УДК 539.3

Динамика трехслойных стержней

Э. И. Старовойтов, Д. В. Леоненко, А. В. Яровая

Белорусский государственный университет транспорта, Гомель, Беларусь

Рассмотрены колебания трехслойного стержня под действием локальных, импульсных и резонансных нагрузок различной формы: прямоугольной и синусоидальной. Для описания кинематики несущих слоев приняты гипотезы Бернулли. В жестком сжимаемом заполнителе справедливы соотношения теории упругости с линейной аппроксимацией зависимости перемещений его точек от поперечной координаты z. Получены аналитические решения задач, проведен их численный и сравнительный анализы. Исследована возможность проявления ложного резонанса.

Ключевые слова: упругость, резонанс, трехслойный стержень, сжимаемый заполнитель.

Обозначения

ρ_k	– плотность материала k-го слоя ($k = 1, 2, 3$)
$q(r, t)$	– внешняя распределенная нагрузка
$q_n(t)$	– коэффициенты разложения нагрузки в ряд по собственным функциям
q_0	– интенсивность распределенной поверхностной нагрузки
w_1, w_2	– прогибы несущих слоев стержня
u_1, u_2	– горизонтальное перемещение срединной поверхности несущих слоев
G_k, K_k	– модули сдвига и объемной деформации
l	– длина стержня
$T_{mk}(t)$	– функция времени
ω_{mi}	– частоты собственных колебаний
δ_{mki}	– собственные формы колебаний
A_n, B_n	– константы интегрирования
h_1, h_2, h_3	– толщины слоев
H_0	– функция Хевисайда
$\delta(t)$	– δ-функция Дирака

Введение. Широкое применение трехслойных элементов конструкций в современных отраслях промышленности обусловливает необходимость разработки методов их расчета. Воздействие локальных статических нагрузок на трехслойные стержни изучалось ранее [1]. В работах [2–5] исследовались поперечные колебания трехслойных пластин с несжимаемым заполнителем под действием различного рода нагрузок. В данной работе рассматриваются малые поперечные колебания несимметричного по толщине упругого трехслойного стержня со сжимаемым заполнителем.

Для изотропных несущих слоев приняты гипотезы Бернулли, в жестком заполнителе справедливы соотношения Коши с линейной аппроксимацией зависимости перемещений его точек от поперечной координаты z. На границах контакта слоев используются условия непрерывности перемещений. Материалы несущих слоев несжимаемы в поперечном направлении, в заполнителе учитывается обжатие. Деформации малые. Система координат x, y, z связывается со срединной плоскостью заполнителя (рис. 1).

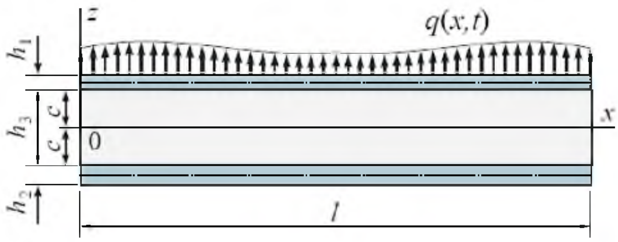

Рис. 1. Расчетная схема трехслойного стержня.

Распределенная поверхностная нагрузка $q(x, t)$ приложена к внешней плоскости первого слоя. Искомыми считаются прогибы и продольные перемещения срединных поверхностей несущих слоев $w_k(x, t)$ и $u_k(x, t)$, $k = 1, 2$. Через h_k и ρ_k обозначены толщина и плотность материала k-го слоя; $h_3 = 2c$; b – ширина стержня. Все перемещения, линейные размеры стержня и координаты отнесены к его длине l.

Продольные и поперечные перемещения в слоях $u^{(k)}(x, z)$ и $w^{(k)}(x, z)$ можно выразить через четыре искомые функции $w_1(x)$, $u_1(x)$, $w_2(x)$ и $u_2(x)$ следующими соотношениями:

в несущих слоях –

$$u^{(1)} = u_1 - \left(z - c - \frac{h_1}{2}\right) w_{1,x}, \qquad w^{(1)} = w_1 \qquad (c \le z \le c + h_1);$$
$$u^{(2)} = u_2 - \left(z + c + \frac{h_2}{2}\right) w_{2,x}, \qquad w^{(2)} = w_2 \qquad (-c - h_2 \le z \le -c), \tag{1а}$$

в заполнителе –

$$u^{(3)} = \left(1 + \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_1 + \frac{h_1}{4}w_{1,x}\right) + \left(1 - \frac{z}{c}\right)\left(\frac{1}{2}u_2 - \frac{h_2}{4}w_{2,x}\right);$$
$$w^{(3)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{z}{c}\right)w_1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{z}{c}\right)w_2 \qquad (-c \le z \le c), \tag{1б}$$

где z – расстояние от рассматриваемого волокна до срединной линии заполнителя; запятая в нижнем индексе обозначает операцию дифференцирования по следующей за ней координате.

