

Классификация моделей материалов в механике континуума*

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Развита разработанная ранее автором на основе общей теории определяющих соотношений Нолла с использованием методов рациональной механики континуума классификация моделей материалов в механике сплошной среды.

Ключевые слова: механика континуума, теория простых по Ноллу материалов, определяющие соотношения, классификация моделей материалов.

В развитии научного знания классификации играют большую роль [1]. Наиболее значимыми являются те, которые построены дедуктивным методом, естественны (в качестве основных берутся существенные признаки, из которых вытекает максимум производных, так что классификация может служить источником знания классифицируемых объектов) и имеют вид “перевернутого дерева” [1].

В работе [2] отмечалось: “В науке по ее существу всегда приходится иметь дело с моделями. Вне их конкретных классов бессмысленно говорить об основных понятиях теории и закономерностях природы”. Согласно [3]: “Механика не изучает природные объекты непосредственно. Вместо них она рассматривает тела – математические понятия, полученные абстрагированием некоторых общих черт многих природных объектов”. Таким образом, в механике сплошной среды можно классифицировать не наблюдаемые в природе материалы, а только их модели (определяющие соотношения, физические уравнения).

Разработка классификации моделей материалов неразрывно связана с методами их построения. В данной работе ограничимся чисто механическими моделями материалов и их классификацией.

В настоящее время известны два основных подхода к построению определяющих соотношений в механике континуума: феноменологический и аксиоматический. Такое разделение в некоторой степени условно. Аксиоматический подход, как и феноменологический, основан на обобщении экспериментальных результатов, но при этом характеризуется большим уровнем обобщения.

При построении определяющих соотношений в рамках феноменологического подхода преимущественно используется метод индукции. С применением этого подхода разработано большинство определяющих соотношений. Рассмотрены твердые деформируемые тела, жидкости и жидкие кристаллы. Для твердых деформируемых тел построены модели упругих, вязкоупругих, упругопластических, упруговязкопластических и вязкоупруговязкопластических материалов.

* По материалам доклада на международной научно-технической конференции “Динамика, прочность и ресурс машин и конструкций” (1–4 ноября 2005 г., Киев, Украина).

Наибольшего развития в феноменологии получили модели изотропных материалов с относительно простым механическим поведением при малых деформациях. Для материалов со сложной реакцией на деформирование (в первую очередь упругопластические и вязкоупруговязкопластические), особенно для произвольных деформаций и видов симметрии свойств, отсутствуют единообразные методики построения определяющих соотношений. Существующие многочисленные методы построения физических уравнений упругопластических и вязкоупруговязкопластических материалов основываются на большом количестве различных частных гипотез, справедливых для ограниченного класса встречающихся в природе материалов и процессов их деформирования. Причем эти гипотезы в целом ряде случаев не только не согласованы, но и противоречат друг другу. Все это не позволяет построить естественную классификацию в виде “перевернутого дерева”, основанную на дедуктивной специализации общего для механики континуума (или отдельных классов сплошных сред) определяющего соотношения.

Подходы к построению и классификации феноменологических моделей упругопластического и вязкоупруговязкопластического поведения материалов рассмотрены в работе [4]. Анализ данных [4] показал, что до настоящего времени не удалось построить единую, охватывающую всю совокупность феноменологических моделей, классификацию рассматриваемых тел [4]. Это обусловлено отсутствием строгого выделения в феноменологии моделей упругопластических и вязкоупруговязкопластических материалов; использованием в качестве критериев классификации частных свойств, не связанных с реакцией материала на деформирование; большим многообразием способов построения моделей; применением не во всех теориях неупругих тел понятий, в частности, поверхности нагружения и т.п. Это приводит к отсутствию общей и большому числу частных классификаций, отнесению отличающихся между собой моделей в разных видах классификаций к одному классу теорий, отсутствию возможности предсказания на основе имеющихся классификаций новых видов реакций материалов на деформирование и др.

Известны ограниченная точность экспериментальных методов, высокая трудоемкость, а в ряде случаев и невозможность или экономическая нецелесообразность реализации сложных опытов, а также отсутствие экспериментальных методик изучения поведения упругопластических и вязкоупруговязкопластических материалов с любым типом симметрии свойств для произвольных деформаций. В этой связи проблемы построения физических уравнений и классификации моделей в виде “перевернутого дерева” для таких материалов в настоящее время в феноменологии представляются практически непреодолимыми.

