

Напряженно-деформированное состояние подвеса гироскопа при акустическом нагружении

В. Н. Мельник

Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев, Украина

Анализируется упругое взаимодействие проникающего акустического излучения разгонных блоков ракет-носителей с подвесом поплавкового гироскопа. Рассматривается торцевая пластина поплавка как наиболее опасная с точки зрения ее малой жесткости в направлении нормали. Проведена качественная и количественная оценка упругого деформированного состояния поплавка.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, поплавковый гироскоп, гидроагрегат, торцевая пластина поплавка.

Введение. В командно-измерительных комплексах ракет-носителей (РН) широко применяются так называемые поплавковые гироскопы, конструктивно лишенные основного недостатка “сухих” приборов – значительного и в то же время непостоянного по величине момента трения на выходной оси. Отличительной особенностью поплавковых модификаций является наличие погруженной в тяжелую жидкость подвижной части прибора – поплавка с гидроагрегатом.

Принцип плавающего двухстепенного гироскопа была впервые предложен Л. И. Ткачевым [1], затем Дрейпером [2], под руководством которого в Массачусетском технологическом институте были созданы опытные образцы. Фирмой “Minneapolis Honeywell Reg. Co” впервые разработаны серийные варианты плавающих гироскопов.

Моменту активного отделения второй ступени от первой предшествует вывод на номинальный режим работы ее маршевых двигателей с одновременной подготовкой к работе навигационно-пилотажного оборудования РН. В этот период времени строится система заданных ориентирных направлений. Как оказалось, акустическое излучение со стороны двигательных установок, которое проникает под головной аэродинамический обтекатель РН, обуславливает возникновение волновых процессов в подвесе гироскопа, приводящих к напряженно-деформированному состоянию как комплексу, так и поверхности поплавка в целом [3].

Экспериментальные исследования показали, что акустическое излучение опасно не только для некорректируемых приборов, но и для корректируемых. Последний факт объясняется влиянием звуковых волн на чувствительные элементы систем коррекции [4]. Наиболее сложным в рамках поставленной задачи представляется анализ напряженно-деформированного состояния полиагрегатных структур, к которым могут быть отнесены, например, поплавковые гироскопы.

Постановка задачи. Опишем природу упругого взаимодействия акустического излучения с поплавковым гироскопом. При этом рассмотрим отдельные элементы конструкции в предположении отсутствия перекачки энергии акустической вибрации на сопряженные детали. Это позволит, не лишая объективности возникающей картины, принципиально оценить степень влияния прошедшего звукового излучения на характер возникающих волновых процессов, что и является целью данного исследования.

Объектом исследований служила круглая пластина как наиболее подверженная влиянию акустического нагружения.

В [5] впервые изучено влияние упругости на колебания конструкции в жидкости, затем в [6, 7] – при анализе бесконечных по протяженности цилиндрических оболочек. Что касается исследования свойств оболочек при акустическом нагружении, дифракции и интерференции звуковых волн на их поверхности, то одной из первых следует назвать работу [8]. Дальнейшее развитие эти направления, в том числе волновые задачи рассеяния звука, получили, например, в [9–11].

Стационарная задача. Механическую модель прохождения звука через торец поплавка представим следующим образом (рис. 1).

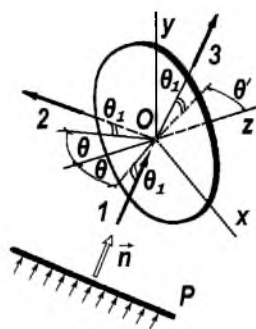


Рис. 1. Схема прохождения звуковой волны через торец поплавка.

С левой (лицевой) стороны пластины падает плоская монохроматическая волна давления p в направлении нормали \vec{n} к фронту. Падающую, отраженную и прошедшую волны обозначим соответственно 1, 2 и 3. Толщину пластины примем равной h , радиус – R .

Систему координат $Oxyz$ свяжем со срединной плоскостью, а точку O совместим с геометрическим центром. Очевидно, что пластина наиболее подвержена влиянию акустического излучения в направлении Oz нормали к поверхности, так как именно здесь ее импеданс минимальный по сравнению с двумя другими измерениями.

