

Обратная задача термоупругости для изотропной среды с полостью при трехосном растяжении и постоянной температуре на ее поверхности

В. С. Кирилюк, О. И. Левчук, В. Ф. Ткаченко

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена обратная задача термоупругости для изотропной среды с неизвестной формой полости при силовом и температурном воздействии. Получены нелинейные уравнения для поиска геометрических параметров равнонапряженной полости эллипсоидальной формы. Подобные соотношения для силовых нагрузок, установленные другими авторами, следуют из полученных уравнений как частный случай. Проведены численные исследования и изучена связь между значениями нагрузок и параметрами полости. Исследованы напряжения на равнонапряженной поверхности полости. Оценено влияние температуры на связь между параметрами нагрузок и геометрическими характеристиками равнонапряженной полости.

Ключевые слова: обратная задача, неизвестная поверхность полости, силовые и температурные воздействия, равнонапряженная поверхность, соответствие между нагрузками и параметрами полости.

Введение. Исследуемая пространственная задача относится к классу обратных задач, в которых по известным нагрузкам (силовые и температурные) и свойствам упругой изотропной среды определяется неизвестная форма полости, что приводит к специальному распределению напряжений вдоль всей ее поверхности. Подобная плоская обратная задача о поиске оптимальной формы отверстий при силовых воздействиях рассматривалась в работах [1, 2]. Исследовались также пространственные задачи определения оптимальной формы полости [3–6] или жесткого включения при силовых нагрузках типа растяжения (сжатия) [7, 8]. Получено решение трехмерной обратной задачи для упругой среды, которая содержит упругое изотропное включение (свойства последнего отличались от свойств среды) [9]. При этом предполагалась, что между фазами имеет место идеальный механический контакт. Кроме того, изучались обратные задачи термоупругости для изотропной матрицы с упругим изотропным или трансверсально-изотропным включением при силовых воздействиях типа растяжения (сжатия) и равномерном нагреве [10, 11]. Отметим, что некоторые прямые задачи для эллипсоидальных полостей и включений, которые в отдельных случаях могут быть использованы для изучения обратных задач, были рассмотрены в работах [12–18].

В данной работе исследуется задача определения оптимальной формы полости в упругой изотропной среде под действием трехосного растяжения (сжатия), на поверхности полости поддерживается постоянная температура, которая стремится к нулевому значению при удалении от полости. В этом случае характер распределения температурного поля более сложный, чем в указанных выше работах. Отметим, что, как и в [3–10], неизвестная форма

полости определяется из условия равной напряженности всей поверхности полости. При отсутствии температурного поля в среде получаем чисто упругую задачу [8], решение которой следует из найденного результата как частный случай.

Постановка задачи. Предположим, что упругая изотропная среда, содержащая полость неизвестной формы, находится под действием растягивающих (сжимающих) усилий $\sigma_{11}^\infty, \sigma_{22}^\infty, \sigma_{33}^\infty$. При этом поверхность полости свободна от нагрузок, но на ней поддерживается постоянная температура $T = T_0$, которая стремится к нулевому значению при удалении от полости. Необходимо определить геометрическую форму полости, обеспечивающую равнонапряженное состояние вдоль всей ее поверхности. С этой целью рассмотрим следующую задачу термоупругости:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{u} + \Delta^2 \vec{u} &= \frac{2(1+\nu)\alpha}{1-2\nu} \operatorname{grad} T, \quad \vec{x} \in R^3; \\ \sigma_{ij} n_j \Big|_S &= 0; \\ \sigma_{ij} &= \sigma_{ij}^\infty + O(|\vec{x}|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad i, j = 1, 2, 3; \\ \Delta^2 T &= 0; \quad T|_S = T_0; \quad T = O(|\vec{x}|^{-1}) \quad \text{при} \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{1}$$

При этом поверхность S является неизвестной. Ее будем определять из требования достижения (реализации) на ней особой структуры напряжений, т.е. по заданным значениям σ_{ij}^∞ и T_0 , упругим свойствам матрицы μ, ν и коэффициенту линейного температурного расширения α будем отыскивать такую поверхность полости S , на которой тензор напряжений имеет вид [8]

$$\sigma_{ij} \Big|_S = \sigma_S (\delta_{ij} - n_i n_j), \quad i, j = 1, 2, 3, \tag{2}$$

где σ_S – постоянная величина, которую необходимо определить в процессе решения задачи; δ_{ij} – символ Кронекера; n_i – компоненты вектора нормали к поверхности полости.