Аксиоматический подход получил существенное развитие в предложенной в рамках рациональной механики континуума общей теории определяющих соотношений, устанавливающей те непреложные ограничения, которым должны подчиняться последние, чтобы быть пригодными для математического описания наблюдаемого в природе поведения материалов. Наиболее

простой и развитой является общая теория определяющих соотношений, основанная на предложенных в 1958 г. Ноллом физически обоснованных аксиомах (принципах): детерминизма; локального действия и независимости от системы отсчета [5]. В рамках подчиняющихся этим аксиомам материалов выделен частный случай “простых материалов”, “который все же является настолько общим, что охватывает все старые теории сплошной среды и большинство более новых ...” [3].

Для простых материалов справедлив принцип образца [3]. В экспериментальной механике основное внимание уделяется изучению однородных процессов деформирования, более сложные случаи объясняются с их помощью. Это соответствует предположению, что всякий исследуемый в лаборатории материал может быть достаточно хорошо смоделирован некоторым простым материалом в смысле математической теории. Учитывая, что методики и результаты экспериментального исследования неоднородно деформированных образцов практически отсутствуют, следует отметить предельную сложность физически обоснованной теории – модели простого материала.

В работах [3, 5] и др. в рамках теории простых материалов строго выделены твердые деформируемые тела, жидкости и жидкие кристаллы. Для твердых деформируемых тел построена иерархия моделей упругих и вязкоупругих материалов посредством наложения ограничений на свойства материалов и процессы их деформирования.

Основываясь на результатах [6–11], построены общие определяющие соотношения простых упрочняющихся упругопластических материалов [12], моделирующие деформирование без учета эффекта забывания. Определяющими характеристиками таких материалов являются: 1) напряжения в материале зависят от пути в тензорном пространстве деформаций и нечувствительны к изменению временной истории деформирования; 2) деформацию тем или иным способом можно разделить на упругую и пластическую составляющие; 3) справедлив некоторый критерий текучести; 4) выполняется какой-либо закон течения.

В [12] приведена специализация общего определяющего соотношения для частного случая материала – произвольного изотропного упрочняющегося упругопластического материала с не зависящими от истории пластического деформирования упругими свойствами и поверхностью нагружения Мизеса посредством наложения ограничений на процесс деформирования. Там же построены физические уравнения для процессов с малым упругим сдвигом, малым упругим сдвиговым деформированием, малым упругим растяжением, малым упругим растяжением и сдвигом и нулевым упругим сдвигом. Выделен класс идеально пластических материалов посредством наложения ограничений на свойства материалов. Наложение ограничений на процесс деформирования позволило построить для общего случая материалов [12] определяющие соотношения деформационной теории пластичности (деформационного типа) в случае активных пропорциональных [13, 14] и монотонных [15] процессов деформирования, а также пропорциональных процессов нагружения [16, 17]. Уравнения деформационного типа построены также для материалов с не зависящим от пути поведением [18]. В

работах [19, 20] показано, в каких случаях для материала [12] возможно построение уравнений деформационной теории пластичности.

Экспериментальное изучение механических свойств материалов с упругопластическим поведением показало, что в процессе активного деформирования имеет место не зависящее от времени уменьшение влияния (забывание) формы предшествующей траектории (процесса, истории) на реакцию материала. Сведения об экспериментальных исследованиях подобного эффекта приведены в [4, 21–23].

Известны феноменологические теории пластичности, моделирующие подобное забывание (затухающую память формы траектории). К ним относятся теория упругопластических процессов Ильюшина с учетом так называемого следа запаздывания, эндохронная теория пластичности, теории течения и др. Эндохронная теория [4, 24–26] и теории течения функционального типа (теории течения с коэффициентами, зависящими от предыстории деформирования) [4, 27] учитывают явление забывания в течение всего процесса деформирования, теория упругопластических процессов Ильюшина [4, 28] – некоторый конечный интервал процесса деформирования, теории течения дифференциального типа [4, 27] – подобное свойство материала на произвольно малом интервале прошлого. Классические варианты отмеченных выше теорий справедливы для бесконечно малых деформаций. Известны также обобщения некоторых указанных моделей на конечные деформации [4, 29–32] и анизотропные материалы [4, 33].

В работе [34] к основным определяющим характеристикам простого упругопластического материала [12] добавлена еще одна: на активном участке деформирования упругопластические материалы обладают затухающей памятью формы траектории. Приведена математическая формулировка такого поведения материала. Развита концепция к специализации общего определяющего соотношения простого упрочняющего упругопластического материала с затухающей памятью формы траектории, что позволило построить детальную иерархию физических уравнений по уровню сложности реакции материала на деформирование посредством наложения ограничений на свойства материалов и процессы их деформирования.