Проанализируем возмущенное изгибное движение торцевой пластины поплавка под действием плоской звуковой волны. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний в форме Софи Жермен имеет вид

$$D\Delta^2 W(x, y, t) + \rho h \ddot{W}(x, y, t) = q(x, y, t), \quad (1)$$

где Δ^2 – итерированный лапласиан, $\Delta^2 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \stackrel{\text{def}}{=} A$; D , ρ , h и σ – цилиндрическая жесткость, плотность материала пластины, толщина и коэффициент Пуассона соответственно, $D = \frac{Eh}{12(1-\sigma)}$; q – возмущающее воздействие.

Пластина колеблется относительно плоскости xOy . Уравнение (1) справедливо в плоской области, которая расположена в системе xOy . Это уравнение дает удовлетворительные результаты, если отношение толщины пластины к наименьшей длине генерируемой волны не превышает 0,1. В противном случае следует учитывать сдвиг и инерцию вращения либо решать трехмерную задачу.

Исключим из рассмотрения время t и установим закономерность распространения акустической вибрации. В этом случае уравнение (1) преобразуется следующим образом:

$$AW = \Delta^2 W(x, y) = \frac{1}{D} q(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} f(x, y), \quad (2)$$

где $f(x, y)$ – проекция плотности возмущающей силы $\vec{k}f(x, y)$ на нормаль к лицевой поверхности.

На боковой поверхности Γ пластины

$$\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases} \quad (3)$$

выполняются граничные условия первого рода

$$W|_{\Gamma} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n_1}|_{\Gamma} = 0, \quad (4)$$

что соответствует жесткому закреплению, где n_1 – внешняя нормаль к боковой поверхности.

Построим систему линейно независимых функций

$$u_i = u_i(x, y), \quad x^2 + y^2 \leq R^2, \quad z = 0, \quad i = \overline{1, N}, \quad (5)$$

принадлежащих области определения бигармонического оператора $A = \Delta^2$ и удовлетворяющих условиям (5).

Линейную оболочку функций обозначим через U^N . Таким образом, координатные функции u_i образуют базис

$$\{U\} = u_1, u_2, \dots, u_N$$

в своей линейной оболочке U^N .

Найдем приближенное решение W задачи (2)–(4) в виде линейной комбинации координатных функций

$$W \approx c^i u_i(x, y), \quad i = \overline{1, N} \quad (6)$$

со столбцом

$$C = (c^1 \quad c^2 \quad \dots \quad c^N)^T \quad (7)$$

неизвестных коэффициентов c^i , подлежащих определению. Тогда выражение (6) преобразуется к приближенному равенству

$$AW \approx Ac^i u_i(x, y) = c^i Au_i(x, y) \approx f(x, y). \quad (8)$$

Наилучшим считается столбец $C = (c^1 \quad c^2 \quad \dots \quad c^N)^T$, при котором

$$c^i v_i(x, y) = n \rho_{V^N} f(x, y). \quad (9)$$

Это условие представляет собой один из вариантов классической идеи, предложенной Л. Рэлеем, В. Ритцем, И. Г. Бубновым, С. П. Тимошенко, Б. Г. Галеркиным.

В более компактной форме данное условие можно записать следующим образом:

$$GC = (f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N)^T, \quad (10)$$

где $G = (g_{ij})$, $i, j = \overline{1, N}$ – матрица Грама линейно независимых векторов v_i ($i = \overline{1, N}$), вследствие чего $\det G > 0$, и система (10) однозначно разрешима:

$$C = G^{-1}(f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_N)^T. \quad (11)$$

В качестве координатных функций выберем такие:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(1 - \frac{x^2}{R^2} - \frac{y^2}{R^2}\right)^2; & u_2 &= \frac{x}{R} u_1; & u_3 &= \frac{y}{R} u_1; \\ u_4 &= \frac{x^2}{R^2} u_1; & u_5 &= \frac{y^2}{R^2} u_1; & u_6 &= \frac{xy}{R^2} u_1. \end{aligned} \quad (12)$$

Эти функции безразмерные, принадлежат области определения бигармонического оператора $A = \Delta^2$ и удовлетворяют граничным условиям (4).