Можно убедиться, что при таком характере распределения напряжений на поверхности полости реализуется равнонапряженное состояние, т.е. если перейти к криволинейным координатам, связанным с поверхностью S , то напряженное состояние на этой поверхности принимает вид [8, 9]

$$\sigma_{mn} \Big|_S = 0; \quad \sigma_{\tau\tau} \Big|_S = \sigma_{\iota\iota} \Big|_S = \sigma_S; \quad \sigma_{n\tau} \Big|_S = \sigma_{n\iota} \Big|_S = \sigma_{\tau\iota} \Big|_S = 0.$$

Построение решения. Будем искать неизвестную форму полости в классе эллипсоидальных полостей с неизвестными пока значениями полуосей эллипсоида. Для этого температурное поле в материале с полостью представим с помощью следующей гармонической функции:

$$T(x_1, x_2, x_3) = C \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)}; \quad Q(s) = [(a_1^2 + s)(a_2^2 + s)(a_3^2 + s)]^{1/2}. \quad (3)$$

Здесь C – постоянная, $C = T_0 / \int_0^{\infty} \frac{ds}{Q(s)}$; $\rho = \rho(x_1, x_2, x_3)$ – эллипсоидальная координата, связанная с декартовыми координатами соотношением

$$\frac{x_1^2}{a_1^2 + \rho} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + \rho} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + \rho} - 1 = 0, \quad (4)$$

где параметры a_1, a_2, a_3 – полуоси эллипсоида, которые подлежат определению в процессе решения задачи; на поверхности полости $\rho = 0$.

Частное решение уравнений термоупругости согласно [13] запишем следующим образом:

$$\bar{u}^* = D \operatorname{grad} \chi, \quad (5)$$

где

$$\chi = - \int_{\rho}^{\infty} \frac{(a_1^2 + s)}{Q(s)} \left[1 - \frac{x_1^2}{a_1^2 + s} - \frac{x_2^2}{a_2^2 + s} - \frac{x_3^2}{a_3^2 + s} \right] ds. \quad (6)$$

Компоненты перемещений, отвечающие частному решению уравнений термоупругости, имеют вид [13]

$$\begin{cases} u_x^* = 2Dx_1 \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)}; \\ u_y^* = 2Dx_2 \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} + (a_1^2 - a_2^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{(a_2^2 + s)Q(s)}; \\ u_z^* = 2Dx_3 \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} + (a_2^2 - a_3^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{(a_3^2 + s)Q(s)}. \end{cases} \quad (7)$$

где D – постоянная,

$$D = \frac{1}{4} \frac{(1 + \nu)}{(1 - \nu)} \frac{\alpha T_0}{\int_0^{\infty} \frac{ds}{Q(s)}}. \quad (8)$$

Воспользовавшись выражением для перемещений (7), находим значения компонент напряжений, соответствующие частному решению уравнений термоупругости (5):