Общая математическая модель и методы ее специализации для простого вязкоупруговязкопластического материала, по-видимому, впервые разработаны в [34–36]. Такие материалы являются вязкоупругими внутри поверхности нагружения и вязкоупруговязкопластическими вне ее, т.е. обладают затухающей памятью по времени в течение всего процесса деформирования и забыванием формы траектории только на активном участке последней. Упруговязкопластические материалы, как частный случай вязкоупруговязкопластических материалов, обладают упругими свойствами внутри поверхности нагружения и вязкопластическими за ее пределами.

Развитый в [34] с использованием методов рациональной механики континуума аксиоматический подход позволяет рассматривать каждую из моделей упругопластического и вязкоупруговязкопластического поведения материалов как аппроксимацию некоторой более общей теории. При этом единым источником для построения всех моделей является простой по Ноллу твердый деформируемый материал [3, 4], общее определяющее соот-

ношение которого строго специализировано посредством наложения основанных на формализации известных экспериментальных данных ограничений на свойства материалов и процессы их деформирования.

С использованием полученных и приведенных в [6, 12, 37] результатов разработана классификация моделей простых упрочняющихся упругопластических и вязкоупруговязкопластических материалов [34], которая дополнена общими физическими уравнениями упругих и вязкоупругих тел. Такая классификация охватывает весь класс простых твердых деформируемых материалов и, следовательно, удобна для анализа существующих моделей, в том числе и феноменологически построенных, конструирования новых теорий, предсказания неизвестных в настоящее время видов поведения материалов, а также расположения моделей в виде иерархии по уровню сложности реакции на деформирование. Более подробная детализация материалов выполнена, как правило, на основании построенных ранее [34] моделей. В других случаях использовано более общее представление. Заметим, что классификация всех построенных моделей [34] чрезвычайно громоздкая. Поэтому представлена только общая схема ее конструирования и отмечено, что по мере необходимости или при дальнейшей более подробной разработке отдельных частных классов она может быть детализирована.

Как показал анализ, любое из приведенных определяющих соотношений, за исключением некоторых простейших моделей, может рассматриваться как общее, т.е. такое, которое может быть далее специализировано [34].

Развитая в данной работе классификация (рис. 1–5), в отличие от приведенной ранее [34], включает выделенные в [3] непростые материалы, простые жидкости и жидкие кристаллы (рис. 1), классификации моделей упругих (рис. 2) и вязкоупругих (рис. 3) тел, а также построенные в последнее время определяющие соотношения упругопластических материалов [13–20, 38–40] (рис. 4). (В представленной здесь классификации под материалами понимаются модели материалов – тела, континуумы.)



Рис. 1. Классификация моделей сплошных сред.

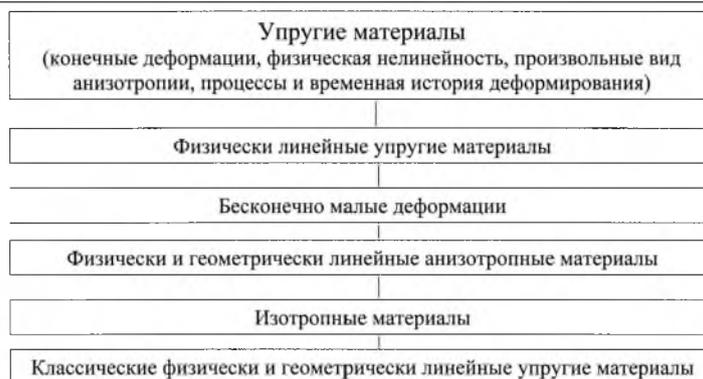


Рис. 2. Классификация моделей упругих материалов.