Образы $v_i = Au_i$ этих функций определяются соотношениями:

$$\begin{cases} v_1 = Au_1 = \frac{4!}{R^4} + \frac{4!}{R^4} + \frac{16}{R^4} = \frac{64}{R^4}; \\ v_2 = Au_2 = \frac{120}{R^5}x + \frac{48}{R^5}x + \frac{24}{R^5}x = \frac{192}{R^5}x; \\ v_3 = Au_3 = \frac{24}{R^5}y + \frac{48}{R^5}y + \frac{120}{R^5}y = \frac{192}{R^5}y; \\ v_4 = Au_4 = \frac{32}{R^4} \left(-2 + \frac{15}{R^2}x^2 + \frac{3}{R^2}y^2 \right); \\ v_5 = Au_5 = \frac{32}{R^4} \left(-2 + \frac{3}{R^2}x^2 + \frac{15}{R^2}y^2 \right); \\ v_6 = Au_6 = \frac{120}{R^6}xy + \frac{144}{R^6}xy + \frac{120}{R^6}xy = \frac{384}{R^6}xy. \end{cases} \quad (13)$$

Следует вычислить элементы матрицы Грама образов координатных функций:

$$g_{ij} = (v_i, v_j) = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_i(x, y)v_j(x, y)dxdy.$$

В окончательном виде матрицу Грама образов координатных функций запишем в виде

$$G = (g_{ij}) = \frac{4^5}{R^6} \pi \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 19 & 7 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \quad i, j = \overline{1, 6}. \quad (14)$$

Вычислим элементы столбца $(f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6)^T \stackrel{\text{def}}{=} F$:

$$\begin{cases} f_1 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_1 f(x, y)dxdy = \frac{64}{R^4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y)dxdy; \\ f_2 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_2 f(x, y)dxdy = \frac{192}{R^5} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xf(x, y)dxdy; \\ f_3 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_3 f(x, y)dxdy = \frac{192}{R^5} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} yf(x, y)dxdy; \end{cases} \quad (15a)$$

$$\begin{cases}
 f_4 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_4 f(x, y) dx dy = \\
 = \frac{32}{R^4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(-2 + \frac{15}{R^2} x^2 + \frac{3}{R^2} y^2 \right) f(x, y) dx dy; \\
 f_5 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_5 f(x, y) dx dy = \\
 = \frac{32}{R^4} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \left(-2 + \frac{3}{R^2} x^2 + \frac{15}{R^2} y^2 \right) f(x, y) dx dy; \\
 f_6 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} v_6 f(x, y) dx dy = \frac{384}{R^6} \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy f(x, y) dx dy
 \end{cases} \quad (156)$$

и окончательно запишем

$$F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \end{pmatrix} = \frac{3^2}{R^4} \begin{pmatrix} 2I_0 \\ \frac{6}{R} I_x \\ \frac{6}{R} I_y \\ -2I_0 + \frac{15}{R^2} I_{x^2} + \frac{3}{R^2} I_{y^2} \\ -2I_0 + \frac{3}{R^2} I_{x^2} + \frac{15}{R^2} I_{y^2} \\ \frac{12}{R^2} I_{xy} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где

$$\begin{cases}
 I_0 = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} f(x, y) dx dy; & I_x = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x f(x, y) dx dy; \\
 I_y = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} y f(x, y) dx dy; & I_{x^2} = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} x^2 f(x, y) dx dy; \\
 I_{y^2} = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} y^2 f(x, y) dx dy; & I_{xy} = \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} xy f(x, y) dx dy.
 \end{cases} \quad (17)$$

В силу (11) получим

$$C = G^{-1} F. \quad (18)$$

Остается задать значения моментов плотности приведенной силы $\bar{k}f(x, y)$.

С этой целью акустическое излучение представим в виде плоской гармонической волны давления, распространяющейся в направлении \vec{n} :

$$P = P_0 \exp i[\omega t - \vec{k}_0 \vec{r}_0],$$

где $\vec{k}_0 = \vec{n} \frac{\omega}{c}$ – волновой вектор; \vec{n} – единичный вектор направления распространения волны; \vec{r}_0 – радиус-вектор точки пространства. Тогда давление в падающей (P_1), отраженной (P_2) и прошедшей (P_3) волнах определяется по следующим соотношениям:

$$P_1 = P_{10} \exp i \left[\omega t - k_0 \left(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1 + \left(z + \frac{h}{2} \right) \cos \theta_1 \cos \theta \right) \right];$$

$$P_2 = P_{20} \exp i \left[\omega t - k_0 \left(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1 - \left(z + \frac{h}{2} \right) \cos \theta_1 \cos \theta \right) \right];$$

$$P_3 = P_{30} \exp i \left[\omega t - k_0 \left(-x \cos \theta_1 \sin \theta' + y \sin \theta_1 + \left(z - \frac{h}{2} \right) \cos \theta_1 \cos \theta' \right) \right].$$