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11}^* &= 4D \left((\lambda + \mu) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} - 2\mu \frac{(a_1^2 + \rho)}{Q(\rho)} \left(\frac{x_1}{(a_1^2 + \rho)h} \right)^2 \right); \\
 \sigma_{22}^* &= 4D \left((\lambda + \mu) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} + \mu(a_1^2 - a_2^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{(a_2^2 + s)Q(s)} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\mu \frac{(a_1^2 + \rho)}{Q(\rho)} \left(\frac{x_2}{(a_2^2 + \rho)h} \right)^2 \right); \\
 \sigma_{33}^* &= 4D \left((\lambda + \mu) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} + \mu(a_1^2 - a_3^2) \int_{\rho}^{\infty} \frac{ds}{(a_3^2 + s)Q(s)} - \right. \\
 &\quad \left. - 2\mu \frac{(a_1^2 + \rho)}{Q(\rho)} \left(\frac{x_3}{(a_3^2 + \rho)h} \right)^2 \right); \\
 \sigma_{12}^* &= 4D \left(-2\mu \frac{(a_1^2 + \rho)}{Q(\rho)} \frac{x_1}{(a_2^2 + \rho)h} \frac{x_2}{(a_2^2 + \rho)h} \right); \\
 \sigma_{13}^* &= 4D \left(-2\mu \frac{(a_1^2 + \rho)}{Q(\rho)} \frac{x_1}{(a_1^2 + \rho)h} \frac{x_3}{(a_3^2 + \rho)h} \right); \\
 \sigma_{23}^* &= 4D \left(-2\mu \frac{(a_1^2 + \rho)}{Q(\rho)} \frac{x_2}{(a_2^2 + \rho)h} \frac{x_3}{(a_3^2 + \rho)h} \right); \\
 h &= \frac{x_1^2}{(a_1^2 + \rho)^2} + \frac{x_2^2}{(a_2^2 + \rho)^2} + \frac{x_3^2}{(a_3^2 + \rho)^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Из выражений (9), полагая $\rho = 0$, переходим к оценке структуры напряжений на поверхности полости, которая соответствует частному решению уравнений термоупругости. В результате имеем

$$\left. \begin{aligned}
 \sigma_{11}^*|_S &= 4D \left((\lambda + \mu) \int_0^{\infty} \frac{d\lambda}{Q(\lambda)} - 2\mu \frac{a_1^2}{a_1 a_2 a_3} n_1^2 \right); \\
 \sigma_{22}^*|_S &= 4D \left((\lambda + \mu) \int_0^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} + \mu(a_1^2 - a_2^2) \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a_2^2 + s)Q(s)} - 2\mu \frac{a_1^2}{a_1 a_2 a_3} n_2^2 \right); \\
 \sigma_{33}^*|_S &= 4D \left((\lambda + \mu) \int_0^{\infty} \frac{ds}{Q(s)} + \mu(a_1^2 - a_3^2) \int_0^{\infty} \frac{ds}{(a_3^2 + s)Q(s)} - 2\mu \frac{a_1^2}{a_1 a_2 a_3} n_3^2 \right); \\
 \sigma_{12}^*|_S &= 4D \left(-2\mu \frac{a_1^2}{a_1 a_2 a_3} n_1 n_2 \right);
 \end{aligned} \right\} \quad (10a)$$

$$\begin{cases} \sigma_{13}^*|_S = 4D \left(-2\mu \frac{a_1^2}{a_1 a_2 a_3} n_1 n_3 \right); \\ \sigma_{23}^*|_S = 4D \left(-2\mu \frac{a_1^2}{a_1 a_2 a_3} n_2 n_3 \right). \end{cases} \quad (106)$$

Сравнивая полученные выражения (9) и (10) с учетом (2), можно убедиться, что принципиально необходимая структура напряжений может быть достигнута также для частного решения уравнений термоупругости.

Запишем теперь напряженное состояние в матрице с полостью в виде суперпозиции состояний:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^\infty - 2\mu\alpha T \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \delta_{ij}. \quad (11)$$

При этом решение однородных уравнений равновесия представим согласно [8] следующим образом:

$$\sigma_{ij}^0 = \frac{A}{4\pi} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j}; \quad \Omega = \pi a_1 a_2 a_3 \int_\rho^\infty \left(\frac{x_1^2}{a_1^2 + s} + \frac{x_2^2}{a_2^2 + s} + \frac{x_3^2}{a_3^2 + s} - 1 \right) \frac{ds}{Q(s)}. \quad (12)$$