Компоненты тензора деформаций следуют из выражений для перемещений (1) и соотношений Коши:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_{xx}^{(1)} = u_{1,x} - \left(z - c - \dfrac{h_1}{2}\right) w_{1,xx} \quad (c \le z \le c + h_1); \\
\varepsilon_{xx}^{(2)} = u_{2,x} - \left(z + c + \dfrac{h_2}{2}\right) w_{2,xx} \quad (-c - h_2 \le z \le -c); \\
\varepsilon_{xz}^{(1)} = \varepsilon_{xz}^{(2)} = 0; \\
\varepsilon_{xx}^{(3)} = \left(1 + \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{1}{2} u_{1,x} + \dfrac{h_1}{4} w_{1,xx}\right) + \left(1 - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{1}{2} u_{2,x} - \dfrac{h_2}{4} w_{2,xx}\right); \\
\varepsilon_{xz}^{(3)} = \left(\dfrac{2z + h_1}{8c} + \dfrac{1}{4}\right) w_{1,x} + \left(\dfrac{-2z + h_2}{8c} + \dfrac{1}{4}\right) w_{2,x} + \dfrac{u_1 - u_2}{4c}; \\
\varepsilon_{zz}^{(3)} = \dfrac{1}{2c}(w_1 - w_2) \quad (-c \le z \le c).
\end{cases}
\tag{2}
$$

Уравнения движения рассматриваемого трехслойного стержня получаем с помощью вариационного принципа Лагранжа с учетом работы сил инерции:

$$
\delta A - \delta W = \delta A_I, \tag{3}
$$

где δA – вариация работы внешних сил; δW – вариация работы внутренних сил упругости; δA_I – вариация работы сил инерции.

При определении работы внешних сил полагаем, что к внешней поверхности первого несущего слоя приложены произвольные распределенные нагрузки $p(x)$, $q(x)$ – рис. 1, а к торцам стержня – некоторые усилия и моменты. Тогда

$$
\begin{cases}
\delta A = b \displaystyle\int_0^l \left[p\left(\delta u_1 - \dfrac{h_1}{2} \delta w_{1,x}\right) + q \delta w_1 \right] dx; \\
\delta W = b \displaystyle\int_0^l \left[\sum_{k=1}^{3} \int_{h_k} \sigma_{xx}^{(k)} \delta\varepsilon_{xx}^{(k)} dz + 2\int_{h_3} \sigma_{xz}^{(3)} \delta\varepsilon_{xz}^{(3)} dz + \int_{h_3} \sigma_{zz}^{(3)} \delta\varepsilon_{zz}^{(3)} dz \right] dx; \\
\delta A_I = b \displaystyle\sum_{k=1}^{3} \int_0^l \int_{h_k} [\rho_k (\ddot{w}^{(k)} \delta w^{(k)} + \ddot{u}^{(k)} \delta u^{(k)})] dz dx,
\end{cases}
\tag{4}
$$

где две точки над перемещениями обозначают вторую частную производную по времени; $\sigma_{ij}^{(k)}$ – компоненты тензора напряжений в k-м слое.

Выражения вариаций деформаций и напряжений в (4) через перемещения следуют из (2) и закона Гука. Подставив (4) в (3) и приравняв нулю коэффициенты при независимых вариациях, получим следующую систему уравнений в частных производных:

$$
\begin{cases}
a_1 u_1 - a_1 u_2 - a_4 u_{1,xx} - a_5 u_{2,xx} + a_2 w_{1,x} + a_3 w_{2,x} - 2a_6 w_{1,xxx} + \\
+ a_7 w_{2,xxx} + m_1 \ddot{u}_1 = 0; \\
- a_1 u_1 + a_1 u_2 - a_5 u_{1,xx} - a_9 u_{2,xx} - a_{10} w_{1,x} - a_{17} w_{2,x} - a_6 w_{1,xxx} + \\
+ 2a_7 w_{2,xxx} + m_2 \ddot{u}_2 = 0; \\
- a_2 u_{1,x} + a_{10} u_{2,x} + 2a_6 u_{1,xxx} + a_6 u_{2,xxx} + a_{11} w_{1,xx} - a_{12} w_{2,xx} + \\
+ a_{15} w_{1,xxxx} - a_{16} w_{2,xxxx} + a_8 w_1 - a_8 w_2 + m_1 \ddot{w}_1 - m_3 \ddot{w}_{1,xx} = q; \\
- a_3 u_{1,x} + a_{17} u_{2,x} - a_7 u_{1,xxx} - 2a_7 u_{2,xxx} - a_{12} w_{1,xx} + a_{14} w_{2,xx} - \\
- a_{16} w_{1,xxxx} + a_{13} w_{2,xxxx} - a_8 w_1 + a_8 w_2 + m_2 \ddot{w}_2 - m_4 \ddot{w}_{2,xx} = 0.
\end{cases} \qquad (5)
$$