Угол θ' вычисляется согласно закону Снеллиуса:

$$\frac{c_1}{\cos \theta_1 \sin \theta} = \frac{c_3}{\cos \theta_1 \sin \theta'}.$$

Если для простоты взять $k_0 = k_1$ и $\theta' = \theta$, то давления определяются по следующим выражениям:

$$P_1 = P_{10} \exp i \left[\omega t - k_0 \left(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1 + \left(z + \frac{h}{2} \right) \cos \theta_1 \cos \theta \right) \right];$$

$$P_2 = P_{20} \exp i \left[\omega t - k_0 \left(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1 - \left(z + \frac{h}{2} \right) \cos \theta_1 \cos \theta \right) \right];$$

$$P_3 = P_{30} \exp i \left[\omega t - k_0 \left(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1 + \left(z - \frac{h}{2} \right) \cos \theta_1 \cos \theta \right) \right].$$

В предположении нормального падения звуковой волны на лицевую сторону пластины, т.е. принимая $\theta_1 = 0$, приходим к известным соотношениям [4].

Таким образом, на лицевой стороне торца избыточное давление равно

$$(P_1 + P_2) \Big|_{z=-h/2} = (P_{10} + P_{20}) \exp i[\omega t - k_0(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1)],$$

в зоне акустической тени –

$$P_3 \Big|_{z=h/2} = P_{30} \exp i[\omega t - k_0(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1)].$$

В дальнейшем будем учитывать влияние только антисимметричной составляющей звукового давления P_a как наиболее опасной:

$$P_a = \frac{1}{2}(P_{10} + P_{20} - P_{30}) \exp i[\omega t - k_0(-x \cos \theta_1 \sin \theta + y \sin \theta_1)] = \\ = P_0 \exp i[\omega t - k_0(-\alpha x + \beta y)].$$

Для количественной оценки стационарного взаимодействия торцевой пластины с акустической волной примем следующие значения параметров: $P_0 = 165 \text{ дБ} \approx 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$; $R = 0,04 \text{ м}$; $\omega = (1 \dots 6) \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$; $D = 67,61 \cdot 10^{-9} \text{ Н} \cdot \text{м}$; $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$; $\sigma = 0,31$; $E = 71 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$; $c_0 = 330 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,26$; $\theta_1 = \theta = 15^\circ$.

Числовые значения прогибов под действием звукового излучения приведены в таблице и определяются формулой (6) с учетом соотношений (13).

Прогибы $W \cdot 10^{-9}$ торцов поплавок для $R = 0,04$

r	$\omega = 1000$	$\omega = 2000$	$\omega = 3000$	$\omega = 4000$	$\omega = 5000$	$\omega = 6000$
0	799,915	799,660	799,235	798,641	797,876	796,942
0,001	798,915	798,661	798,237	797,643	796,879	795,946
0,002	795,920	795,667	795,244	794,653	793,892	792,962
0,003	790,941	790,689	790,269	789,681	788,925	788,001
0,004	783,996	783,747	783,331	782,748	781,999	781,083
0,005	775,112	774,866	774,455	773,878	773,138	772,232
0,006	764,323	764,080	763,675	763,107	762,376	761,483
0,007	751,669	751,431	751,032	750,473	749,755	748,877
0,008	737,200	736,967	736,576	736,028	735,324	734,463
0,009	720,972	720,744	720,362	719,826	719,137	718,295
0,010	703,048	702,827	702,453	701,931	701,260	700,439
0,011	683,501	683,285	682,923	682,415	681,762	680,964
0,012	662,407	662,199	661,847	661,355	660,723	659,950
0,013	639,854	639,654	639,314	638,839	638,228	637,482
0,014	615,936	615,744	615,417	614,960	614,372	613,653
0,015	590,754	590,570	590,256	589,818	589,254	588,565
0,016	564,416	564,241	563,941	563,523	562,984	562,326
0,017	537,039	536,873	536,588	536,189	535,677	535,051
0,018	508,747	508,589	508,320	507,942	507,457	506,864
0,019	479,670	479,522	479,268	478,912	478,455	477,896
0,020	449,947	449,809	449,571	449,237	448,809	448,285
0,021	419,726	419,597	419,375	419,064	418,664	418,176
0,022	389,159	389,040	388,834	388,546	388,175	387,722
0,023	358,407	358,299	358,109	357,843	357,502	357,085