В ходе некоторых преобразований, приравнявая коэффициенты при подобных членах, получаем, что условия (2) относительно структуры тензора напряжений на поверхности полости выполняются, если удовлетворяется система четырех уравнений относительно неизвестных A , σ_S , a_2/a_1 , a_3/a_1 (они линейны относительно первых двух и нелинейны относительно двух последних неизвестных):

$$\begin{cases} \sigma_S = A + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \alpha \mu T_0 \frac{a_1^2}{J_0(0)}; \\ A(J_1(0) - J_2(0)) + (\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty) + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \alpha \mu T_0 \left(\frac{(a_2^2 - a_1^2) J_2(0)}{J_0(0)} \right) = 0; \\ A(J_1(0) - J_3(0)) + (\sigma_{11}^\infty - \sigma_{33}^\infty) + \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \alpha \mu T_0 \left(\frac{(a_3^2 - a_1^2) J_2(0)}{J_0(0)} \right) = 0; \\ 3\sigma_S = A + (\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty) - 3\alpha \mu T_0 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) + \alpha \mu T_0 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{a_1^2}{J_0(0)} - 1 \right), \end{cases} \quad (13)$$

где

$$J_0(\rho) = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 \int_\rho^\infty \frac{ds}{Q(s)}; \quad J_i(\rho) = \frac{1}{2} a_1 a_2 a_3 \int_\rho^\infty \frac{ds}{(a_i^2 + s) Q(s)}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Видно, что величины $J_0(0)$, $J_1(0)$, $J_2(0)$, $J_3(0)$, входящие в (13), являются функциями полуосей эллипсоида. При дальнейших вычислениях целесообразно использовать существующую между ними связь [18]:

$$J_0(0) = a_1^2 J_1(0) + a_2^2 J_2(0) + a_3^2 J_3(0).$$

Следовательно, для поиска неизвестных соотношений полуосей эллипсоида, на поверхности которого реализуется требуемая структура напряжений, необходимо решить систему уравнений (13) относительно неизвестных A , σ_S , a_2/a_1 , a_3/a_1 . В результате получим

$$\begin{aligned} \sigma_S &= \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty}{2} - 2\mu\alpha T_0 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right); \\ A &= \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty}{2} - \mu\alpha T_0 \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(2 + \frac{a_1^2}{J_0(0)} \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Оставшиеся два уравнения можно записать в виде

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_{22}^\infty}{\sigma_{11}^\infty} + \frac{\sigma_{33}^\infty}{\sigma_{11}^\infty} \right) - \frac{\mu\alpha T_0}{\sigma_{11}^\infty} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(2 + \frac{a_1^2}{J_0(0)} \right) \right] (J_1(0) - J_2(0)) + \\ &+ \left(1 - \frac{\sigma_{22}^\infty}{\sigma_{11}^\infty} \right) + \frac{\mu\alpha T_0}{\sigma_{11}^\infty} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{a_2^2 - a_1^2}{J_0(0)} \right) J_2(0) = 0; \\ &\left[\frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma_{22}^\infty}{\sigma_{11}^\infty} + \frac{\sigma_{33}^\infty}{\sigma_{11}^\infty} \right) - \frac{\mu\alpha T_0}{\sigma_{11}^\infty} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(2 + \frac{a_1^2}{J_0(0)} \right) \right] (J_1(0) - J_3(0)) + \\ &+ \left(1 - \frac{\sigma_{33}^\infty}{\sigma_{11}^\infty} \right) + \frac{\mu\alpha T_0}{\sigma_{11}^\infty} \left(\frac{1+\nu}{1-\nu} \right) \left(\frac{a_3^2 - a_1^2}{J_0(0)} \right) J_3(0) = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15), связывающие заданные силовое и температурное воздействия и свойства среды с геометрическими параметрами полости, являются параметрически нелинейными относительно отношений a_2/a_1 и a_3/a_1 .

Апробация и анализ числовых результатов. Проанализируем соотношения (14) и (15). Фактически из них при отсутствии температурного воздействия, как частный случай, должны быть получены соответствующие соотношения для задачи только при силовом воздействии [8]. Действительно, приняв $T_0 = 0$, получим соотношения

$$\begin{aligned} A = \sigma_S &= \frac{\sigma_{11}^\infty + \sigma_{22}^\infty + \sigma_{33}^\infty}{2}; & J_2(0) - J_1(0) &= \frac{\sigma_{11}^\infty - \sigma_{22}^\infty}{\sigma_S}; \\ J_3(0) - J_1(0) &= \frac{\sigma_{11}^\infty - \sigma_{33}^\infty}{\sigma_S}, \end{aligned} \quad (16)$$

которые полностью совпадают с результатами работы [8], где рассмотрена задача при действии силовой нагрузки.

