УДК 539.3

# Напряженно-деформированное состояние открытой сферической оболочки средней толщины

**Н. Д. Панкратова, В. Б. Польчук**

Институт прикладного системного анализа НАН Украины и Минобразования и науки Украины, Киев, Украина

*Исследуется напряженно-деформированное состояние сферической оболочки средней толщины с отверстием в окрестности полюса в геометрически нелинейной постановке с использованием классической модели Кирхгоффа–Лява и уточненной модели типа Тимошенко, учитывающей деформации поперечного сдвига. Исследование основано на построении ортогональной криволинейной системы координат на срединной поверхности, представляющей собой двусвязную область, а также на сведении исходной нелинейной краевой задачи к последовательности линейных двухмерных и последних к одномерным, интегрирование которых проводится устойчивым численным методом. На примере открытой сферической оболочки средней толщины исследуется влияние деформации поперечного свига на ее напряженно-деформированное состояние под действием равномерной и неравномерной нагрузок. Показано, что применение модели типа Тимошенко по сравнению с классической моделью приводит к существенному уточнению перемещений вблизи отверстия.*

***Ключевые слова***: оболочка, отверстие, ортогональная криволинейная система координат, деформации поперечного сдвига.

**Введение**. Пластины и оболочки, ослабленные отверстием, широко используются в различных отраслях современной техники. При этом на границах и вблизи отверстий возникают требующие учета концентрации напряжений.

Расчет напряженно-деформированного состояния (НДС) пластин и оболочек с отверстием, срединная поверхность которых является двусвязной областью, связан с интегрированием внутри этой области системы дифференциальных уравнений в частных производных при определенных граничных условиях на ограничивающих контурах. При этом вид разрешающей системы дифференциальных уравнений и сложность решения соответствующей краевой задачи существенно зависят от системы координат, которая вводится для параметризации рассматриваемой двусвязной области.

Данной проблеме посвящены многочисленные исследования [1–5] и др. Наиболее простой вид имеют уравнения, когда многосвязная область отнесена к такой ортогональной криволинейной системе координат, где обе ограничивающие область контурные линии совпадают с координатными линиями системы [6].

Настоящая работа посвящена исследованию НДС сферической оболочки с отверстием различной формы в окрестности полюса в геометрически нелинейной постановке с использованием классической модели Кирхгоффа–Лява (КМ) и уточненной модели типа Тимошенко (МТТ), учитывающей деформации поперечного сдвига. На основании предложенного приема построения ортогональной криволинейной системы координат в двусвязной области сложной формы, ограниченной гладкими контурными линиями без угловых точек, решается задача численной параметризации двусвязной пространственной области путем построения в ней ортогональной криволинейной сетки, топологически эквивалентной прямоугольнику [7].

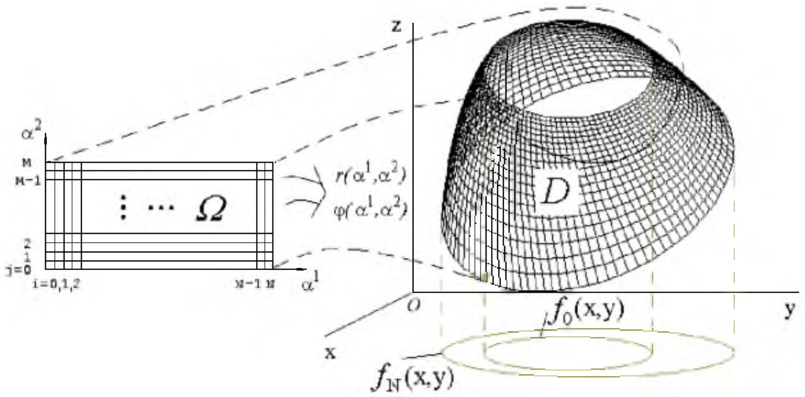


Рис. 1. Численная параметризация сферической оболочки.