0,024	327,640	327,541	327,368	327,125	326,814	326,433
0,025	297,034	296,945	296,788	296,568	296,285	295,940
0,026	266,772	266,692	266,551	266,354	266,100	265,790
0,027	237,046	236,975	236,850	236,674	236,449	236,174
0,028	208,054	207,992	207,882	207,728	207,531	207,289
0,029	180,002	179,949	179,854	179,721	179,550	179,341
0,030	153,105	153,060	152,980	152,866	152,721	152,544
0,031	127,583	127,546	127,479	127,385	127,264	127,116
0,032	103,666	103,636	103,582	103,505	103,407	103,287
0,033	81,589	81,566	81,523	81,463	81,385	81,291
0,034	61,597	61,579	61,547	61,501	61,443	61,372
0,035	43,939	43,927	43,904	43,871	43,830	43,779
0,036	28,876	28,868	28,853	28,831	28,804	28,771
0,037	16,763	16,668	16,660	16,647	16,631	16,612
0,038	7,604	7,602	7,598	7,592	7,585	7,576
0,039	1,950	1,949	1,948	1,947	1,945	1,943
0,040	0	0	0	0	0	0

Обращенная матрица Грама имеет вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4810 & 0 & 0 & -0,09260 & -0,09260 & 0 \\ 0 & 0,111 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,111 & 0 & 0 & 0 \\ -0,0926 & 0 & 0 & 0,07870 & -0,00463 & 0 \\ -0,0926 & 0 & 0 & -0,00463 & 0,07870 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,167 \end{pmatrix}.$$

Численный анализ показал, что для малых углов θ и θ_1 , что соответствует наибольшей интенсивности воздействия, в торцах поплавка генерируются изгибные колебания, величина которых в геометрическом центре максимальна и уменьшается в направлении периферии.

Изгибные волны в плане имеют вид концентрических окружностей.

Величина и фаза прогиба W не зависят от полярного угла φ (рис. 2).

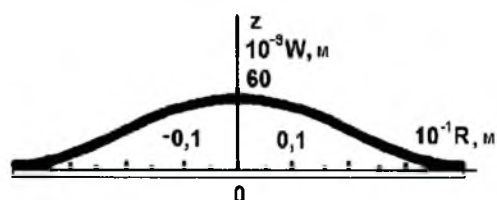


Рис. 2. Прогибы торцевых пластин поплавка при стационарном взаимодействии с акустической волной.

Рассмотрим эти процессы во времени.

Нестационарная задача. В случае нестационарного упругого взаимодействия дифференциальное уравнение возмущенного изгибного движения пластины (1) имеет вид

$$\Delta^2 W(x, y, t) + \frac{\rho h}{D} \ddot{W}(x, y, t) = \frac{1}{D} q(x, y, t), \quad (19)$$

где $\frac{\rho h}{D} = \text{const}$; t – время.

Правую часть этого уравнения зададим следующим образом:

$$\frac{1}{D} q(x, y, t) = f(x, y) \exp i\omega t, \quad (20)$$

где $\omega = \text{const}$, а ограничения на величину этого параметра уточним далее. Решение уравнения (19) ищем в виде

$$W(x, y, t) = \rho(x, y) \exp i\omega t. \quad (21)$$

Множитель $\rho(x, y)$, который не зависит от времени t , назовем амплитудой изгибных колебаний.

Подставляя (21) в исходное уравнение (19), получаем

$$\Delta^2 \rho(x, y) - \omega_{\Pi} \rho(x, y) = f(x, y), \quad (22)$$

где $\omega_{\Pi} = \frac{\rho h}{D} \omega^2 = \text{const}$.

Найдем приближенные решения в форме (6):

$$\rho(x, y) = c^i u_i(x, y), \quad i = \overline{1, N}. \quad (23)$$

Столбец

$$C = (c^1 \quad c^2 \quad \dots \quad c^N)^T \quad (24)$$

подлежит определению.

