

Определение критических нагрузок в задаче трехмерной устойчивости тонкостенного стержня уголкового профиля

В. С. Зеленский

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена плоская задача устойчивости тонкостенного стержня уголкового профиля, изготовленного из изотропного линейно-упругого материала. Критические параметры определялись с помощью второго варианта трехмерной линеаризованной теории устойчивости, основное состояние – из уравнений линейной теории упругости. Приближенное решение задачи устойчивости отыскивалось методом сеток. Исследована зависимость критических параметров от параметра тонкостенности конструкции и определены погрешности прикладной теории устойчивости, используемой для расчета рамных конструкций.

Ключевые слова: трехмерная устойчивость, критические параметры, расчетная область, численные методы.

Введение. В настоящее время вопросы устойчивости тонкостенных конструкций из традиционных материалов рассматриваются на основе прикладных классических и уточненных теорий, построенных с привлечением кинематических и динамических гипотез, что позволяет уменьшить размерность исследуемых задач путем сведения трехмерных задач к двумерным, а двумерных к одномерным. Этот подход широко используется в инженерной практике при проектировании конструкций различного вида. Однако его применение не всегда корректно, поскольку как классические, так и уточненные прикладные теории вносят неустранимые погрешности в значения критических нагрузок, и результаты исследований в этом случае могут не удовлетворять требованиям инженерной практики. Кроме того, при изучении, например, задач устойчивости толстостенных металлических конструкций, устойчивости материалов с начальными напряжениями, а также устойчивости горных выработок и др. имеет место сугубо трехмерное напряженное состояние [1]. Заметим, что при исследовании устойчивости тонкостенных стержней, используемых в строительных конструкциях, отмечается также сугубо трехмерное (в плоском случае двумерное) напряженное состояние, поэтому для определения критических параметров целесообразно использовать трехмерные уравнения устойчивости. К настоящему времени достаточно полно исследованы общие вопросы трехмерной линеаризованной теории устойчивости, основы которой изложены в [1–4].

В работах [5–9] для исследования плоских и пространственных задач трехмерной устойчивости анизотропных пластин и стержней при неоднородном докритическом состоянии использован подход, основанный на применении трехмерных линеаризованных уравнений устойчивости, решение которых осуществляется с помощью сеточного подхода. Для этих задач исходя из концепции базовых схем [10] разработан способ построения в явной форме дискретных моделей, соответствующих заданным классам задач устойчивости.

В данной работе в рамках второго варианта трехмерной линеаризированной теории устойчивости [3] и физически линейной теории упругости рассматривается плоская задача устойчивости тонкостенного стержня, имеющего в профиле форму уголка. Подобные элементы конструкций широко используются в строительной практике [11]. Результаты исследования устойчивости таких конструкций на основе трехмерной линеаризированной теории устойчивости могут служить эталоном при построении инженерных методов расчета, поскольку позволяют оценить точность классических и уточненных прикладных теорий, а также определить область их применимости. Докритическое состояние исследуемой конструкции неоднородное, и его компоненты определяются из уравнений линейной теории упругости. Приближенное решение задачи осуществляется с помощью сеточного подхода. Постановки дискретных задач (разностные и алгебраические) проводятся с использованием методики, изложенной в работах [8, 10, 12, 13]. Их решение получено на основе применения высокоэффективных прямых и итерационных методов: при определении основного состояния [13, 14] – метод Холецкого и метод сопряженных градиентов, при определении критических параметров – метод итерирования подпространства и градиентный метод [15]. Для сокращения времени решения дискретных задач теории упругости используется методика комбинированного применения прямого (метод Холецкого) и итерационного (сопряженных градиентов) методов, дискретным задачам теории устойчивости – метод итерирования подпространства с градиентным методом. Анализ точности результатов, полученных для рассматриваемой задачи, проводится по прикладной теории устойчивости рамных конструкций [11]. По повторяющимся индексам производится суммирование, и все индексы, если не оговаривается противное, изменяются от единицы до двух.

