, $B = 0,16$ м (рис. 1,а). Внутренняя поверхность конструкции моделируется тороидальной оболочкой эллиптического сечения, геометрия образующей которой задается в параметрическом виде

$$r = r(\alpha) = R_0 + b \cos \alpha, \quad z = z(\alpha) = a \sin \alpha,$$

где a и b – полуоси эллипса; R_0 – расстояние центра эллипса от оси вращения; α – угол, характеризующий текущее положение точки на меридиане $\alpha \in [\alpha_0, \alpha_2]$ (рис. 1,б).

Структура оболочки-шины по толщине на разных участках меридиана является различной (упрощенная схема ее меридионального сечения представлена на рис. 1,а). Ввиду симметрии шины относительно сечения $\alpha = 0$ меридиан оболочки разбивается на два участка: первый – беговая часть $\alpha \in [0, \alpha_1]$, второй – боковина $\alpha \in [\alpha_1, \alpha_2]$. Беговая часть состоит из четырех слоев: брекера, образованного двумя слоями металлокорда, которые собраны в пакет перекрестным способом; протектора, представляющего собой массивный слой резины, и каркаса, переходящего в боковину. Боковина шины принимается состоящей из одного слоя каркаса. Способ укладки слоев в пакете и их механико-геометрические характеристики приведены в таблице.

Механико-геометрические характеристики материалов слоев, их толщины и ориентация укладки в пакете

Элемент шины	№ слоя	h , мм	f , мм ²	n , мм ⁻¹	E_c , Н/мм ²	ν_c	E_r , Н/мм ²	ν_r	ψ , град
Каркас	1	0,75	0,32	1,04	1300,0	0,33	5	0,49	0
Брекер	2	1,40	0,24	0,624	17145,5	0,33	5	0,49	70
	3	1,40	0,24	0,624	17145,5	0,33	5	0,49	-70
Протектор	4	6,45	–	–	–	–	5	0,49	0

Примечание. f – площадь поперечного сечения армирующей нити; n – частота армирования; h – толщина слоя; E_c , E_r и ν_c , ν_r – модули Юнга и коэффициенты Пуассона для нити (индекс c) и заполнителя (индекс r). Приведенные данные соответствуют типичным свойствам шинных резин и марок кордов [2, 3].

Крепление шины к ободу колеса моделируется условиями жесткого закрепления. Расчеты проводили при следующих исходных данных: $\alpha_1 = 0,95$ рад; $\alpha_2 = 2,168$ рад; $a = 0,0846$ м; $b = 0,043$ м; $R_0 = 0,217$ м.

Результаты определения предварительного напряженного состояния шины при внутреннем давлении 0,15 МПа представлены на рис. 2. Усилие $N_\theta(s, 0)$ в окружном направлении крайне неравномерно распределено по образующей оболочки: в беговой части оно на два порядка выше, чем на боковине, и достигает максимума в конце беговой части (на рис. 2 штриховые вертикальные линии). Нормальное усилие $N_s(s, 0)$, будучи на порядок меньше максимальных значений в окружном направлении, напротив, мало изменяется в этом направлении. Характер изгибающих моментов аналогичный: момент $M_\theta(s, 0)$ в окружном направлении на порядок выше, чем момент $M_s(s, 0)$ в меридиональном направлении, и имеет место преимущественно в беговой части, так что боковину можно считать безмоментной. Напряжения σ_θ в окружном направлении являются максимальными в слоях брекера при переходе беговой части в боковину ($\sigma_{\theta \max} \approx 24$ МПа). Изменение первоначальной формы шины под внутренним давлением показано на рис. 1,в.

Результаты расчета обжатия шины жестким основанием представлены на рис. 3. Зависимость области контакта от величины вертикальной силы $S_c = S_c(P)$ и нагрузочная характеристика шины $P = P(\delta)$ приведены для разных значений внутреннего давления q .