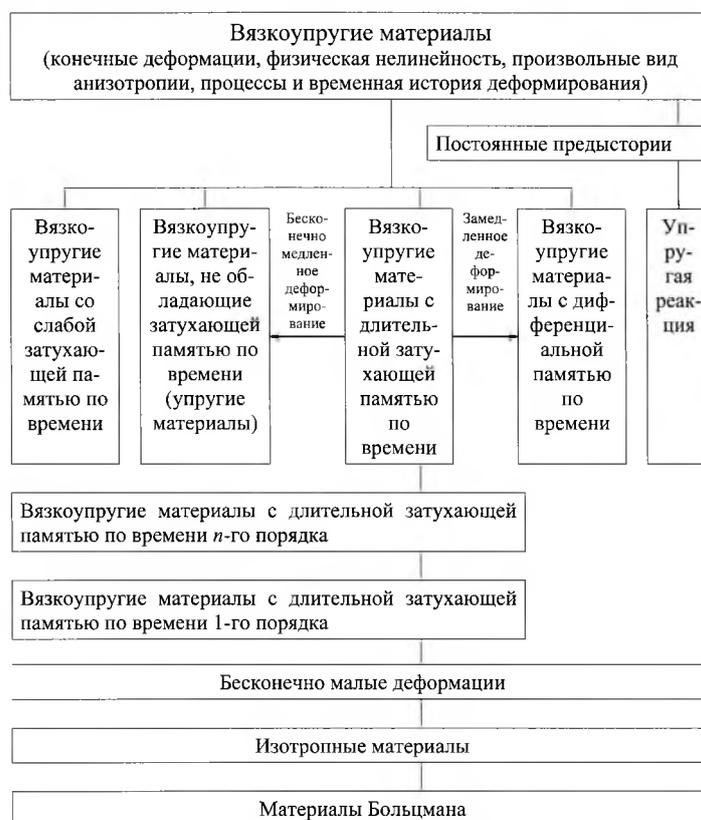


Рис. 3. Классификация моделей вязкоупругих материалов.

При построении определяющих соотношений в работах [13–20, 34, 38–40] использовался дедуктивный подход, что позволило разработать естественную классификацию в виде “перевернутого дерева”.

Как следует из рис. 1, при бесконечно медленном деформировании свойства вязкоупругих материалов близки к упругим, в то время как вязкоупруговязкопластических – к упругопластическим. Отмеченное при замедлении поведение вязкоупругого материала следует, например, из данных [3], вязкоупруговязкопластического – из [34].

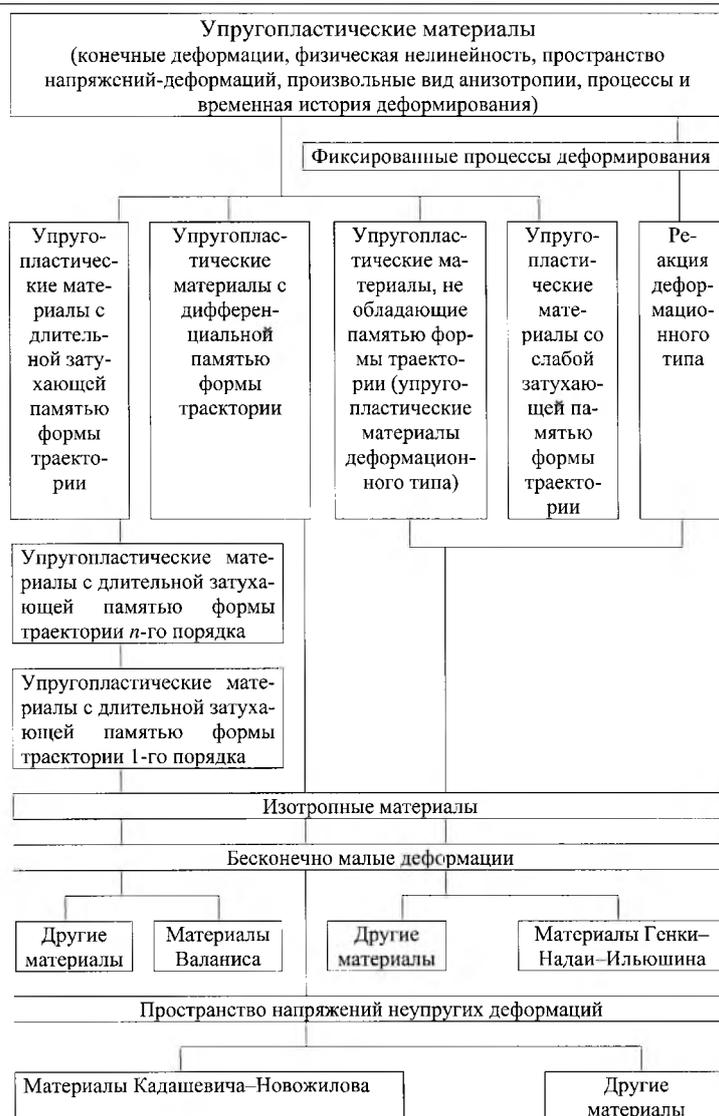


Рис. 4. Классификация моделей упругопластических материалов.