Рассмотрим задачу численной параметризации пространственной двусвязной области. Пусть срединная поверхность оболочки $D$ (рис. 1) задана в декартовой системе координат $Oxyz$. Полагаем, что для любой точки поверхности $P(x,y,z)$ известны зависимости

$$x = x(r,\varphi); \qquad y = y(r,\varphi); \qquad z = z(r,\varphi), \tag{1}$$

где $x$, $y$, $z$ – декартовы координаты точки $P$; $\rho$, $\varphi$ – полярная система координат, причем $0 \le \varphi \le 2\pi$, и выполняются условия

$$x(r,0) = x(r,2\pi); \qquad y(r,0) = y(r,2\pi); \qquad z(r,0) = z(r,2\pi). \tag{2}$$

Область поверхности $D$ ограничена двумя гладкими контурными линиями без угловых точек

$$F_0(x,y,z) = 0; \qquad F_N(x,y,z) = 0. \tag{3}$$

Задача численной параметризации заключается в отыскании функций $r(\alpha^1,\alpha^2)$; $\varphi(\alpha^1,\alpha^2)$, которые обеспечивают отображение на $D$ параметрического прямоугольника $\Omega = \{(r,\varphi): 0 \le r \le 1;\ 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ при выполнении следующих условий:

а) внутри области $D$ два семейства линий $\alpha^i = \mathrm{const}$ $(i = 1, 2)$ являются линиями уровня функций $\alpha^1 = \alpha^1(r,\varphi)$, $\alpha^2 = \alpha^2(r,\varphi)$, удовлетворяющих на поверхности уравнениям Лапласа, которые с учетом ортогональности координатной системы $(r,\varphi)$ записываются в виде

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi\frac{\partial \alpha^1}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\Psi\frac{\partial \alpha^1}{\partial \varphi}\right) = 0; \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi\frac{\partial \alpha^2}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\Psi\frac{\partial \alpha^2}{\partial \varphi}\right) = 0, \tag{4}$$

где

$$\Phi(r,\varphi)=\sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}};\qquad \Psi(r,\varphi)=\sqrt{\frac{a_{11}}{a_{22}}};$$

$$a_{11}=\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2;\qquad a_{22}=\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2;$$

б) на границах области $\alpha^1=0$, $\alpha^1=1$ должны выполняться условия (3), записанные через $r$, $\varphi$;

в) для границ $\alpha^2=0$, $\alpha^2=2\pi$ из (2) следует

$$\varphi(\alpha^1,0)=0;\qquad \varphi(\alpha^1,2\pi)=2\pi; \tag{5}$$

г) везде на поверхности $D$, включая границы, должно выполняться условие ортогональности системы координат $(\alpha^1,\alpha^2)$:

$$\Psi\frac{\partial r}{\partial\alpha^1}\frac{\partial r}{\partial\alpha^2}+\Phi\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}=0. \tag{6}$$

Выполнив обращение уравнений (4) с учетом условия (6), получим

$$A\frac{\partial^2 r}{\partial(\alpha^1)^2}+B\frac{\partial^2 r}{\partial(\alpha^2)^2}=J^2\frac{\partial\Phi}{\partial r};\qquad A\frac{\partial^2\varphi}{\partial(\alpha^1)^2}+B\frac{\partial^2\varphi}{\partial(\alpha^2)^2}=J^2\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}, \tag{7}$$

где

$$J=\frac{\partial r}{\partial\alpha^1}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}-\frac{\partial r}{\partial\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1};$$

$$A=\Psi\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha^2}\right)^2+\Phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^2}\right)^2;\qquad B=\Psi\left(\frac{\partial r}{\partial\alpha^1}\right)^2+\Phi\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha^1}\right)^2.$$

Таким образом, для определения $r(\alpha^1,\alpha^2)$; $\varphi(\alpha^1,\alpha^2)$ внутри области $D$ располагаем системой двух уравнений (7), а на каждой из границ – уравнением (6) и соответствующим уравнением из (3).

Для решения задачи (3), (6), (7) используется итерационный метод, который детально изложен в [8].