Коэффициенты выражаются через механические (K_k, G_k – объемный и сдвиговой модули, ρ_k – плотность материалов k-го слоя, $k = 1, 2, 3$) и геометрические (h_k – толщина слоя, $h_3 = 2c$) параметры стержня:

$$a_1 = \frac{G_3}{2c}; \qquad a_2 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2}; \qquad a_3 = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2};$$

$$a_4 = K_1^+ h_1 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \qquad a_5 = \frac{K_3^+ c}{3}; \qquad a_6 = \frac{K_3^+ c h_1}{6}; \qquad a_7 = \frac{K_3^+ c h_2}{6};$$

$$a_8 = \frac{K_3^+}{2c}; \qquad a_9 = K_2^+ h_2 + \frac{2K_3^+ c}{3}; \qquad a_{10} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right) + \frac{K_3^-}{2};$$

$$a_{11} = \frac{K_3^- h_1}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6};$$

$$a_{12} = \frac{K_3^-(h_1 + h_2)}{4} + \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_1}{2c}\right)\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{G_3 c}{6}; \qquad a_{13} = \frac{K_2^+ h_2^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_2^2}{6};$$

$$a_{14} = \frac{K_3^- h_2}{2} - \frac{G_3 c}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right)^2 - \frac{G_3 c}{6}; \qquad a_{15} = \frac{K_1^+ h_1^3}{12} + \frac{K_3^+ c h_1^2}{6};$$

$$a_{16} = \frac{K_3^+ c h_2 h_1}{12}; \qquad a_{17} = \frac{G_3}{2}\left(1 + \frac{h_2}{2c}\right) - \frac{K_3^-}{2};$$

$$m_1 = \rho_1 h_1 + \frac{2}{3}\rho_3 c; \qquad m_2 = \rho_2 h_2 + \frac{2}{3}\rho_3 c; \qquad m_3 = \frac{\rho_1 h_1^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_1^2}{6};$$

$$m_4 = \frac{\rho_2 h_2^3}{12} + \frac{\rho_3 c h_2^2}{6}; \qquad m_5 = \frac{\rho_3 c h_1}{6}; \qquad m_6 = \frac{\rho_3 c h_1 h_2}{12}; \qquad m_7 = \frac{\rho_3 c h_2}{6};$$

$$m_8 = \frac{\rho_3 c}{3}; \qquad K_k^+ = K_k + \frac{4}{3}G_k; \qquad K_k^- = K_k - \frac{2}{3}G_k.$$

Граничные условия свободного опирания стержня по торцам ($x = 0; 1$) на неподвижные в пространстве жесткие опоры в перемещениях имеют вид

$$w_k = u_{k,x} = w_{k,xx} = 0 \qquad (k = 1, 2). \tag{6}$$

Начальные условия движения таковы ($t = 0$):

$$\begin{aligned} &u_k(x,0) = u_{k0}(x); && \dot{u}_k(x,0) = \dot{u}_{k0}(x); \\ &w_k(x,0) = w_{k0}(x); && \dot{w}_k(x,0) = \dot{w}_{k0}(x) \qquad (k = 1, 2), \end{aligned} \tag{7}$$

где $u_{k0}(x)$, $\dot{u}_{k0}(x)$, $w_{k0}(x)$, $\dot{w}_{k0}(x)$ – заданные начальные перемещения и скорости точек срединных поверхностей несущих слоев.

Решение начально-краевой задачи (5)–(7) проводится методом Бубнова–Галеркина. Для этого искомые перемещения $u_1(x)$, $u_2(x)$, $w_1(x)$, $w_2(x)$ и нагрузка $q(x, t)$ представляются в виде разложения в ряды по системам базисных функций, удовлетворяющих принятым граничным условиям (6):

$$\begin{aligned} &u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\pi m x) T_{m1}(t); && u_2 = \sum_{m=0}^{\infty} \cos(\pi m x) T_{m2}(t); \\ &w_1 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) T_{m3}(t); && w_2 = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) T_{m4}(t); \\ &q(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sin(\pi m x) q_m(t); && q_m(t) = 2\int_0^1 q(x,t)\sin(\pi m x)\,dx, \end{aligned} \tag{8}$$

где $T_{mi}(t)$, $i = 1, 2, 3, 4$ – функции времени; $q_m(t)$ – коэффициенты разложения нагрузки в ряд.