Классификации упругих и вязкоупругих материалов известны и представлены, например, в [3], а также на рис. 2 и 3 соответственно.

Классификация простых упрочняющихся упругопластических материалов включает: материалы с длительной затухающей памятью формы траектории; с дифференциальной памятью формы траектории; не обладающие памятью формы траектории (упругопластические материалы деформационного типа); со слабой затухающей памятью формы траектории, а также специфическую реакцию упругопластического материала с незатухающей памятью формы траектории – реакцию деформационного типа для фиксированных процессов деформирования (рис. 4). Упругопластические материалы с длительной затухающей памятью формы траектории состоят из упругопластических материалов с длительной затухающей памятью n -го

порядка и, в частности, материалов 1-го порядка. Как показано в [38, 39], последние могут быть представлены как материалы типа Валаниса, пригодные для описания в первую очередь малых деформаций, и другие материалы с длительной затухающей памятью 1-го порядка, описывающие как малые, так и конечные деформации в близких к пропорциональному деформированию процессах.



Рис. 5. Классификация моделей вязкоупруговязкопластических материалов.

Уругопластические материалы деформационного типа [18–20] при соответствующих ограничениях приводятся к материалам Генки–Надаи–Ильюшина и другим материалам, в частности, подчиняющимся тензорно нелинейным определяющим соотношениям. Подобной реакцией обладают и упругопластические материалы с незатухающей памятью формы траектории для фиксированных процессов деформирования.

Уругопластические материалы с дифференциальной памятью формы траектории, проявляющие память на произвольно малом интервале “прошлого”, могут быть приведены к материалам Кадашевича–Новожилова и другим материалам [34].

Классификация моделей простых вязкоупруговязкопластических материалов представлена на рис. 5. Она включает: материалы со слабой затухающей памятью формы траектории и по времени; не обладающие затухающей памятью формы траектории и по времени (материалы деформационного типа); с длительной затухающей памятью формы траектории и по времени; с дифференциальной памятью формы траектории и по времени. Последние приводятся к материалам Пежины [41] и другим материалам. Вязкоупруговязкопластические материалы с длительной затухающей памятью формы траектории и по времени приводятся к материалам с длительной затухающей памятью n -го порядка и, в частности, 1-го порядка.

Если для упрочняющихся упругопластических материалов значительная часть известных феноменологических моделей, как следует из представленной классификации, уже построена с использованием аксиоматического подхода, то для вязкоупруговязкопластических материалов решение такой задачи требует значительных усилий.

Резюме

Розвинуто розроблену раніше автором на основі загальної теорії визначальних співвідношень Нолла з використанням методів раціональної механіки континуума класифікацію моделей матеріалів у механіці суцільного середовища.

1. БСЭ. – М., 1978. – **12**. – 623 с.
2. Седов Л. И. Об основных моделях в механике. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. – 151 с.
3. Трусделл К. Первоначальный курс рациональной механики сплошных сред. – М.: Мир, 1975. – 592 с.
4. Васин Р. А. Определяющие соотношения в теории пластичности // Итоги науки и техники. Механика деформируемого твердого тела. – 1990. – **21**. – С. 3 – 75.
5. Noll W. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1958. – **2**. – P. 197 – 226.
6. Pipkin A. S. and Rivlin R. S. Mechanics of rate-independent materials // Z. Ang. Math. Physik. – 1965. – **16**, No. 3. – P. 313 – 326.
7. Owen D. R. Thermodynamics of materials with elastic range // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1968. – **31**. – P. 91 – 112.
8. Owen D. R. A mechanical theory of materials with elastic range // Ibid. – 1970. – **37**. – P. 85 – 110.
9. Silhavy M. On transformation laws for plastic deformation of materials with elastic range // Ibid. – 1977. – **63**, No. 2. – P. 169 – 182.
10. Lucchesi M. and Podio-Guidugli P. Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 1 // Ibid. – 1988. – **102**. – P. 23 – 43.
11. Lucchesi M. and Podio-Guidugli P. Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 2 // Ibid. – 1990. – **110**. – P. 9 – 42.