Исследуем теперь случай осесимметричных нагрузок $\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{11}^{\infty}$ и нагрева T_0 . Ясно, что для материалов с изотропными свойствами из соображений симметрии необходимо проводить поиск необходимой геометрической формы полости в классе форм вращения. Так, из первого уравнения системы (15) получаем, что оно удовлетворяется, если $a_1 = a_2$. В этом случае от системы нелинейных уравнений (15) переходим к одному нелинейному уравнению относительно a_3/a_1 , и это значит, что неизвестная форма полости отыскивается уже на сфероидах (эллипсоиды вращения при $a_1 = a_2$).

Отметим еще одно важное свойство системы (15), существенно упрощающее проведение исследований. При заданных отношениях полуосей эллипсоида и величине $\frac{\mu\alpha T_0}{\sigma_{11}^{\infty}}$ данная система является линейной относительно

неизвестных отношений нагрузок $\sigma_{22}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ и $\sigma_{33}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$. Отмеченное свойство позволяет, например, оценить величину преимущественного уменьшения концентрации напряжений на равнонапряженной эллипсоидальной форме полости по сравнению со сферической при чисто силовой нагрузке ($T_0 = 0$). Так, при фиксированных значениях двух полуосей эллипсоида и изменения третьей полуоси можно вычислить нагрузки, создающие равнонапряженное состояние на полости получаемой геометрии. Затем в ходе исследований определить наибольшее значение напряжений на сферической полости ($\sigma_{сф}$) при тех же нагрузках и оценить величину преимущественного уменьшения концентрации напряжений на равнонапряженной форме полости по сравнению со сферической. В результате расчетов получим, что при $a_3/a_1 = 0,1$ и значениях $a_2/a_1 = 0,1; 0,3; 0,5; 0,7; 0,9$ отношение максимальных значений напряжений $\sigma_{сф}/\sigma_S = 1,7266; 1,8767; 1,9136; 1,9270; 1,9328$. В случае полости при отношении полуосей $a_3/a_1 = 0,1; a_2/a_1 = 0,01$ ($\sigma_{сф} = 2,1059; \sigma_S = 1,0026$) имеем $\sigma_{сф}/\sigma_S = 2,1004$. Таким образом, концентрация напряжений в последнем случае на равнонапряженной полости в два раза меньше, чем на сферической, при тех же нагрузках.

На рис. 1–3 показаны зависимости между напряжениями и параметрами полуосей равнонапряженных форм при чисто силовой нагрузке ($T_0 = 0$). Рис. 1 и 2 иллюстрируют связь между отношениями нагрузок, приводящих к равнонапряженному состоянию, и полуосями равнонапряженной полости, рис. 3 – зависимость значений напряжений на равнонапряженной поверхности от полуосей полости. Осесимметричное силовое ($\sigma_{22}^{\infty} = \sigma_{11}^{\infty}$) и температурное воздействия показаны на рис. 4, 5. При числовых расчетах полагали, что $\nu = 0,3$. Из рис. 4, 5 видно, как влияет температурное поле на связь между нагрузками и геометрическими параметрами равнонапряженной полости и на значения напряжений на ее поверхности.

На рис. 6–8 приведены результаты исследования силового и температурного неосесимметричного нагружения (отношение a_2/a_1 фиксировалось равным 0,5). При этом можно видеть связь между отношением нагрузок и полуосей эллипсоидальной равнонапряженной полости, а также оценить значения напряжений на ее поверхности.

