УДК 629.12:12.001

# О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ В РАБОТЕ МИЧЕЛЛА О ВОЛНОВОМ СОПРОТИВЛЕНИИ СУДНА

**В. Г. СИЗОВ**

*Одесская национальная морская академия*

*Получено 03.11.2004*

Обсуждается вопрос о граничном условии на бесконечности для краевой задачи, определяющей потенциал скоростей, вызванных движущимся судном. Отмечается сложность в асимптотике убывания скоростей. Приводится высказанное М. Г. Крейном предположение о возможных условиях на бесконечности впереди и позади судна. Затем рассмотрен метод, примененный Мичеллом для решения полученной им краевой задачи. Отмечается, что по сути Мичелл впервые применил обобщенное преобразование Фурье для решения краевой задачи и что М. Г. Крейн предложил частный вид примененного Мичеллом преобразования назвать преобразованием Фурье-Мичелла. Указывается более общий вид уравнений, к которым применимо преобразование Фурье-Мичелла.

Обговорюється питання про граничну умову на нескінченності для крайової задачі, що визначає потенціал швидкостей, викликаних судном, яке рухається. Відзначається складність в асимптотиці убування швидкостей. Приводиться висловлене М. Г. Крейном припущення про можливі умови на нескінченності перед і за судном. Розглянутий метод, застосований Мічеллом для рішення отриманої їм крайової задачі. Відзначається, що по суті Мічелл уперше застосував узагальнене перетворення Фур'є для рішення крайової задачі і що М. Г. Крейн запропонував окремий вид застосованого Мічеллом перетворення назвати перетворенням Фур'є-Мічелла. Указується більш загальний вид рівнянь, до яких застосовне перетворення Фур'є-Мічелла.

Boundary condition at infinity was discussed for extreme case determining the velocity potential due to vessel's motion, which is complicated as the asimptote of velocity decreases. M.G.Krein assumtion about possible conditions at infinity before and after the vessel was also mentioned. Mitchell method was also stadied to solve the boundary condition he developed, and it was mentioned that Mitchell was the first to apply the general transformation of Furrie to solve this boundary conditioms. Krein proposed to call this special transformation after Furrie-Mitchell. Also mentioned the more general version of the equation to which Furrie-Mitchell transformation was applied.

В настоящей статье рассматриваются два вопроса, которые недостаточно освещены в специальной литературе, относящейся к работе Мичелла [1] и вообще к теории волнового сопротивления судна.

Первый вопрос касается граничного условия на бесконечности для краевой задачи, определяющей потенциал скоростей, вызванных движущимся судном.

В своей работе Мичелл обращает внимание на неопределенность в решении краевой задачи с установленными им граничными условиями, состоящую в том, что на полученное решение всегда могут быть наложены свободные волны. Он оговаривает, что дополнительно накладываемые волны должны быть выбраны таким образом, чтобы на бесконечном удалении перед судном волны отсутствовали, и затем приводит окончательное выражение для потенциала, не указывая, как оно получено. Относительно поведения потенциала вдали за судном Мичелл вообще не упоминает. Таким образом, вопрос об устранении имеющейся неопределенности в его работе не получил ясного освещения.

Н.Е.Кочин в работе [2] о волновом сопротивлении и подъемной силе погруженных в воду тел при формулировке краевой задачи для потенциала скоростей требует, чтобы на бесконечности впереди тела, при $x \to +\infty$, возмущенные скорости стремились к нулю, а при удалении по другим направлениям, при $x^2 + y^2 + z^2 \to \infty$, требует лишь их ограниченности.

Однако, как было показано А. А. Костюковым [3], если водоем не ограничен боковыми стенками, то при любой его глубине убывание возмущенных скоростей до нуля имеет место как впереди, так и позади судна, но быстрота убывания имеет различный порядок. Впереди судна, при $x \to \infty$, амплитуды поднимаемых им волн и возмущенные скорости убывают обратно пропорционально расстоянию, а позади судна, при $x \to -\infty$ – обратно пропорционально корню квадратному из расстояния.

Сложность вопроса усугубляется тем, что, как обнаружил Питерс [4], рассматривая движение системы давлений, имеются направления, вдоль которых убывание скоростей происходит по другим законам. Им было установлено, что за судном по направлению, составляющему угол $\varphi = \arcsin \dfrac{1}{3} \approx 19°28'$ с отрицательной осью $0x$, амплитуды волн и скорости убывают обратно пропорционально корню кубическому из расстояния.