**Математическая постановка задачи расчета напряженно-деформированного состояния оболочки**. Задачу о деформации гибких оболочек, в общем случае с одной плоскостью упругой симметрии, будем рассматривать в геометрически нелинейной постановке. При этом выражения для деформаций и перемещений имеют следующий вид:

$$
\begin{cases}
\varepsilon_1 = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha^1} + \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial \alpha^2} v + k_1 w + \dfrac{1}{2}\psi_1^2; \\
\varepsilon_2 = \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial v}{\partial \alpha^2} + \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial B}{\partial \alpha^1} u + k_2 w + \dfrac{1}{2}\psi_2^2; \\
\varepsilon_{12} = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial v}{\partial \alpha^1} - \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial \alpha^2} u + \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha^2} - \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial B}{\partial \alpha^1} v + \psi_1\psi_2; \\
\kappa_1 = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \alpha^1} + \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial \alpha^2}\psi_2 - \dfrac{1}{2}k_1\psi_2^2; \\
\kappa_2 = \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \alpha^2} + \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial B}{\partial \alpha^1}\psi_1 - \dfrac{1}{2}k_2\psi_1^2; \\
2\kappa_{12} = \dfrac{1}{A}\dfrac{\partial \psi_2}{\partial \alpha^1} + \dfrac{1}{B}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial \alpha^2} - \dfrac{1}{AB}\left(\dfrac{\partial A}{\partial \alpha^2}\psi_1 + \dfrac{\partial B}{\partial \alpha^1}\psi_2\right) + \\
\quad + k_1\left(\dfrac{1}{B}\dfrac{\partial u}{\partial \alpha^2} - \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial B}{\partial \alpha^1} v\right) + k_2\left(\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial v}{\partial \alpha^1} - \dfrac{1}{AB}\dfrac{\partial A}{\partial \alpha^2} u\right); \\
\vartheta_1 = -\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial w}{\partial \alpha^1} + k_1 u; \quad \vartheta_2 = -\dfrac{1}{A}\dfrac{\partial w}{\partial \alpha^2} + k_2 v,
\end{cases} \tag{8}
$$

где $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_{12}$ – компоненты тангенциальной деформации; $\kappa_1$, $\kappa_2$, $\kappa_{12}$ – компоненты изгибной деформации и скручивание; $A$, $B$ – параметры Ламе; $k_1$, $k_2$ – главные кривизны координатной системы.

Для классической модели выполняются равенства $\vartheta_1 = \psi_1$, $\vartheta_2 = \psi_2$, для уточненной модели – $\gamma_1 = \psi_1 - \vartheta_1$; $\gamma_2 = \psi_2 - \vartheta_2$, где $\gamma_1$, $\gamma_2$ – углы поворота, вызванные поперечными сдвигами [9].

Уравнения равновесия для усилий и моментов приведены в [6]. Соотношения упругости для уточненной модели дополняются выражениями для перерезывающих усилий:

$$
Q_1 = k' G_{13} h \gamma_1; \qquad Q_2 = k'' G_{23} h \gamma_2, \tag{9}
$$

где $G_{13}$, $G_{23}$ – модули сдвига; $k'$, $k''$ – коэффициенты сдвига, принимаемые равными [6].

Итак, системы дифференциальных уравнений, описывающие в произвольной ортогональной криволинейной системе координат $(\alpha^1, \alpha^2)$ двухмерную геометрически нелинейную деформацию тонких оболочек, сводятся к разрешающим системам, состоящим из восьми дифференциальных уравнений в частных производных для классической модели и десяти дифференциальных уравнений в частных производных для уточненной модели. Разрешающие системы уравнений имеют вид [6]

$$
\frac{\partial \bar{Z}}{\partial \alpha^1} = \bar{G}\left(\alpha^1, \alpha^2, \bar{Z}, \frac{\partial \bar{Z}}{\partial \alpha^2}\right), \tag{10}
$$

где $\overline{Z}=\{N_1, N_{12}, Q_1, M_1, u, v, w, \psi_1\}$ (для варианта классической модели), $\overline{Z}=\{N_1, N_{12}, Q_1, M_1, M_{12}, u, v, w, \psi_1, \psi_2\}$ (для варианта уточненной модели) – векторы разрешающих функций; $\overline{G}$ – вектор правой части системы уравнений, который является нелинейной вектор-функцией от $\overline{Z}$.