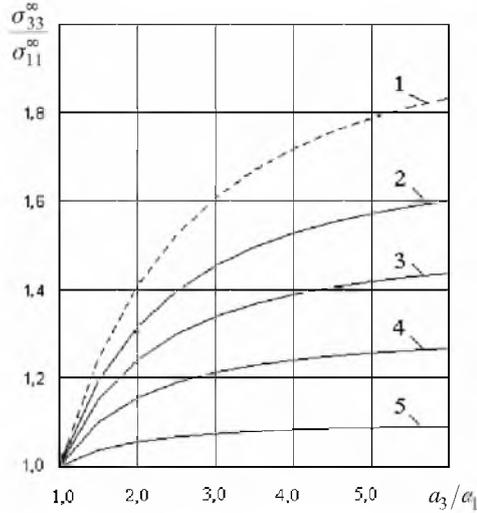


Рис. 1

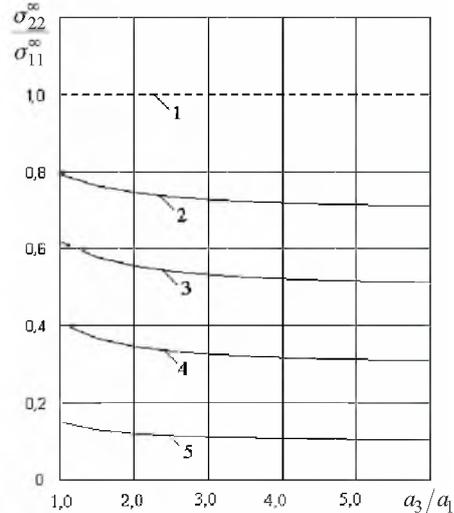


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость $\sigma_{33}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ от полуосей эллипсоида при силовой нагрузке. (Здесь и на рис. 2, 3: 1 - $a_2/a_1 = 1$; 2 - $a_2/a_1 = 0,7$; 3 - $a_2/a_1 = 0,5$; 4 - $a_2/a_1 = 0,3$; 5 - $a_2/a_1 = 0,1$, штриховые линии - осесимметричная нагрузка.)

Рис. 2. Зависимость $\sigma_{22}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ от полуосей эллипсоида при силовой нагрузке.

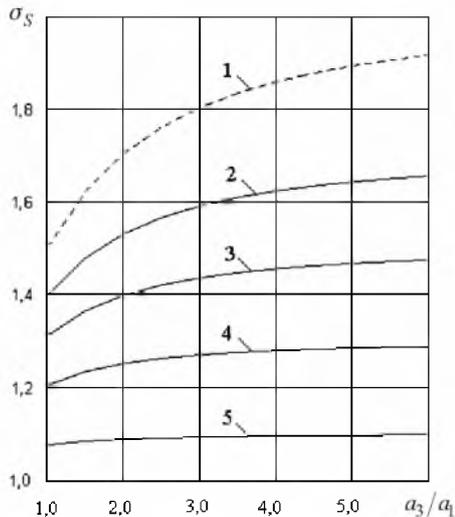


Рис. 3

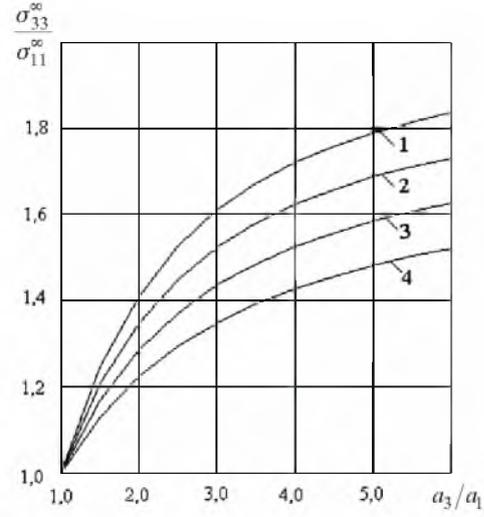


Рис. 4

Рис. 3. Значения напряжений на равнонапряженной поверхности при силовой нагрузке.

Рис. 4. Зависимость $\sigma_{33}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ от полуосей эллипсоида при осесимметричном силовом и температурном воздействии. (Здесь и на рис. 5: 1 - $\beta = \frac{\alpha \mu T_0}{\sigma_{11}^{\infty}} = 0$ (только силовая нагрузка);

2 - $\beta = 0,1$; 3 - $\beta = 0,3$; 4 - $\beta = 0,5$.)