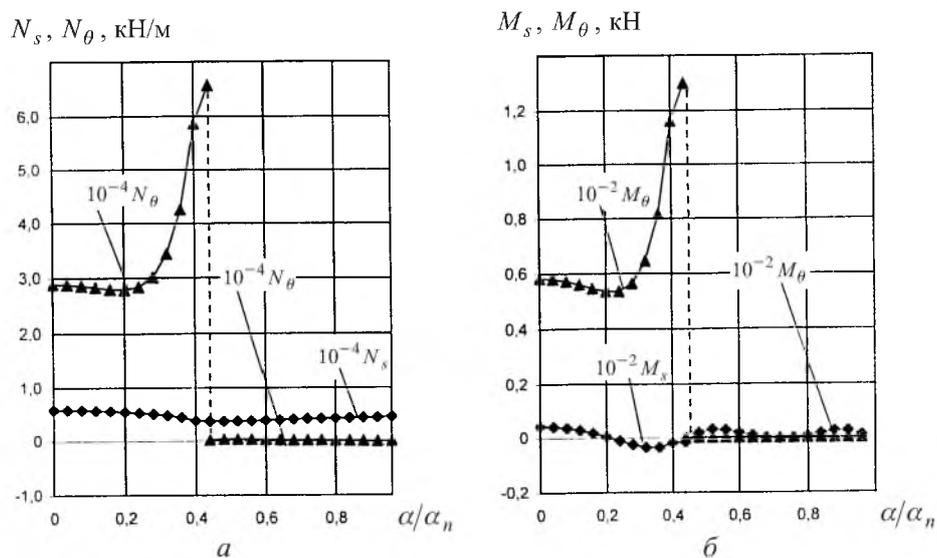


Рис. 2. Распределение статических факторов по меридиональной координате оболочки-шины: a – меридиональное N_s и окружное N_θ усилия; b – меридиональный M_s и окружной M_θ моменты.

Как и следовало ожидать, размер области контакта шины связан с действующей силой нелинейной зависимостью, особенно выраженной в области небольших значений нагрузки. Поскольку работоспособность пневматических шин обеспечивается только наличием внутреннего давления, кривая $S_c = S_c(P)$ при $q=0$ физического смысла не имеет, однако здесь она приведена как предельный случай для полноты сравнения с другими зависимостями. Длина зоны контакта по меридиану уже при небольших нагрузках практически совпадает с беговой частью шины ввиду малой кривизны оболочки в меридиональном направлении. При повышении нагрузки область контакта увеличивается фактически только по окружной координате. Кривые на рис. 3,а иллюстрируют влияние предварительной напряженности шины на размер этой области при заданной величине нагрузки P .

Типичная зависимость нагрузка–прогиб (нагрузочная характеристика шины $P = P(\delta)$) приведена для трех значений внутреннего давления q (рис. 3,б). Наклон кривых к оси δ характеризует статическую жесткость шины $C = dP/d\delta$. Зависимость $P = P(\delta)$, как и $S_c = S_c(P)$, является нелинейной только на начальном участке деформирования ($P < 2$ кН). В области рабочих нагрузок ($P = 3 \dots 8$ кН) она становится практически линейной, так что статическая жесткость шины при фиксированном давлении q от нагрузки не зависит. Вместе с тем существенное влияние на эту характеристику оказывает величина внутреннего давления. Количественно это выражается, например, в том, что при повышении давления на порядок жесткость шины увеличилась практически вдвое.

Зона действия вертикальной силы в окружном направлении показана на примере распределения нормального усилия $N_\theta(0, \theta)$ при давлении $q = 0,15$ МПа для различных значений P (рис. 3,в). Как видно, влияние

контактного давления в окружном направлении распространяется на область, в несколько раз превышающую зону контакта для каждой нагрузки, но в любом случае находящуюся в пределах четверти длины окружности. В остальной ее части сохраняется напряженно-деформированное состояние, вызванное внутренним давлением.