Постановка дифференциальной задачи. Рассматривается задача устойчивости тонкостенного стержня достаточной протяженности в направлении оси Ox_3 . Стержень изготовлен из изотропного линейно-упругого материала и имеет в профиле форму уголка, в котором ширина вертикальной l_1 и ширина горизонтальной l_2 полок равны ($l_1 = l_2 = l$) – рис. 1. Торцевые участки стержня $x_i = 0 \wedge l_j - h \leq x_j \leq l_j$, $j = 3 - i$ жестко зашпелены, и на участке $l_1 - h \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2 \wedge x_3 < \infty$ задана сжимающая нагрузка интенсивности $P_2^0 = \text{const}$. Геометрия и условия нагружения обеспечивают в рассматриваемой конструкции состояние плоской деформации. Расчетная область представляет собой контур, состоящий из двух прямоугольных элементов, образующие которых параллельны осям координат Ox_1 , Ox_2 (рис. 1).

Определение основного состояния. При изложенной постановке для определения компонентов докритического состояния, обозначенных верхним индексом “0”, необходимо в области, занятой конструкцией, найти решение уравнений линейной теории упругости:

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (1)$$

при следующих граничных условиях:

$$\begin{cases} \sigma_{22}^0 = P_{22}^0 \wedge \sigma_{21}^0 = 0, & l_1 - h \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ \sigma_{2i}^0 = 0, & 0 \leq x_1 < l_1 - h \wedge (x_2 = l_2 - h \vee x_2 = l_2); \\ \sigma_{1i}^0 = 0, & (0 \leq x_2 \leq l_2 \wedge x_1 = l_1) \vee (0 \leq x_2 \leq l_2 - h \wedge x_1 = l_1 - h); \\ u_i^0 = 0, & (l_1 - h \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0) \vee (x_1 = 0 \wedge l_2 - h \leq x_2 \leq l_2). \end{cases} \quad (2)$$

Составляющие тензора напряжений и компоненты вектора смещений для линейно-упругого изотропного тела связаны законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{ii}^0 &= A_{ik} \frac{\partial u_k^0}{\partial x_k}; & \sigma_{12}^0 &= G \left(\frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} \right); \\ A_{ii} &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}; & A_{12} &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \\ G &= \frac{E}{2(1+\nu)}. \end{aligned} \quad (3)$$

В (1)–(3) введены следующие обозначения: $\mathbf{x}(x_1; x_2)$ – радиус-вектор точки; u_m^0 – компоненты вектора упругих смещений; σ_{ij}^0 – компоненты тензора напряжений; A_{ij} , G – коэффициенты упругости и модуль сдвига изотропного тела; E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона; \vee , \wedge – знаки логического сложения и умножения.

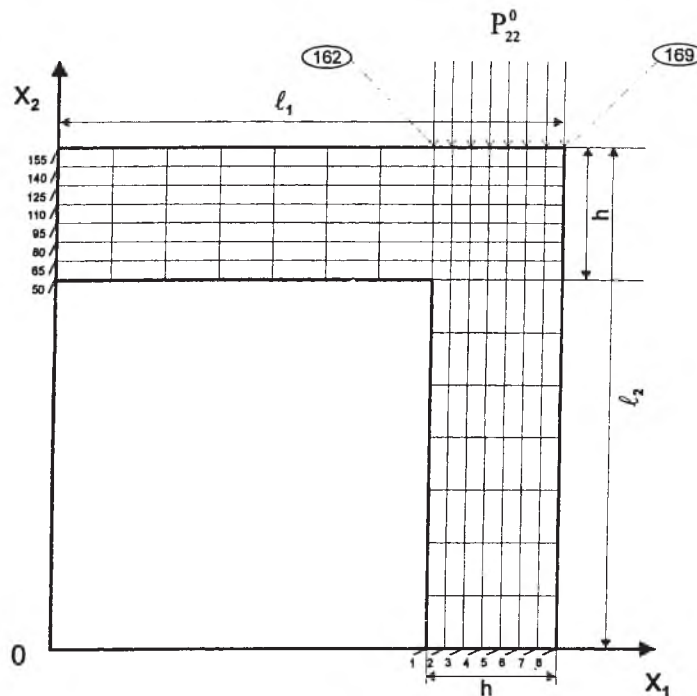


Рис. 1. Расчетная схема задачи устойчивости.