Подстановка (23) в (22) приводит к приближенному равенству

$$A c^i u_i(x, y) - \omega_{\Pi} c^i u_i(x, y) \approx f(x, y), \quad (25)$$

для которого столбец (24) полагаем наиболее подходящим в том смысле, чтобы проекции левой и правой частей выражения (25) на линейную оболочку V^N образов координатных функций были бы равны.

Умножив обе части равенства (25) на

$$v_j(x, y) = A u_j(x, y), \quad j = \overline{1, N},$$

получаем

$$[(v_i, v_j) - \omega_{\Pi}(u_i, u_j)]c^i = (f, v_j) \stackrel{\text{def}}{=} f_j, \quad i, j = \overline{1, N}. \quad (26)$$

Матрица Грама образов координатных функций

$$G = (g_{ij}), \quad g_{ij} = (v_i, v_j)$$

найдена выше и описана формулой (14). Столбец $F = (f_1 \ f_2 \ \dots \ f_N)^T$ также определен и представлен соотношением (16). Таким образом, остается составить матрицу

$$B = (b_{ij}), \quad b_{ij} = (u_i, v_j), \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (27)$$

которую назовем матрицей Грама координатных функций $u_i(x, y)$ по энергии оператора A .

После вычислений получим

$$B = (b_{ij}) = (u_i v_j) = \frac{8\pi}{15R^2} \begin{vmatrix} 40 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 7 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \quad (28)$$

Зная матрицу Грама образов координатных функций (14) и матрицу Грама B координатных функций по энергии оператора A (28), систему (26) можно записать так:

$$(G - \omega_{\Pi} B)C = F. \quad (29)$$

Если $\det(G - \omega_{\Pi} B) \neq 0$, то эта система однозначно разрешима:

$$C = (G - \omega_{\Pi} B)^{-1} F, \quad (30)$$

и можно строить приближенное решение уравнения (22) в виде (23).

Поскольку матрица B неособенная (невырожденная), то

$$\det(G - \omega_{\Pi} B) = \det B(B^{-1}G - \omega_{\Pi} I),$$

где I – единичная матрица.

Тогда

$$\det(G - \omega_{\Pi} B) = (\det B) \det(B^{-1}G - \omega_{\Pi} I);$$

$$\det(G - \omega_{\Pi} B) = 0 \Leftrightarrow \det(B^{-1}G - \omega_{\Pi} I) = 0.$$

Однако $\det(B^{-1}G - \omega_{\Pi} I)$ есть многочлен степени N относительно ω_{Π} . Если ω_0 является положительным корнем этого уравнения, то система (29) может оказаться неразрешимой.

Проанализируем это более подробно. Для простоты полагаем уравнение однородным:

$$\Delta^2 k^2 W + \ddot{W} = 0, \quad (31)$$

где $0 < k = \sqrt{\frac{D}{ph}} = \text{const}$ при однородных граничных условиях.

Ненулевые решения ищем в виде

$$W = Z(x, y)T(t), \quad (32)$$

где множитель $Z(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (4).

Подставляя (32) в уравнение (31), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^2 Z}{Z} + \frac{\ddot{T}}{k^2 T} &= 0; \\ \Rightarrow \frac{\Delta^2 Z}{Z} &= \lambda = \text{const} \Rightarrow AZ = \lambda Z, \end{aligned} \quad (33)$$

где $A = \Delta^2$.

Тогда

$$\ddot{T} + \lambda k^2 T = 0. \quad (34)$$

Приближенное решение задачи (33) отыскиваем в виде

$$Z(x, y) = c^i u_i(x, y), \quad i = \overline{1, 6}, \quad (35)$$

где $u_i(x, y)$ – координатные функции (5).

После подстановки выражения (35) в соотношение (33) получим приближенное равенство

$$Ac^i u_i(x, y) \approx \lambda c^i u_i(x, y) \quad (36)$$

с неизвестным столбцом $C = (c^1 \ c^2 \ \dots \ c^6)^T$.