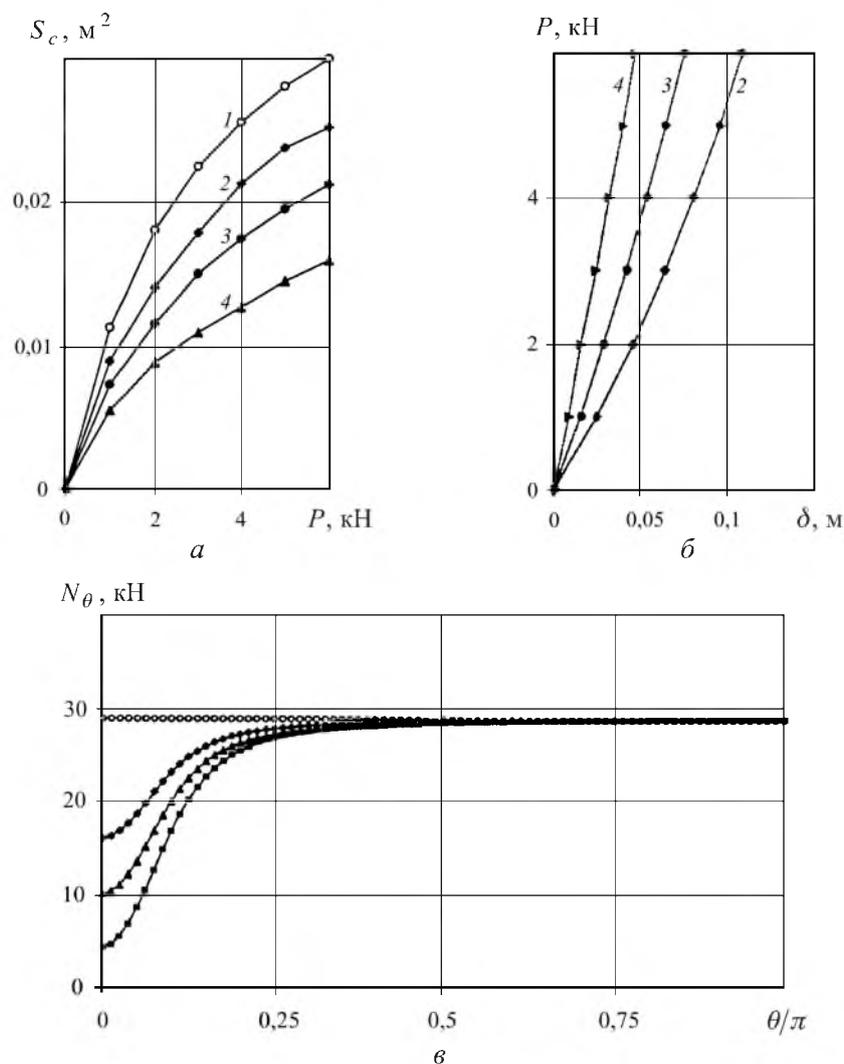


Рис. 3. Зависимость области контакта от величины вертикальной силы $S_c = S_c(P)$ (а), связь между силой и просадкой шины $P = P(\delta)$, $\delta = w(0, 0)$ (б) и распределение нормального усилия $N_\theta(0, \theta)$ в окружном направлении (\circ – $P = 0$; \blacklozenge – $P = 1$; \blacktriangle – $P = 1,5$; \blacksquare – $P = 2$) (в): 1 – $q = 0$; 2 – $q = 0,015$; 3 – $q = 0,05$; 4 – $q = 0,15$.

В результате проведенного анализа получены физически правдоподобные характеристики обжатия шины жестким основанием [2, 16]. Это подтверждает работоспособность разработанной методики и возможность применения ее к расчету основных характеристик пневматических шин различной конструкции.

Резюме

Запропоновано методика розв'язання контактної задачі для попередньо навантажених анізотропних оболонок обертання відповідно до розрахунку напруженого стану пневматичних шин. Методика базується на основних співвідношеннях неklasичної моделі оболонок із врахуванням всіх видів поперечної деформації. Попередні напруження в оболонці, які виникають під дією різного роду осесиметричних навантажень, враховуються як параметричні члени при лінеаризації вихідних геометрично нелінійних рівнянь середнього прогину. Для розв'язання відповідних двовимірних крайових задач застосовується комбінація аналітичних та числових підходів. На прикладі конструкції типу пневматичної шини досліджується вплив внутрішнього тиску на величину зони її контакту з опорною площиною, навантажувальну характеристику та статичну жорсткість.

1. Бидерман В. Л. Методы расчета и испытания автомобильных шин. – М.: Госхимиздат, 1957. – С. 16 – 51.
2. Бухин Б. Л. Введение в механику пневматических шин. – М.: Химия, 1988. – 224 с.
3. Григолюк Э. И., Куликов Г. М. Многослойные армированные оболочки: Расчет пневматических шин. – М.: Машиностроение, 1988. – 288 с.
4. Kulikov G. M., Böhm F., Duda A., und Wille R. Zur innern Mechanik des Radialreifens. Teil 1: Geschichtete Kompositenschale mit globalen Verschiebungsansatz für das Gesamtlaminat // Techn. Mech. – 2000. – **20**, No. 1. – P. 1 – 12.
5. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. – Киев: Наук. думка, 1982. – 258 с.
6. Григолюк Э. И., Куликов Г. М., Плотникова С. В. Контактная задача для пневматической шины, взаимодействующей с жестким основанием // Механика композитных материалов. – 2004. – **40**, № 5. – С. 661 – 674.
7. Рассказов А. О., Соколовская И. И., Шульга Н. А. Теория и расчет слоистых ортотропных пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1986. – 191 с.
8. Faria L. O., Oden J. T., Yavari B., et al. Tire modeling by finite elements // Tire Sci. Technology. – 1992. – **20**, No 1. – P. 33 – 56.
9. Noor A. K. and Danielson K. T. Finite elements developed in cylindrical coordinate for three-dimensional tire analysis // Ibid. – 1997. – **25**, No 1. – P. 2 – 28.
10. Муштары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. – Казань: Таткнигоиздат, 1957. – 431 с.
11. Григоренко Я. М., Василенко А. Т., Голуб Г. П. Статика анизотропных оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. – Киев: Наук. думка, 1987. – 216 с.
12. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи. – М.: Мир, 1968. – 184 с.

13. *Vasilenko A. T., Bespalova E. I., and Urusova G. P.* Contact interaction between a laminated shell of revolution and a rigid or elastic foundation // *Int. Appl. Mech.* – 2005. – **41**, No 5. – P. 520 – 525.
14. *Bespalova E. I. and Kitaygorodskii A. B.* Deformation of piecewise – homogeneous plates // *Ibid.* – 2003. – **39**, No 2. – P. 217 – 224.
15. *Bespalova E. I. and Kitaygorodskii A. B.* Bending of composite plates under static and dynamic loading // *Ibid.* – 2005. – **41**, No 1. – P. 56 – 61.
16. *Балабин И. В., Логунов А. А., Раклер А. М.* Шины и работа автомобиля. – М.: НИИАВТОПРОМ, 1973. – 96 с.

Поступила 14. 03. 2006