Для перехода от полученной двухмерной краевой задачи к одномерной искомые функции и правые части системы дифференциальных уравнений в частных производных (10) записываются в виде отрезков тригонометрических рядов:

$$X(\alpha^1, \alpha^2)=X_0(\alpha^1)+\sum_{n=1}^{NH}(X'_n(\alpha^1)\cos n\alpha^2+X''_n(\alpha^1)\sin n\alpha^2). \qquad (11)$$

Представление разрешающих функций в виде рядов Фурье позволяет разделить переменные в исходной системе (10), и двухмерная система уравнений приводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) относительно амплитудных значений разрешающих функций.

Таким образом, решение задачи сводится с помощью метода линеаризации Ньютона–Канторовича к итерационному процессу, на каждом шаге которого решается краевая задача для системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка. При этом первая итерация представляет решение задачи в линейной постановке.

Краевая задача для системы линейных ОДУ большого порядка приводится к семейству задач Коши, которые решаются устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [10]. Для вычисления коэффициентов Фурье таблично заданных разрешающих функций используется интерполяция их кубическими сплайнами.

**Задача об определении напряженно-деформированного состояния**. На основании предложенного подхода рассматривается задача об определении НДС конструктивного элемента современной техники в виде открытой изотропной сферической оболочки постоянной толщины $h$, ослабленной круглым отверстием. Коэффициент Пуассона $\nu$ составлял 0,3. Конструктивный оболочечный элемент отсекается плоскостями $n_1$ и $n_2$, расположенными на расстояниях $a=0{,}3R$ и $b=0{,}95R$ от центра сферы радиуса $R$ (рис. 2). Внешний контур оболочки жестко закреплен. Исследуется напряженное состояние оболочки, находящейся как под воздействием равномерного внутреннего давления $q=q_0$, так и внешнего неравномерного, направленного вдоль оси $Y$ (рис. 3) и изменяющегося на участке $j\in(m/2;\, 3m/2)$ по закону $q=0{,}5q_0(1+\cos(2\pi j/m))$ – рис. 4.

По заданной исходной информации о геометрии оболочки выполнена численная параметризация и построены сетки размерности $n=20$ $(i=\overline{0,19})$ окружных линий и $m=40$ $(j=\overline{0,39})$ меридиональных линий. Меридиональные линии сеток $j=0$ и 20 лежат в плоскости симметрии оболочек $YZ$ декартовой системы координат $OXYZ$ (рис. 2, 3), а окружные линии $i=\overline{0,19}$ отсчитываются от отверстия. Ось $Z$ проходит через центр отверстия и ее направление совпадает с направлением отрезка $b$ (рис. 3).

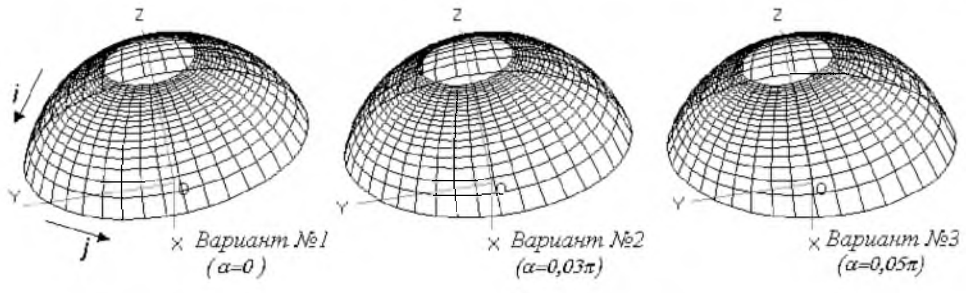


Рис. 2. Реализация численной параметризации.

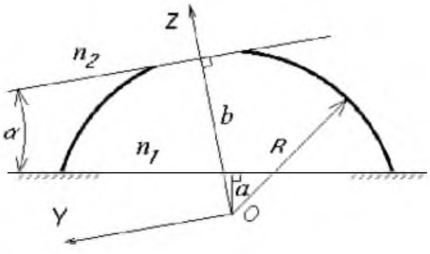


Рис. 3. Геометрия оболочки.