Заключение. Таким образом, для заданных силовых и температурных нагрузок найденные равнонапряженные формы полостей позволяют в ряде случаев существенно снизить концентрацию напряжений. При этом темпе-

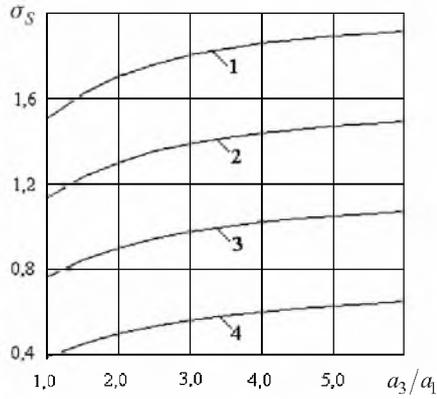


Рис. 5

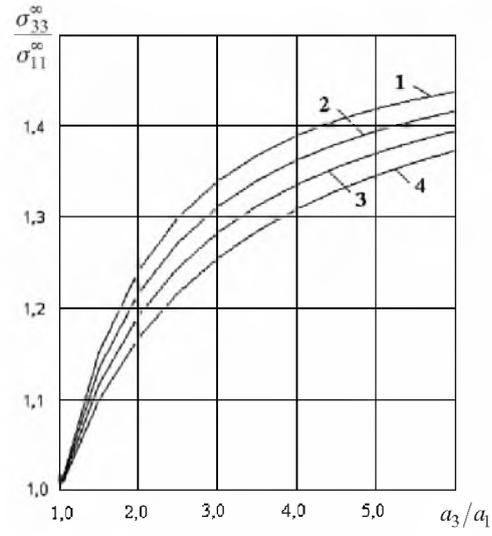


Рис. 6

Рис. 5. Значения напряжений на равнонапряженной поверхности при осесимметричном силовом и температурном воздействии.

Рис. 6. Зависимость $\sigma_{33}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ от полуосей эллипсоида при силовом и температурном воздействии. (Здесь и на рис. 7, 8: 1 - $\beta = 0$; 2 - $\beta = 0,1$; 3 - $\beta = 0,3$; 4 - $\beta = 0,5$.)

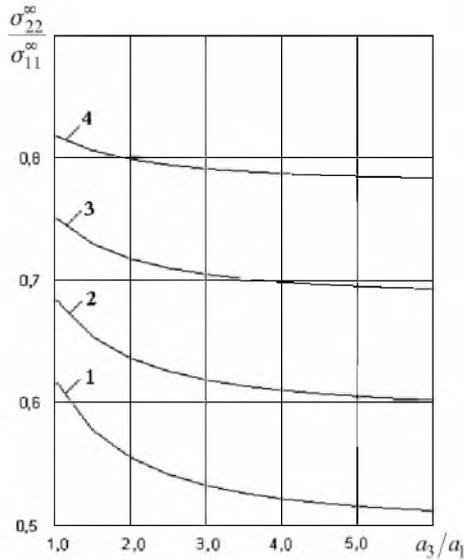


Рис. 7

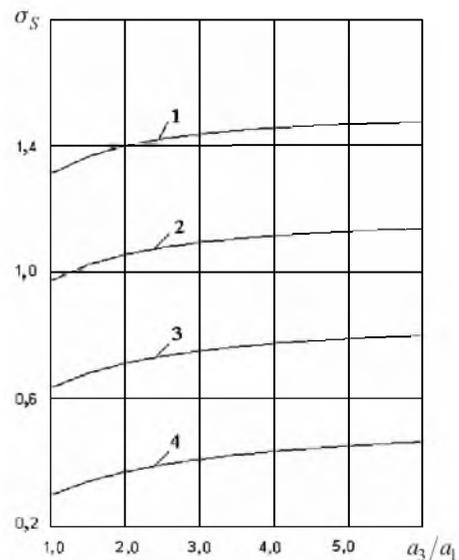


Рис. 8

Рис. 7. Зависимость $\sigma_{22}^{\infty}/\sigma_{11}^{\infty}$ от полуосей эллипсоида при силовом и температурном воздействии.