Подстановка выражений (8) в (5) приводит к системе уравнений для определения функции $T_{mi}(t)$, которая в матричном виде такова:

$$[B]\{T\} + [M]\{\ddot{T}\} = \{Q\}, \tag{9}$$

где $[B]$ – квадратная матрица четвертого порядка, элементы которой B_{mij} определяются через параметры b_i, зависящие от m; $[M]$ – диагональная матрица четвертого порядка с элементами M_{mij}; $\{T\}$ и $\{\ddot{T}\}$ – вектор-столбцы, сформированные из искомых функций времени T_{mi} и их вторых производных; $\{Q\}$ – вектор, элементы которого Q_{mk} составлены из коэффициентов разложения нагрузки в ряд:

$$\begin{cases} b_1 = a_1 + a_4\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2; & b_2 = -a_1 + a_5\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2; \\ b_3 = a_2\dfrac{\pi m}{l} + 2a_6\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^3; & b_4 = a_3\dfrac{\pi m}{l} - a_7\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^3; \end{cases} \tag{10a}$$

$$\begin{cases} b_5 = a_1 + a_9\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2; & b_6 = -a_{10}\dfrac{\pi m}{l} + a_6\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^3; \\ b_7 = a_{17}\dfrac{\pi m}{l} + 2a_7\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^3; & b_8 = -a_{11}\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{15}\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8; \\ b_9 = a_{12}\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2 - a_{16}\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^4 - a_8; & b_{10} = -a_{14}\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2 + a_{13}\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^4 + a_8; \\ [B] = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ b_2 & b_5 & b_6 & -b_7 \\ b_3 & b_6 & b_8 & b_9 \\ b_4 & -b_7 & b_9 & b_{10} \end{bmatrix}; \quad \{T\} = \begin{bmatrix} T_{m1} \\ T_{m2} \\ T_{m3} \\ T_{m4} \end{bmatrix}; & \{Q\} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_m \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \{\ddot{T}\} = \begin{bmatrix} \ddot{T}_{m1} \\ \ddot{T}_{m2} \\ \ddot{T}_{m3} \\ \ddot{T}_{m4} \end{bmatrix}; \\ [M] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 + m_3\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_2 + m_4\left(\dfrac{\pi m}{l}\right)^2 \end{bmatrix}. & \end{cases} \qquad (10б)$$

Для замыкания задачи необходимо добавить начальные условия (7). Систему (9) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^{4} B_{mkj}T_{mj} + M_{mkk}\ddot{T}_{mk} = Q_{mk} \qquad (k = 1, 2, 3, 4). \qquad (11)$$

Поскольку матрица $[M]$ – диагональная, от второй суммы осталось только одно k-е слагаемое.

Собственные колебания. При собственных колебаниях предполагается, что внешняя нагрузка в (11) отсутствует ($Q_{mk}(x, t) = 0$). Решение полученной системы представляется в виде

$$T_{mk}(t) = A_{mk} \sin(\omega_m t + \alpha_{mk}), \qquad (12)$$

где A_{mk} – амплитуда; α_{mk}, ω_m – соответственно начальная фаза и частота колебаний.

Подстановка выражения (12) в однородную систему, соответствующую (11), приводит к обобщенной задаче на собственные значения. Получаемая система алгебраических уравнений – однородна относительно амплитуд A_{mk}. Нулевое решение в рассматриваемом случае означает отсутствие колебаний. Для нахождения нетривиального решения необходимо потребовать, чтобы ее определитель равнялся нулю. Это приводит к алгебраическому уравнению 4-го порядка относительно ω_k^2. Решив его, получим четыре вещественных неотрицательных корня. Таким образом, колебательный процесс для каждого значения параметра m оказывается четырехчастотным. Значит, вместо решения (12) следует принять

$$T_{mk}(t) = \sum_{i=1}^{4} A_{mki} \sin(\omega_{mi} t + \alpha_{mi}).$$

Численное исследование частот собственных колебаний проводилось для трехслойного стержня, набранного из материалов Д16Т–фторопласт–Д16Т, механические характеристики которых приведены в [6]. В таблице представлены значения всех четырех частот ω_{mi} для каждого параметра m при относительной толщине слоев $h_1 = 0{,}01$; $h_2 = 0{,}05$; $h_3 = 0{,}18$.

Частоты собственных колебаний

m	ω_{m1}	ω_{m2}	ω_{m3}	ω_{m4}
0	0	4516	0	16525
1	845	9166	14564	17605
2	2606	13455	20896	30471
3	5420	13786	29489	45402
4	8955	14082	38709	60418

Вынужденные колебания. Для дальнейших исследований запишем вспомогательные зависимости. Функции $T_{mk}(t)$ представляются в виде разложения по собственным формам:

$$T_{mk} = \sum_{i=1}^{4} \delta_{mki} \zeta_{mi} \qquad \left(\sum_{i=1}^{4} \delta_{mik}^2 = 1 \right), \tag{13}$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний.

Функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из системы уравнений

$$\ddot{\zeta}_{mi} + \omega_{mi}^2 \zeta_{mi} = \tilde{q}_{mi}(t), \tag{14}$$

где $\tilde{q}_{mi}$ – компоненты приведенной силовой нагрузки,

$$\tilde{q}_{mi} = \sum_{k=1}^{4} Q_{mk} \delta_{mki} \Bigg/ \sum_{k=1}^{4} M_{mkk} \delta_{mki}^2 .$$

Общее решение уравнения (14) будет иметь вид

$$\zeta_{\mu i}(t) = A_{mi} \cos(\omega_{mi} t) + B_{mi} \sin(\omega_{mi} t) + \frac{1}{\omega_{mi}} \int_0^t \sin(\omega_{mi}(t-\tau)) \tilde{q}_{mi}(\tau) d\tau. \tag{15}$$

После взятия интеграла в (15) искомые перемещения представляются в виде сумм произведений $\zeta_{mi}(t)$ на соответствующие коэффициенты δ_{mki} и исходные координатные функции, указанные в (8).