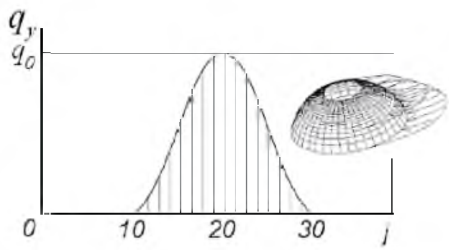


Рис. 4. Распределение неравномерной нагрузки.

Ниже приведены некоторые результаты расчета НДС сферической оболочки, полученные с помощью классической модели и модели типа Тимошенко, позволяющей учитывать деформации поперечного сдвига.

Проведено исследование нормальных перемещений $w$ для оболочки, находящейся под действием равномерного внутреннего давления $q_0$, направленного перпендикулярно к срединной поверхности, в зависимости от ее толщины.

Распределения перемещений $w$ вдоль меридиональной линии при $h/R = 1/10$ и $1/5$ приведены на рис. 5. Результаты максимального отличия между значениями перемещений $w$, рассчитанными по классической и уточненной моделям, для соотношений $h/R = 1/40$; $1/20$; $1/10$; $1/5$ соответственно (в процентах) составляет 4,3; 8,3; 20,7; 31,3. Как и следовало ожидать, с ростом отношения $h/R$ увеличивается максимальное различие между значениями $w$, рассчитанными по двум рассматриваемым моделям. При этом с увеличением толщины оболочки значения перемещений $w$, полученные по КМ, максимально превышают таковые, полученные с помощью МТТ, в окрестности отверстия.

Изменение перемещений $w$ вдоль контура отверстия ($i = 0$) и окружной линии ($i = 17$) в зависимости от величины отношения $h/R$ приведено на рис. 6.

Учитывая, что результаты исследования НДС, полученные по КМ и МТТ, существенно отличаются при $h/R \geq 1/10$, далее будем использовать соотношение $h/R = 1/10$.

Распределение нормальных $w$ и меридиональных $u$ перемещений, а также перерезывающих усилий $Q_1$ и углов наклона нормальных элементов $\vartheta_1$ при внешнем неравномерном воздействии (рис. 4) иллюстрируют рис. 7–11. Распределение перемещений $w$ вдоль контура отверстия и окружной линии для рассмотренных вариантов месторасположения отверстия, соответствующих величине угла между плоскостями $n_1$ и $n_2$ ($\alpha = 0$; $\alpha = 0{,}03\pi$; $\alpha = 0{,}05\pi$), показано на рис. 7.

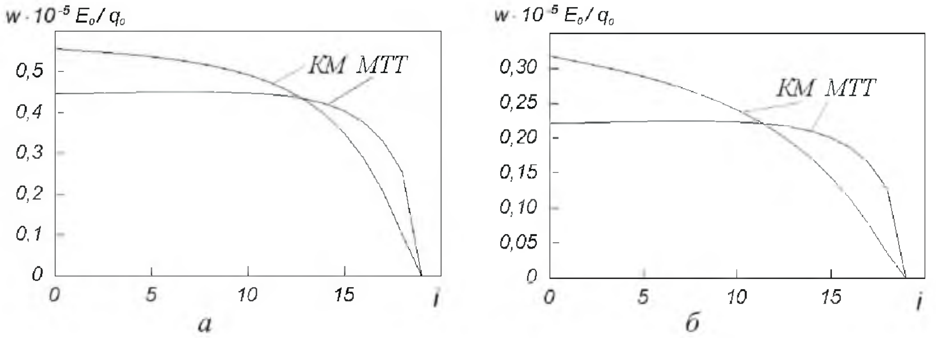


Рис. 5. Распределение перемещений $w$ по меридиональной координате для оболочки толщиной $h/R = 1/10$ (*а*) и $1/5$ (*б*).

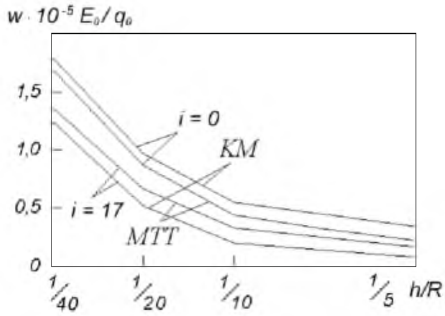


Рис. 6. Изменение перемещений $w$ вдоль окружных линий в зависимости от толщины оболочки.