Как и ранее, наилучшим считаем столбец, при котором проекции левой и правой частей выражения (36) на линейную оболочку V^N образов координатных функций были бы равны:

$$GC = \lambda BC \Rightarrow (G - \lambda B)C = 0.$$

Столбец C не должен быть нулевым, поэтому

$$\det(G - \lambda B) = 0.$$

Из положительной определенности оператора A следует, что $0 < \lambda$, а значит, $\lambda = \omega_{\Pi}$ есть положительные корни многочлена $\det(B^{-1}G - \omega_{\Pi}I)$. В данной задаче они представляются приближенными собственными числами оператора $A = \Delta^2$.

Принимая во внимание, что $\lambda = \omega_{\Pi} > 0$, из выражения (33) находим

$$T = a \cos(k\sqrt{\omega_{\Pi}} t) + b \sin(k\sqrt{\omega_{\Pi}} t).$$

Это значит, что в принятом приближении собственные частоты определяются соотношениями

$$k\sqrt{\omega_{\Pi}} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \omega \sqrt{\frac{\rho h}{D}} = \omega.$$

Следовательно, для разрешимости определения вынужденных колебаний торцов необходимо исключить совпадение частот плотности возмущающего акустического воздействия и собственной, другими словами, избежать частотного резонанса.

Если ограничиться только первыми тремя координатными функциями

$$u_1 = \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}\right)^2; \quad u_2 = \frac{x}{R} u_1; \quad u_3 = \frac{y}{R} u_1$$

и их образами

$$V_1 = \frac{64}{R^4} = \text{const}; \quad V_2 = \frac{192}{R^5} x; \quad V_3 = \frac{192}{R^5} y,$$

то матрица $G - \omega_{\Pi}B$ окажется диагональной:

$$G - \omega_{\Pi}B = \begin{vmatrix} \frac{4^6 \pi}{R^6} - \frac{320\pi}{15R^2} \omega & & \\ & \frac{4^5 9\pi}{R^6} - \frac{8\pi}{R^2} \omega & \\ & & \frac{4^5 9\pi}{R^6} - \frac{8\pi}{R^2} \omega \end{vmatrix}. \quad (37)$$

Нули ее определителя будут наблюдаться при условии

$$\omega_{\Pi 1} = \frac{3 \cdot 2^6}{R^4}; \quad \omega_{\Pi 2} = \omega_{\Pi 3} = \frac{9 \cdot 2^7}{R^4}$$

с одновременным выполнением соотношения $\omega_{\Pi 2}/\omega_{\Pi 1} = 6$.

Для принятых числовых значений при $R = 0,04$ м значения этих частот будут таковы:

$$\omega_{п1} = 0,75 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{п2} = \omega_{п3} = 450 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}.$$

Резонансными являются следующие:

$$\omega_1^p = k\sqrt{\omega_{п1}} = 3,1 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_2^p = \omega_3^p = k\sqrt{\omega_{п2}} = k = 7,5 \text{ с}^{-1},$$

где

$$k = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = \sqrt{\frac{70 \cdot 10^{-9}}{280 \cdot 2 \cdot 10^{-3}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} 10^{-3} \text{ м}^2 \cdot \text{с}^{-1}.$$

Численный анализ величины $\det(G - \omega_{п}B)$ позволяет определить резонансные частоты (рис. 3), составляющие 2,4; 7,3; 13,7 и 17,7 с^{-1} .

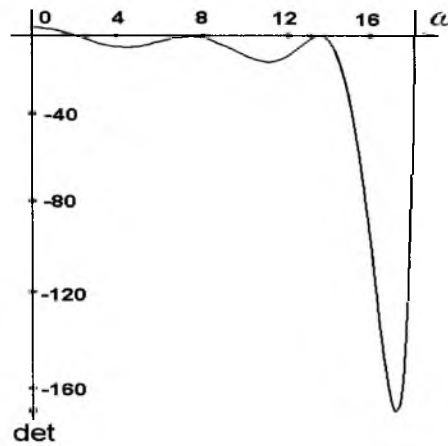


Рис. 3. Численный анализ $\det(G - \omega_{п}B)$.

Количественную оценку прогибов торца проведем в диапазоне частот $\omega = 1000 \dots 6000 \text{ с}^{-1}$ с шагом 1000 для $\rho = 280 \text{ кг/м}^3$, $h = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $\omega_{п} = \frac{\rho h}{D} \omega^2$.