Предложенный Рэлеем способ устранения свободных волн путем введения фиктивных рассеивающих сил, пропорциональных скоростям частиц жидкости, конечно, достигает своей цели, так как граничное условие на свободной поверхности с добавочным слагаемым от таких рассеивающих сил не может быть удовлетворено какими-либо гармоническими функциями, ограниченными во всем полупространстве, занятом жидкостью, и, стало быть, исключается появление свободных волн. Однако способ Рэлея нельзя представлять как опирающийся на какие-то физические реальности. Если же его рассматривать как математический прием, то необходимо показать, что другие приемы такого же рода будут приводить к такому же результату. Между тем этого пока никто не показал.

М. Г. Крейн высказал предположение, что действительная формулировка условий на бесконечности, возможно, состоит в том, чтобы впереди судна порядок стремления скоростей к нулю был максимально быстрым, а позади судна – возможно медленным. Однако проблема остается нерешенной вплоть до настоящего времени.

Второй вопрос, на который следует обратить внимание, относится к методу, примененному Мичеллом при решении полученной им краевой задачи, определяющей потенциал скоростей, возмущенных движущимся судном.

Для отыскания потенциала скоростей Мичелл представляет его в виде разложения по некоторой системе функций, которые на свободной поверхности удовлетворяют тому же условию, что и искомый потенциал, и на полуоси $(0,\infty)$ образуют ортогональную систему с весовой функцией. Таким образом, по существу Мичелл использовал формулы обобщенного преобразования Фурье, общая теория которого разработана позже работы Мичелла. В связи с этим М. Г. Крейн посчитал естественным частный случай обобщенного преобразования Фурье, примененный Мичеллом, назвать преобразованием Фурье-Мичелла, и в своих работах мы всегда используем этот термин.

Преобразование Фурье-Мичелла оказалось эффективным средством решения краевых задач в тех случаях, когда условие на границе имеет вид такой же, как линеаризованное условие на свободной поверхности жидкости. Среди других методов это преобразование, по-видимому, наиболее быстро ведет к цели.

Рассмотрим краевую задачу, типичную для волновых движений жидкости, например, задачу определения потенциала $g_1(x,y,z)$ источника единичной интенсивности, расположенного в равномерном потоке в точке $(\xi,0,\zeta)$.

Пусть $g(p,y,z)$ будет трансформантой Фурье этого потенциала по координате $x$:

$$g(p,y,z)=\int\limits_{\infty}^{\infty} g_1(x,y,z)e^{ipx}dx,$$

тогда для функции $g$ получим краевую задачу:

$$LG=g_{zz}+g_{yy}-p^2g=0,$$

$$g_z-kg=0 \quad \text{при} \quad z=0,$$

$$g_y=\frac{1}{2}e^{ip\xi}\delta(z-\zeta) \quad \text{при} \quad y=0.$$

Суть метода решения в современной записи состоит в представлении искомой функции в виде ее преобразования Фурье по следующим комбинациям косинуса и синуса:

$$\Psi(z,\lambda)=\cos\lambda z+\frac{k}{\lambda}\sin\lambda z.$$

Функции $\Psi$ при любом $k$ удовлетворяют уравнению:

$$\Psi(z,z)+\lambda^2\Psi=0,$$

и граничному условию при $z=0$:

$$\Psi_z-k\Psi=0,$$

т. е. тому же, что и искомая функция $g$, и представляют собой ортогональную систему функций на интервале $(0,\infty)$ с весом $\dfrac{1}{1+\dfrac{k^2}{\lambda^2}}$.

Поэтому можно положить

$$G(p,y,\lambda)=\int\limits_{0}^{\infty} g(p,y,z)\Psi(z,\lambda)dz.$$

Здесь важно отметить следующее. Если $k\geq 0$, то система функций $\Psi$ является полной; при $k<0$ она перестает быть полной и ее следует дополнить функцией $e^{kz}$, вместе с которой система опять становится полной.

В волновых задачах всегда $k<0$, это характеризует в некотором смысле неустойчивость системы; в частности в рассматриваемой задаче $k=-\dfrac{\nu^2}{g}p^2$.

Формула обращения при $k<0$ будет:

$$g(p,y,z)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} G(p,y,\lambda)\Psi(z,\lambda)\frac{d\lambda}{1+\dfrac{k^2}{\lambda^2}}+\Gamma(p,y)e^{kz}.$$

Функции $G$ и $\Gamma$ определяютя подстановкой этого выражения в уравнение $L(g) = 0$ с использованием условия при $y = 0$. При $k > 0$ второе слагаемое правой части будет отсутствовать, при $k = 0$ формулы дают обычное косинус-преобразование Фурье.