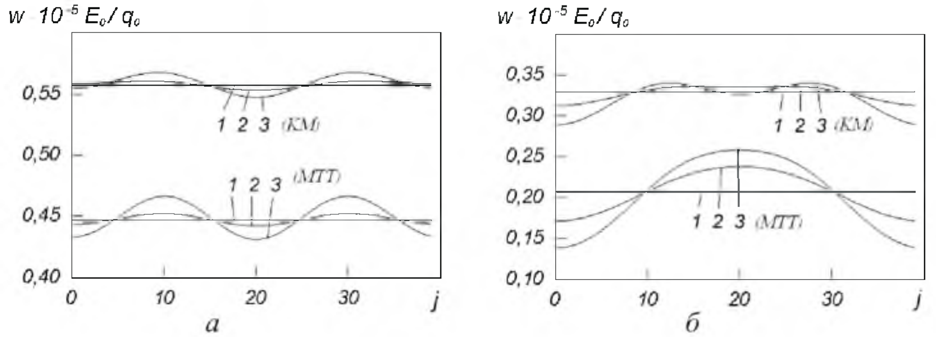


Рис. 7. Распределение перемещений $w$ вдоль контура отверстия $i = 0$ (*а*) и окружной линии $i = 17$ (*б*). (Здесь и на рис. 8, 9: *1*, *2*, *3* соответствуют варианту месторасположения отверстия на рис. 2.)

Из рис. 8 видно, что значения перерезывающих усилий $Q_1$ и углов наклона нормальных элементов $\vartheta_1$ в окрестности внешнего контура оболочки имеют ненулевые значения, максимума они достигают на внешнем контуре.

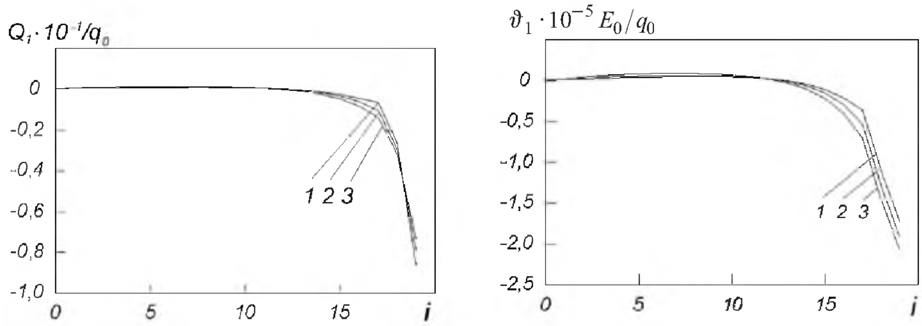


Рис. 8. Распределение перерезывающих усилий $Q_1$ и углов наклона нормальных элементов $\vartheta_1$ для МТТ.

Распределение перемещений $w$ и $u$ вдоль окружной линии $i$ для значения $j = 20$, соответствующего месту максимального действия нагрузки, для жесткого закрепления внешнего контура (сплошные линии) и его шарнирного опирания (штриховые линии) приведено на рис. 9. Как видно из рис. 7–9, значения перемещений $w$, полученные по указанным для расчета моделям, различаются. Использование КМ свидетельствует, что максимальные значения перемещений $w$ отмечаются вблизи окружной линии ($i = 15$), в то время как с помощью уточненной модели можно получить качественно другую картину: перемещения $w$ достигают максимума вблизи отверстия ($i = 0$). Распределение меридиональных перемещений $u$, рассчитанных по КМ и МТТ, имеет аналогичный характер, однако использование МТТ позволяет получить значения перемещений, которые больше примерно на 40%.