Величина прогиба есть комплексное число

$$W = iW_1 + W_2 = \rho \exp(i\omega t),$$

где $\rho = c^j u_j$, $j = 1, 2, 3$; функции u_j задаются формулой (12); $C = (G - \omega_{п}B)^{-1}F$; $(G - \omega_{п}B)$ – определяется матрицей (37); столбец F – формулой (16); $P_0 = 10^2 \text{ Н} \cdot \text{м}^{-2}$; $R = 0,04 \text{ м}$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,26$; $t = n \frac{\pi}{60}$, $n = 1, \dots, 6$; $r = 0, \dots, 0,04$, шаг 0,001.

Естественно, что с течением времени фаза колебаний изменяет знак. Так, в момент времени $t = \frac{\pi}{6\omega}$ ($\omega = 10^3 \text{ с}^{-1}$), что составляет около $0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}$, амплитуда прогиба в центре торца равна $0,464 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, при $t = \frac{\pi}{3\omega}$ – $0,268 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, при $t = \frac{\pi}{2\omega}$ прогиб равен нулю, и пластина занимает исходное положение.

С увеличением t фаза прогиба изменяет знак, и пластина начинает прогибаться в противоположном направлении. Таким образом, через определенное время наблюдаются своеобразные “хлопки” торцевой пластины.

Вообще говоря, торцы поплавка находятся не в одинаковых условиях с точки зрения акустического нагружения. Дифракция звуковой волны внутри подвеса может менять структуру поля совершенно случайным образом. Поэтому полная симметрия в пространстве и во времени акустической вибрации отсутствует, что является дополнительным источником принудительного движения и, следовательно, дополнительной акустической девиации.

Заключение. Приведенные результаты позволяют понять природу упругого взаимодействия плоских элементов бортовой навигационной аппаратуры с проникающим акустическим излучением, оценить степень влияния звуковых полей на напряженно-деформированное состояние материала и научно обосновать рекомендации к эффективному подавлению этого влияния. Например, на основе пассивных методов звукоизоляции либо автокомпенсационных методов подавления этого влияния.

Резюме

Аналізується пружна взаємодія проникаючого акустичного випромінювання розгінних блоків ракет-носіїв із підвісом поплавкового гіроскопа. Розглядається торцева пластина поплавця як найбільш небезпечна з точки зору малої її жорсткості у напрямку нормалі. Проведено якісну і кількісну оцінки пружного деформованого стану поплавця.

1. *Ткачев Л. И.* Системы инерциальной ориентировки: Учеб. пособие. – М.: Изд-во МЭИ, 1973. – 213 с.
2. *Draper C. S., et al.* V. S. Patent No. 2752790, No. 2752792, No. 2752793. – 1956 (July).
3. *Koshljakov V. N., Karachun V. V., and Mel'nik V. N.* The some aspects of flight safety in conditions penetrate acoustic radiation. The world Congress “Aviation in the XXIst Century” (Sept. 14–16, 2003). – Kyiv: National Aviation University. – P. 2.37 – 2.40.
4. *Карачун В. В., Лозовик В. Г., Мельник В. Н.* Дифракция звуковых волн на подвесе гироскопа. – Киев: Корнейчук, 2000. – 176 с.
5. *Rayleigh L.* On the vibration of a cylindrical vessel containing liquid // *Philos. Mag.* – 1883. – 15.

6. Николаи Е. И. О колебаниях тонкостенных цилиндров // Журн. рус. физ.-хим. об-ва. – 1909. – **11**, отдел 1. – С. 41 – 46.
7. Lamb H. On the vibration of an elastic plate in contact with water // Proc. Roy. Soc., Ser. A. – 1920. – **98**. – P. 690.
8. Лямшев Л. М. Отражение звука тонкими пластинами и оболочками в жидкости. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 73 с.
9. Григолюк Э. И., Горшков А. Г. Взаимодействие слабых ударных волн с упругими конструкциями. – М.: Изд-во Моск. ун-та. Ин-т механики, 1968. – 180 с.
10. Гринченко В. Т. Равновесие и установившиеся колебания упругих тел конечных размеров. – Киев: Наук. думка, 1978. – 264 с.
11. Гузь А. Н., Кубенко В. Д. Методы расчета оболочек. Т. 5. Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наук. думка, 1982. – 400 с.

Поступила 12. 12. 2005