Прямоугольная локально распределенная нагрузка. Рассмотрим воздействие ударной нагрузки (на рис. 2 кривая *1*). Ее аналитический вид представим с помощью функции Хевисайда $H_0(x)$:

$$q(x,t)=q_0(t)H_0(a-x) \qquad (a\le 1), \qquad H_0(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0;\\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{16}$$

Подставив нагрузку (16) в последнюю из формул (8), получим параметры $q_m(t)$:

$$q_m=2\int_0^1 q_0(t)H_0(a-x)\sin(\pi mx)dx=\frac{2q_0(t)}{\pi m}(1-\cos(\pi ma)).$$

Далее функция $\zeta_{mi}(t)$ определяется из соотношения (15). Если интенсивность нагрузки $q_0=\mathrm{const}$, то функцию времени получим в явном виде:

$$\zeta_{mi}(t)=\frac{2q_0\delta_{m3i}(1-\cos(\omega_{mi}t))}{\pi m\omega_{mi}^2\sum\limits_{k=1}^{4}M_{mkk}\delta_{mki}^2}(1-\cos(\pi ma)),$$

где δ_{mki} – амплитуды нормированных собственных форм колебаний; M_{mkk} – элементы матрицы масс (10).

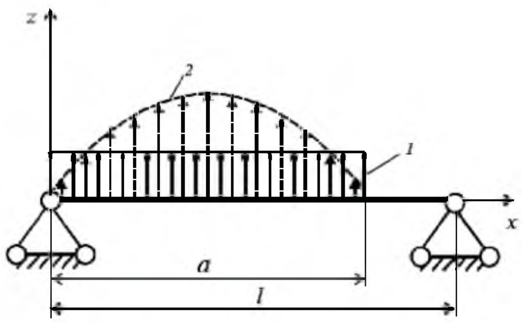

Рис. 2. Схема нагружения стержня.

Если указанная нагрузка действует мгновенно (импульсно), то ее можно записать с помощью δ-функции Дирака [4]:

$$q(x,t)=q_{\text{и}}\delta(t)H_0(a-x), \qquad q_{\text{и}}=\mathrm{const}. \tag{17}$$

Параметры разложения нагрузки (17) в ряд по базисным функциям следующие:

$$q_m=2\int_0^1 q_{\text{и}}\delta(t)H_0(a-x)\sin(\pi mx)dx=\frac{2q_{\text{и}}\delta(t)}{\pi m}(1-\cos(\pi ma)).$$

Искомая функция времени, соответствующая (17), будет

$$\zeta_{mi}(t)=\frac{2q_{\text{и}}\delta_{m3i}\sin(\omega_{mi}t)}{\pi m\omega_{mi}\sum\limits_{k=1}^{4}M_{mkk}\delta_{mki}^{2}}(1-\cos(\pi ma)).$$

В случае резонанса дифференциальное уравнение (14) для определения неизвестной функции $\zeta_{mi}(t)$ принимает вид

$$\ddot{\zeta}_{mi}(t)+\omega_{mi}^{2}\zeta_{mi}(t)=\widetilde{E}_m\sin(\omega_{nk}t),\qquad \widetilde{E}_m=E_m\delta_{m3i}\left(\sum_{k=1}^{4}M_{mkk}\delta_{mki}^{2}\right)^{-1}. \quad (18)$$

Общее решение при возникновении резонанса можно получить из (15) в виде

$$\begin{cases}\zeta_{mi}(t)=A_{mi}\cos(\omega_{mi}t)+B_{mi}\sin(\omega_{mi}t)+y_{mi}(t);\\ y_{mi}(t)=\begin{cases}\dfrac{\widetilde{E}_m}{(\omega_{mi}^{2}-\omega_{nk}^{2})}\sin(\omega_{nk}t), & m\neq n \quad \text{или} \quad i\neq k,\\ -\dfrac{\widetilde{E}_m}{2\omega_{mi}}t\cos(\omega_{mi}t), & m=n,\ \ i=k,\end{cases}\\ q_m=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l q\sin(\omega_{nk}t)\sin\frac{\pi mx}{l}\,dx=E_m\sin(\omega_{nk}t).\end{cases} \quad (19)$$

Константы интегрирования A_{mi}, B_{mi} в соответствии с принятыми нулевыми начальными условиями (7) и решением (19) таковы:

$$A_{mi}=0;\qquad B_{mi}=-\frac{1}{\omega_{mi}}\left[\begin{cases}\dfrac{\omega_{nk}\widetilde{E}_m}{(\omega_{mi}^{2}-\omega_{nk}^{2})}, & m\neq n \quad \text{или} \quad i\neq k,\\ -\dfrac{\widetilde{E}_m}{2\omega_{mi}}, & m=n,\ \ i=k\end{cases}\right]. \quad (20)$$