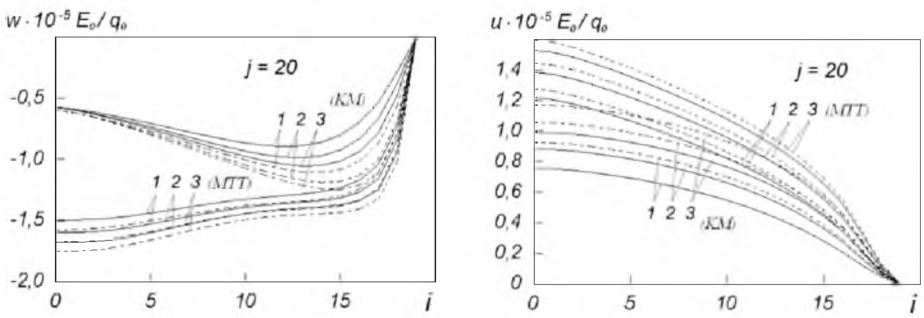


Рис. 9. Распределение перемещений $w$ и $u$ вдоль окружной линии $i$.

Графики распределения изолиний перемещений $w$ по всей срединной поверхности оболочки для варианта № 3 месторасположения отверстия приведены на рис. 10. Видно, что в зоне $j = 20$ приложения максимальной нагрузки распределения перемещений $w$, рассчитанные по моделям КМ и МТТ, имеют разную форму, при этом изолинии, рассчитанные с использованием МТТ, представляют вытянутую область, захватывающую часть контура отверстия. Распределение изолиний перемещений в окрестностях $j = 10$ и 30 по моделям КМ и МТТ близко по форме, но расчет по МТТ дает приблизительно в два раза большие значения перемещений $w$. Кроме того, использование МТТ позволяет обнаружить наличие перемещений с противоположной от приложения нагрузки стороны.

Графики распределения изолиний перемещений $u$ по всей срединной поверхности оболочки для варианта № 3 месторасположения отверстия приведены на рис. 11. Характер распределения меридиональных перемещений $u$ аналогичен, но расчет по МТТ также дает большие по абсолютной величине значения, например на меридиональной линии $j = 20$ вблизи контура отверстия они на 34% превышают таковые, полученные по КМ.

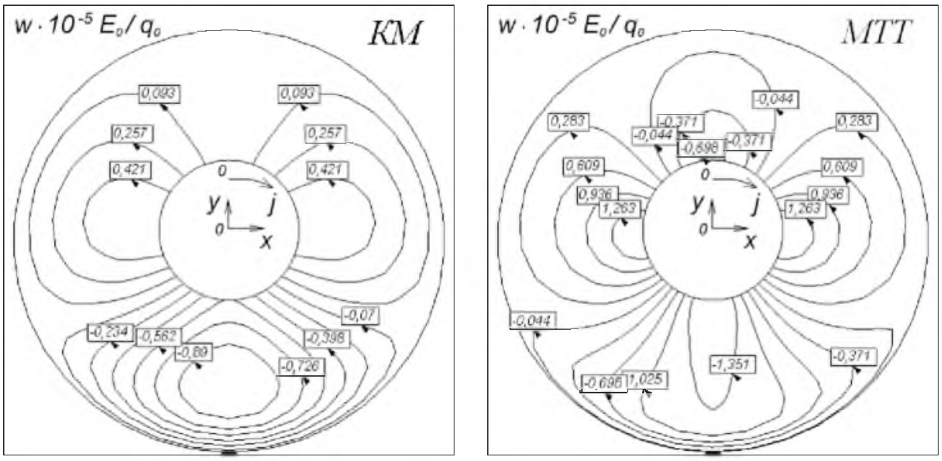


Рис. 10. Представление изолиний нормальных перемещений $w$.