Рис. 8. Значения напряжений на равнонапряженной поверхности при силовом и температурном воздействии.

ратурное поле наряду с силовыми воздействиями также может значительно влиять на геометрические параметры равнонапряженной полости и величины напряжений на ее поверхности.

Резюме

Розглянуто обернену задачу термопружності для ізотропного середовища з невідомою формою порожнини при силових та температурних навантаженнях. Отримано нелінійні рівняння для пошуку геометричних параметрів рівнонапруженої порожнини еліпсоїдальної форми. Подібні співвідношення для силових навантажень, що встановлені іншими авторами, впливають з отриманих рівнянь як частинний випадок. Проведено числові дослідження та вивчено зв'язок між значеннями навантажень та параметрами порожнини шуканої форми. Досліджено напруження на поверхні рівнонапруженої порожнини. Оцінено вплив температури на зв'язок між параметрами навантажень та геометричними характеристиками рівнонапруженої порожнини.

1. Черепанов Г. П. Обратные задачи плоской теории упругости // Прикл. математика и механика. – 1974. – **38**, № 6. – С. 963 – 979.
2. Баничук Н. В. Условие оптимальности в задаче отыскания форм отверстий в упругих телах // Там же. – 1977. – **41**, № 5. – С. 920 – 925.
3. Вигдергауз С. Б. Условие оптимальности в осесимметричных задачах теории упругости // Там же. – 1982. – **46**, № 2. – С. 278 – 282.
4. Вигдергауз С. Б. Обратная задача трехмерной теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1983. – № 2. – С. 90 – 93.
5. Вигдергауз С. Б. О геометрических характеристиках равнопрочных границ // Прикл. математика и механика. – 1988. – **52**, № 3. – С. 478 – 485.
6. Wheeler L. T. and Kunin I. A. On void of minimum stress concentration // Int. J. Solids Struct. – 1982. – **18**. – P. 85 – 89.
7. Eldiwany B. H. and Wheeler L. T. On rigid inclusion of minimum stress concentration // J. Mech. Phys. Solids. – 1986. – **34**. – P. 19 – 28.
8. Eldiwany B. H. and Wheeler L. T. A three-dimensional inverse problem for inhomogeneities in elastic solids // J. Elasticity. – 1986. – **16**, No. 2. – P. 201 – 211.
9. Кирилюк В. С. Обратная трехмерная задача для изотропной среды с деформируемым включением // Прикл. механика. – 1990. – **26**, № 11. – С. 44 – 49.
10. Кирилюк В. С. Одна трехмерная обратная задача термоупругости для изотропной среды с упругой неоднородностью // Там же. – 1991. – **27**, № 1. – С. 40 – 44.
11. Кирилюк В. С. Об оптимальной форме трансверсально-изотропного включения в упругой среде при трехосном растяжении и равномерном нагреве // Теорет. и прикл. механика. – 2002. – Вып. 35. – С. 47 – 53.
12. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. – Киев: Наук. думка, 1984. – 303 с.
13. Подильчук Ю. Н. Пространственные задачи механики горных пород. – Киев: Наук. думка, 1983. – 158 с.

14. *Podil'chuk Yu. N. and Myasoedova I. G.* Stress state of a transversely isotropic piezoceramic body with spheroidal cavity // *Int. Appl. Mech.* – 2004. – **40**, No. 11. – P. 1269 – 1280.
15. *Kirilyuk V. S. and Levchuk O. I.* Stress state of transversely isotropic medium with arbitrarily orientied spheroidal inclusion // *Ibid.* – 2005. – **41**, No. 2. – P. 137 – 143.
16. *Kirilyuk V. S.* The stress state of an elastic orthotropic medium with an ellipsoidal cavity // *Ibid.* – No. 3. – P. 302 – 308.
17. *Эшелби Дж.* Континуальная теория дислокаций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 287 с.
18. *Mura T.* Micromechanics of defects of solids. – Hague: Martinus Nijhoff Publ., 1982. – 494 p.

Поступила 30. 01. 2006