При действии резонансной прямоугольной гармонической нагрузки, равномерно распределенной внутри интервала $0\leq x\leq a\leq 1$, ее можно записать так:

$$q(x,t)=q_0H_0(a-x)\sin(\omega_{mk}t). \quad (21)$$

Подставляя (21) в формулу (19), получаем параметры

$$E_m=\frac{2q_0}{\pi m}(1-\cos(\pi ma)),\qquad m=1,2,3,\ldots. \quad (22)$$

Функция времени определяется выражением (13), где константы интегрирования A_{mi}, B_{mi} вычисляются по формулам (20) с учетом (22).

Если коэффициент $E_m = 0$, то имеем случай, называемый ложным резонансом: частота возмущающей силы совпадает с одной из собственных частот колебаний трехслойного стержня, однако нарастания амплитуды колебаний не происходит. Ложный резонанс имеет место, если

$$\cos(\pi m a) = 1 \qquad \text{или} \qquad a = \frac{2p}{m} \le 1, \qquad p = 1, 2, 3, \ldots . \tag{23}$$

Таким образом, если длина участка a, на который действует равномерно распределенная нагрузка (21), удовлетворяет условию (23), то резонансная составляющая решения (19) будет нулевой, так как соответствующий коэффициент $E_m = 0$. Нарастание амплитуды колебаний отсутствует.

Синусоидальная локально распределенная нагрузка. Ее можно представить в виде (на рис. 2 кривая *2*)

$$q(x, t) = q_0(t) H_0(a - x) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right). \tag{24}$$

Подставляя нагрузку (24) в последнюю из формул (8), получаем выражения для параметров $q_m(t)$:

$$q_m = 2\int_0^1 q_0(t) H_0(a - x) \sin\frac{\pi x}{a} \sin(\pi m x) dx =$$

$$= \frac{a q_0(t)}{\pi}\left[\frac{1}{am - 1}\sin[\pi(am - 1)] - \frac{1}{am + 1}\sin[\pi(am + 1)]\right], \qquad m \in N. \tag{25}$$

Здесь должно выполняться условие $am \ne 1$, чтобы не возникло деление на ноль. В сечениях стержня, где $a = 1/p$ (p – натуральное число), при $m \ne p$ справедлива формула (25), если $m = p$, то –

$$q_p(t) = \int_0^1 H_0(a - x)(\sin[\pi p x])^2 dx = a q_0(t). \tag{26}$$

Следовательно, в рассматриваемой задаче о вынужденных колебаниях трехслойного стержня под действием локальной синусоидальной нагрузки (24) функции $\zeta_{mi}(t)$ определяются из соотношений (15) с учетом (25), (26). Для динамической нагрузки с амплитудой $q_0 = \text{const}$ при $am \ne 1$ получим

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{q_0 \delta_{m3i} a (1 - \cos(\omega_{mi} t))}{\pi \omega_{mi}^2 \sum_{k=1}^{4} M_{mkk} \delta_{mki}^2} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{am-1} \sin[\pi(am-1)] - \frac{1}{am+1} \sin[\pi(am+1)] \right]. \tag{27}$$

В сечениях стержня, где $a = 1/p$, при $m \neq p$ необходимо использовать формулу (27), если $m = p$, то –

$$\zeta_{pi}(t) = \frac{q_0 \delta_{p3i} a(1 - \cos(\omega_{pi} t))}{\omega_{pi}^2 \sum_{k=1}^{4} M_{pkk} \delta_{pki}^2}.$$

На рис. 3 показано изменение прогиба w_1 центрального поперечного сечения и продольного перемещения u_1 концевого правого сечения в зависимости от длины пятна локальной распределенной нагрузки в момент времени $t = 0{,}0036$ с. При одинаковой амплитуде q_0 прогиб от синусоидальной нагрузки по сравнению с прямоугольной меньше на 26%, при синусоидальной нагрузке q_0', статически эквивалентной прямоугольной q_0, он больше на 23%. Примерно такая же картина наблюдается для продольных перемещений.

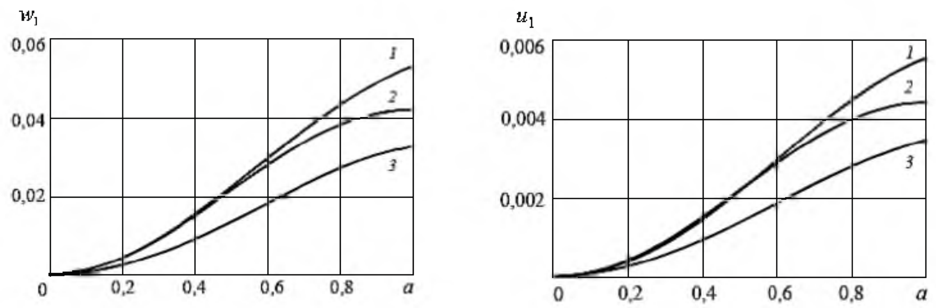

Рис. 3. Зависимость прогиба первого слоя (*а*) и продольного перемещения (*б*) в среднем сечении и на правом конце стержня соответственно от длины пятна синусоидальной нагрузки: *1*, *3* – синусоидальная нагрузка с амплитудами $q_0' = 0{,}5\pi q_0$ и $q_0 = 5{,}5 \cdot 10^6$ Па соответственно; *2* – прямоугольная нагрузка интенсивности q_0.