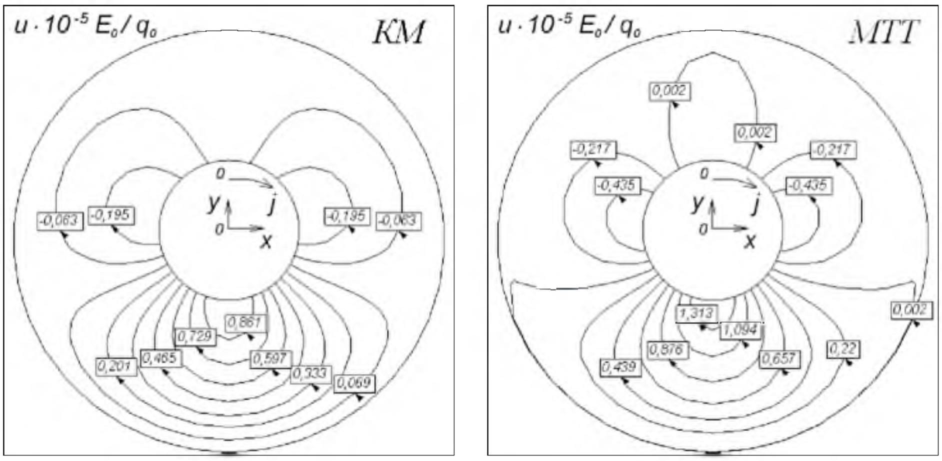


Рис. 11. Представление изолиний меридиональных перемещений $u$.

**Заключение**. Представленные результаты показывают, что для оболочек $(h/R \geq 1/10)$, находящихся под действием неравномерных нагрузок, при расчете НДС необходимо учитывать деформации поперечных сдвигов, что приводит к существенному уточнению перемещений вблизи отверстия сферической оболочки. Предлагаемый подход позволяет выбирать подходящие физико-механические параметры и в соответствии с этим создавать рациональные конструктивные оболочечные элементы с вырезами различной формы с целью уменьшения их веса и сохранения прочностных характеристик.

**Р е з ю м е**

Досліджується напружено-деформований стан сферичної оболонки середньої товщини з отвором в околі полюса в геометрично нелінійній постановці з використанням класичної моделі Кірхгоффа–Лява і уточненої моделі типу Тимошенко, яка враховує деформації поперечного зсуву. Дослідження базується на побудові ортогональної криволінійної системи координат на серединній поверхні, яка є двозв'язною областю, а також на зведенні вихідної нелінійної крайової задачі до послідовності лінійних двовимірних і останніх до одновимірних, інтегрування яких проводиться стійким чисельним методом. На прикладі відкритої сферичної оболонки середньої товщини досліджується вплив деформації поперечного зсуву на її напружено-деформований стан під дією рівномірного та нерівномірного навантаження. Показано, що застосування моделі типу Тимошенко порівняно з класичною моделлю приводить до суттєвого уточнення переміщень поблизу отвору.

1. *Григоренко Я. М., Тимонин А. М.* Численное решение задач о деформации гибких анизотропных пластин сложной геометрии // Докл. АН УССР. – 1990. – № 6. – С. 43 – 47.
2. *Довбня Е. Н.* Исследование напряженно-деформированного состояния ортотропной оболочки с эллиптическим отверстием // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – № 32. – С. 140 – 144.
3. *Колоеров С. А., Горянская Е. С.* Двухмерное напряженно-деформированное состояние многосвязного анизотропного тела // Механика композитов. Т. 7. Концентрация напряжений. – Киев: А.С.К., 1998. – С. 10 – 26.
4. *Chern S. M. and Tutle M. E.* On displacement fields in orthotropic laminates containing an elliptical hole // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 2000. – **67**, No. 3. – P. 527 – 540.
5. *Gudushouri I., Kipiani G., and Danelia D.* Algorithm of solving for the concrete problem of calculating the rectangular plate with the hole of the same form // Пробл. прикл. механики. – 2000. – № 1. – С. 60 – 68.
6. *Григоренко Я. М., Василенко А. Т.* Методы расчета оболочек. – Киев: Наук. думка, 1981. – 544 с.
7. *Панкратова Н. Д., Польчук В. Б.* К численному решению задач о деформации анизотропных пластин с отверстием // Пробл. прочности. – 2003. – № 5. – С. 122 – 135.

8. *Григоренко Я. М.*, *Крюков Н. Н.* Численное решение задач статики гибких слоистых оболочек с переменными параметрами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 264 с.
9. *Шаповалов Л. А.* Об одном простейшем варианте уравнений геометрически нелинейной теории тонких оболочек // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. – 1968. – № 1. – С. 56 – 62.
10. *Григоренко Я. М.*, *Панкратова Н. Д.* Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Киев: Либідь, 1995. – 280 с.

Поступила 26. 12. 2005