12. *Lucchesi M., Owen D. R., and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 3: Approximate constitutive relations // *Ibid.* – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
13. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // *Пробл. прочности.* – 1998. – № 5. – С. 59 – 70.
14. *Лепихин П. П.* Моделирование пропорционального деформирования простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Анализ определяющих соотношений и сопоставление их с экспериментами // *Там же.* – № 6. – С. 43 – 55.
15. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов монотонного деформирования простых материалов с упругопластическим поведением // *Там же.* – 1999. – № 6. – С. 35 – 41.
16. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Построение определяющих соотношений // *Там же.* – 2000. – № 3. – С. 56 – 68.
17. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов пропорционального нагружения простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Сопоставление теории с экспериментами // *Там же.* – № 4. – С. 45 – 53.
18. *Лепихин П. П.* Моделирование процессов активного деформирования простых по Ноллу упругопластических материалов с независимым от пути поведением // *Там же.* – 2001. – № 2. – С. 52 – 64.
19. *Лепихин П. П.* Построение определяющих соотношений деформационной теории для простых по Ноллу упрочняющихся материалов с упругопластическим поведением // *Там же.* – 2005. – № 6. – С. 35 – 49.
20. *Троценко В. Т., Куриат Р. И., Лебедев А. А. и др.* Прочность материалов и конструкций. – Киев: Академперіодика, 2005. – 1088 с.
21. *Ленский В. С.* Современные вопросы и задачи пластичности в теоретическом и прикладном аспектах // *Упругость и неупругость.* – 1978. – № 5. – С. 65 – 96.
22. *Ohashy Y.* Effects of complicated deformation history on inelastic deformation behavior of metals // *Mem. Fac. Eng.* – 1982. – **34**, No. 1. – P. 1 – 76.
23. *Васин Р. А.* Об экспериментальном исследовании функционалов пластичности в теории упругопластических процессов // *Пластичность и разрушение твердых тел.* – М., 1988. – С. 40 – 57.
24. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 1. General theory // *Arch. Mech.* – 1971. – **23**, No. 4. – P. 517 – 533.
25. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 2. Application to mechanical behavior of metals // *Ibid.* – P. 535 – 551.
26. *Valanis K. C.* Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. Plasticity as a limit of the endochronic theory // *Ibid.* – 1980. – **32**, No. 2. – P. 171 – 191.

27. Новожилов В. В., Кадашевич Ю. И. Микронапряжения в конструкционных материалах. – Л.: Машиностроение, 1990. – 223 с.
28. Ильющин А. А. Пластичность. Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.
29. Bertram A. An alternative approach to finite plasticity based on material isomorphisms // Int. J. Plas. – 1999. – **15**, No. 3. – P. 353 – 374.
30. Поздеев А. А., Трусов П. В., Няшин Ю. И. Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения. – М.: Наука, 1986. – 231 с.
31. Левитас В. И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. – Киев: Наук. думка, 1987. – 231 с.
32. Левитас В. И. Термомеханика фазовых переходов и неупругого деформирования микронеоднородных материалов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 248 с.
33. Ковальчук Б. И., Лебедев А. А., Уманский С. Э. Механика неупругого деформирования материалов и элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 280 с.
34. Лепихин П. П. Структура определяющих соотношений вязкоупруго-пластического состояния материалов: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. – Киев, 1997. – 32 с.
35. Лепихин П. П. Теоретическое построение определяющих соотношений простых начально изотропных неупругих твердых материалов. Конечные деформации / АН Украины. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1993. – 37 с.
36. Лепихин П. П. Теоретическое построение определяющих соотношений простых начально изотропных неупругих твердых материалов. Бесконечно малые деформации / АН Украины. Ин-т пробл. прочности. – Препр. – Киев, 1994. – 32 с.
37. Haupt P. On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics // Acta Mech. – 1993. – **100**, No. 3–4. – P. 129 – 154.
38. Лепихин П. П. Моделирование затухающей памяти в теории простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением // Прогрессивная техника и технология машиностроения, приборостроения и сварочного производства: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию механико-машиностроительного и 50-летию сварочного факультетов (25–28 мая 1998 г.) – Киев: Нац. техн. ун-т Украины (КПИ). – 1998. – **III**. – С. 105 – 109.
39. Лепихин П. П. Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Конечные деформации // Пробл. прочности. – 2004. – № 5. – С. 63 – 76.
40. Лепихин П. П. Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Бесконечно малые деформации // Там же. – № 6. – С. 87 – 98.
41. Perzyna P. Fundamental Problems in Viskoplasticity. – New York: Academic Press, 1966.

Поступила 12. 12. 2005