Этим методом А. А. Костюков нашел потенциал источника, движущегося под поверхностью глубокой воды, т. е. функцию Грина краевой задачи, и показал его тождественность с выражением, полученным Н. Е. Кочиным другим путем.

Функции Грина, получаемые разными методами, имеют различный вид, но, конечно, тождественны. Эта тождественность может быть показана и непосредственным преобразованием, однако путь для этого отнюдь не очевиден. В зависимости от характера исследуемой задачи или для производства численных расчетов мы можем выбирать наиболее подходящее представление этой функции.

Вид потенциала, найденный А. А. Костюковым, соответствует тому, который получается из мичелловского потенциала скоростей судна. Следует заметить, что самим Мичеллом потенциал точечного источника в явном виде получен не был и лишь в 1949 г. Б. Я. Левин показал, что Мичеллу оставалось очень немного сделать, чтобы из найденного им потенциала скоростей возмущенных судном выделить потенциал точечного источника.

Этим же методом нами получен потенциал движущегося пульсирующего источника, при этом величина $k$ выражалась через скорость и частоту пульсаций в виде $k = -\dfrac{(\sigma - \nu p)^2}{g}$ и показана его тождественность с выражением через контурный интеграл, найденным Л. Н. Сретенским, а для неподвижного пульсирующего источника, т. е. при $\nu = 0$, – с выражением, полученным Н. Е. Кочиным. Этот потенциал использован при вычислении волнового сопротивления судна, испытывающего качку при ходе на волнении.

Случай положительного $k$ встретился в задаче о распространении звуковых волн, излучаемых горизонтально колеблющимся вибратором в атмосфере, т. е. в сжимаемом газе. В этой задаче удобнее было рассматривать потенциал плотности потока, для которого граничное условие на поверхности земли имеет тот же вид, что и на свободной поверхности жидкости, но при этом $k = \dfrac{\gamma g}{2c^2} > 0$, где $\gamma = \dfrac{c_p}{c_\nu}$ – отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме, а $c = \left(\dfrac{dp}{d\rho}\right)$ – скорость распространения звука. В этом случае система функций $\Psi$ – полная и в формуле обращения будет отсутствовать второе слагаемое правой части.

Упомянутые примеры свидетельствуют, что преобразование Фурье-Мичелла может быть использовано при решении многих задач гидромеханики.

Вообще это преобразование применимо к более общему виду уравнений, а именно, к виду:

$$L(g) = G_{zz} + L_1 g = 0,$$

где $L_1$ – оператор, содержащий частные производные только по $x$ и по $y$, но граничное условие при $z = 0$ должно быть таким же, как на свободной поверхности жидкости.

В связи с изложенным методом можно отметить следующее.

Рассматривая такую же краевую задачу в своей работе “Eigenfunction expansion associated with second-order differential equations”, Oxford, 1946, английский математик Э.Ч.Титчмарш, директор математического института Оксфордского университета, ошибочно принял систему функций $\Psi$ за полную при всех значениях $k$. Эта ошибка повторялась в работах других авторов. Позже Титчмарш опубликовал статью, в которой исправил свои первоначальные результаты. В то же время, Мичелл, задолго до работ Г.Вейля, пользуясь предельным переходом, нашел правильную формулу для обобщенного преобразования Фурье и получил верное выражение для потенциала скоростей, возмущенных судном. Однако, несмотря на сотни работ, посвященных исследованию Мичелла, ни в одной из них нет указаний на приоритет Мичелла в примененном им обобщении преобразования Фурье. Возможно, это объясняется тем, что на работу Мичелла обратили внимание лишь через много лет после ее опубликования, когда методы решения краевых задач получили значительное развитие.

1. *Michell J.H.* The wave resistance of a ship // Phil. Mag.– 1898.– N 45.– P. 106–123.
2. *Кочин Н.Е.* О волновом сопротивлении и подъемной силе действующих на тела погруженные в жидкость. // Труды конференции по теории волнового сопротивления – М., 1937 – С. 65-134.
3. *Костюков А.А.* Теория судовых волн и волнового сопротивления.– М.: Судпромгиз, 1959.– 311 с.
4. *Peters A.A.* A new treatment of the ship wave problems // Communications on pure and applied mathematics.– 1949.– N 2.– P. 123-148.