Если локальная синусоидальная нагрузка приложена импульсно внутри участка $0 \le x \le a$, то, добавляя в (6) δ-функцию Дирака $\delta(t)$, получаем ($q_и = \mathrm{const}$)

$$q(x, t) = q_и \delta(t) H_0(a - x) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right). \tag{28}$$

Параметры разложения нагрузки (28) в ряд по системе координатных функций при $am \neq 1$ ($m = 1, 2, 3, \ldots$) будут следующими:

$$q_m = \frac{a q_и \delta(t)}{\pi} \left[\frac{1}{am-1} \sin[\pi(am-1)] - \frac{1}{am+1} \sin[\pi(am+1)] \right]. \tag{29}$$

В сечениях стержня, где $a = 1/p$, при $m \neq p$ справедлива формула (29), если $m = p$, то –

$$q_p(t) = aq_{\text{и}}\delta(t). \qquad (30)$$

С использованием коэффициентов нагрузки (29), (30) функцию времени при $am \neq 1$ получаем в виде

$$\zeta_{mi}(t) = \frac{aq_{\text{и}}\delta_{m3i}\sin(\omega_{mi}t)}{\pi\omega_{mi}\sum\limits_{k=1}^{4} M_{mkk}\delta_{mki}^2}\left[\frac{1}{am-1}\sin[\pi(am-1)] - \frac{1}{am+1}\sin[\pi(am+1)]\right]. \qquad (31)$$

В сечениях стержня, где $a = 1/p$, при $m \neq p$ необходимо использовать формулу (31), если $m = p$, то –

$$\zeta_{pi}(t) = \frac{aq_{\text{и}}\delta_{p3i}\sin(\omega_{pi}t)}{\omega_{pi}\sum\limits_{k=1}^{4} M_{pkk}\delta_{pki}^2}.$$

На рис. 4 представлено изменение во времени прогиба w_1 и продольного перемещения u_1 в центре и на правом конце стержня соответственно при воздействии синусоидальных и прямоугольной импульсных нагрузок, распределенных на участке $0 \le x \le 1/2$. При одинаковой амплитуде нагрузок максимальный прогиб от синусоидального импульса меньше, чем от прямоугольного. Если импульсы статически эквивалентны, то величина прогиба, вызванного синусоидальным импульсом, больше. Примерно такая же картина наблюдается и для продольных перемещений.

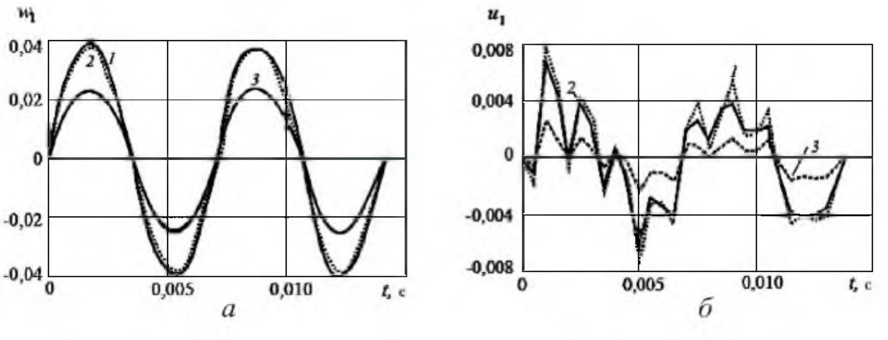

Рис. 4. Изменение во времени прогиба первого слоя (*а*) и продольного перемещения (*б*) в среднем сечении и на правом конце стержня при воздействии синусоидальных $q_{\text{и}} = 2 \cdot 10^4$ Па (*1*), $q'_{\text{и}} = 0{,}5\pi q_{\text{и}}$ (*2*) и прямоугольной $q_{\text{и}}$ (*3*) импульсных нагрузок.

В случае локального воздействия на поверхность стержня внутри участка $0 \le x \le a$ синусоидальной гармонической резонансной нагрузки ее можно записать в виде

$$q(x, t) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) H(a - x)\sin(\omega_{nk}t), \qquad (32)$$

где частота внешней возмущающей силы ω_{nk} совпадает с одной из собственных частот ω_{mi} колебаний стержня; q_0, n, k – заданные параметры нагрузки.

Коэффициенты разложения в ряд нагрузки (32) будут

$$q_m = E_m \sin(\omega_{nk} t), \qquad m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{33}$$

где

$$E_m = \frac{aq_0}{\pi}\left[\frac{1}{am-1}\sin[\pi(am-1)] - \frac{1}{am+1}\sin[\pi(am+1)]\right], \qquad am \neq 1.$$

Если длина нагруженного участка $a = 1/p$, то при $m \neq p$ справедлива формула (33), а при $m = p$ –

$$E_p = aq_0. \tag{34}$$

Возникновение ложного резонанса в этом случае не наблюдается, так как коэффициенты E_m в (33) и (34) в нуль не обращаются.

На рис. 5 показана зависимость прогиба $w_1(x = 1/2)$ и продольного перемещения $u_1(x = 1)$ трехслойного стержня от длины области действия локальной нагрузки в момент времени $t = 1$ с при резонансе по частоте $\omega_{11} = 845\ \text{с}^{-1}$. При одинаковой амплитуде q_0 максимальный прогиб от синусоидальной нагрузки на 22% меньше, чем от прямоугольной. Если синусоидальная нагрузка q_0' статически эквивалентна прямоугольной q_0, то прогиб от нее больше на 22%. Характер продольных перемещений аналогичен.

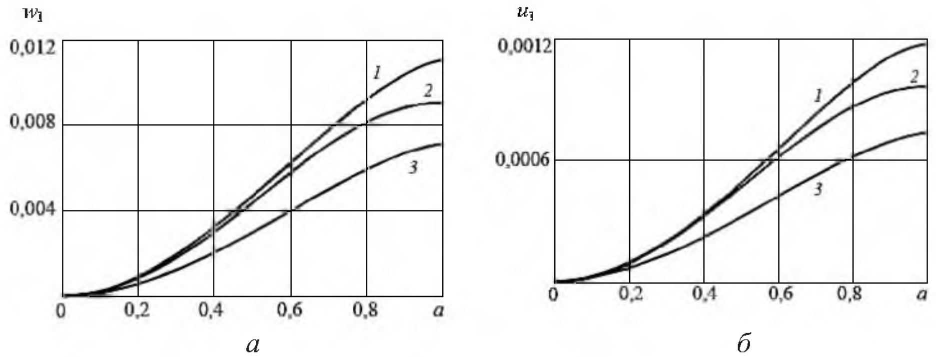

Рис. 5. Зависимость прогибов (*а*) и горизонтальных перемещений (*б*) первого слоя от размеров пятна синусоидальной (*1*, *3*) и прямоугольной (*2*) резонансных нагрузок: *1* – $q_0' = 1/2\pi q_0$; *2* – $q_0 = 6{,}4 \cdot 10^3$ Па; *3* – q_0.

Заключение. Предложенная математическая модель динамического деформирования трехслойного стержня позволяет описывать его поперечные колебания при действии ударных, импульсных и резонансных нагрузок. В каждом из рассмотренных видов воздействия наиболее опасной, вызывающей большие перемещения, среди статически эквивалентных является поверхностная нагрузка, более локализованная в середине пролета. При совпадении частоты гармонической нагрузки с некоторыми собственными частотами колебаний стержня наблюдается явление ложного резонанса.

Р е з ю м е

Розглянуто коливання тришарового стрижня, що знаходиться під дією локальних, імпульсних та резонансних навантажень різної форми: прямокутної і синусоїдної. Для опису кінематики несучих шарів прийнято гіпотези Бернуллі. У жорсткому стисливому заповнювачі справедливі співвідношення теорії пружності з лінійною апроксимацією залежності переміщень його точок від поперечної координати z. Отримано аналітичний розв'язок задач і проведено їх числовий та порівняльний аналізи. Досліджено можливість прояву хибного резонансу.

1. *Старовойтов Э. И., Яровая А. В., Леоненко Д. В.* Деформирование трехслойного упругого стержня локальными нагрузками // Пробл. машиностроения и автоматизации. – 2001. – № 4. – С. 37 – 40.
2. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Яровая А. В.* Колебания круглой линейно-вязкоупругой трехслойной пластинки // Пробл. прочности. – 2001. – № 3. – С. 100 – 107.
3. *Леоненко Д. В., Яровая А. В.* Колебания круговых трехслойных пластин под действием распределенных локальных нагрузок // Там же. – 2002. – № 5. – С. 70 – 79.
4. *Старовойтов Э. И., Леоненко Д. В., Яровая А. В.* Колебания круглых трехслойных пластин под действием поверхностных нагрузок различных форм // Там же. – 2003. – № 4. – С. 32 – 39.
5. *Старовойтов Э. И.* Вязкоупругопластические слоистые пластины и оболочки. – Гомель: Белорус. гос. ун-т, 2002. – 343 с.
6. *Горшков А. Г., Старовойтов Э. И., Тарлаковский Д. В.* Теория упругости и пластичности. – М.: Физматлит, 2002. – 416 с.

Поступила 27. 12. 2005