Определение критических параметров. Критическая нагрузка и форма потери устойчивости находятся из решения уравнений в возмущениях [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sigma_{im} + \lambda P_{22}^0 \frac{\partial u_m}{\partial x_j} \right) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (4)$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \sigma_{2m} + \lambda P_{22}^0 \frac{\partial u_m}{\partial x_2} = 0, & l_1 - h \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = l_2; \\ \sigma_{2m} = 0, & 0 \leq x_1 \leq l_1 - h \wedge (x_2 = l_2 - h \vee x_2 = l_2); \\ \sigma_{1m} = 0, & (x_1 = l_1 - h \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2 - h) \vee (x_1 = l_1 \wedge 0 \leq x_2 \leq l_2); \\ u_m = 0, & (l_1 - h \leq x_1 \leq l_1 \wedge x_2 = 0) \vee (x_1 = 0 \wedge l_2 - h \leq x_2 \leq l_2). \end{cases} \quad (5)$$

Задача устойчивости (4), (5) представляет собой обобщенную, полностью определенную задачу на собственные значения. Критические параметры $(\mathbf{P}_{кр}, \mathbf{u}^*)$ данной задачи характеризуются собственным решением $(\lambda^*, \mathbf{u}^*) \equiv (\lambda_1, \mathbf{u}_1)$. При этом критическая нагрузка находится по формуле

$$\mathbf{P}_{кр} = \lambda^* P_{22}^0, \quad (6)$$

а собственная векторная функция \mathbf{u}^* определяет форму потери устойчивости конструкции (возмущение смещений).

Построение дискретных задач. В области, занимаемой рассматриваемым телом, по каждому из направлений Ox_1 и Ox_2 вводится неравномерная разностная сетка $\omega = \omega + \gamma$, содержащая множество ω внутренних узлов и множество γ граничных узлов. Граница γ , в свою очередь, состоит из участков $\gamma_{\tau_i}, \gamma_{y_i}$, на которых по m -й составляющей граничных условий заданы соответственно разностные аналоги граничных условий в напряжениях и перемещениях. Сетка ω содержит N узлов, нумерация которых осуществляется слева-направо и снизу-вверх, и разбивает область, занятую конструкцией, на M прямоугольных ячеек (рис. 1). Для m -й ячейки определены номера узлов n^m ($n^m = 1, N$). В каждом узле в соответствии с методикой, описанной в работе [10], строится дискретная аппроксимация дифференциальных уравнений задач (1)–(3) и (4), (5).

Указанным задачам, описывающим соответственно докритическое состояние и устойчивость рассматриваемой конструкции, на сетке ω поставим в соответствие разностные задачи:

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \Phi^0, \quad \mathbf{x} \in \omega; \quad (7)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (8)$$

Разностным операторам \mathbf{A} и \mathbf{B} , действующим в пространстве размерности $2N$, соответствуют матрицы $\mathbf{A} = \{A_{ij}\}$, $\mathbf{B} = \{B_{ij}\}$ размерности $2N \times 2N$. Поэтому задачам (1)–(3) и (4), (5) на сетке ω можно поставить в соответствие следующие алгебраические задачи.

Алгебраическая задача, соответствующая докритическому состоянию:

$$\mathbf{A}\mathbf{y}^0 = \Phi^0, \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (9)$$

Алгебраическая задача, аппроксимирующая задачу устойчивости:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \mu\mathbf{B}\mathbf{y}, \quad \mathbf{x} \in \omega. \quad (10)$$

Чтобы подчеркнуть эквивалентность задач (7), (8) и (9), (10), сохранены одни и те же обозначения как для матриц, так и для операторов. Отметим, что разностные задачи (7), (8) – самосопряженные и положительно-определенные ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^* > 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}^* < 0$), а матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} задач (9), (10) – симметричные и положительно-определенные. Для решения задач (7), (8) и (9), (10) применялись эффективные итерационные и прямые методы. Использование прямых методов, как показала практика, наиболее целесообразно при проведении расчетов на “грубых” разностных сетках. В рассматриваемом случае алгебраическая задача (9) решалась прямым методом Холецкого [13], а алгебраическая задача устойчивости (10) – методом итерирования подпространства [15]. Затем разностная сетка сгущалась, и для решения задач (7), (8) на этой сетке применялись итерационные методы – метод сопряженных градиентов [14] и градиентный метод [15]. Решение, полученное методом Холецкого и методом итерирования подпространства, интерполировалось и принималось в качестве начального приближения для решения задач (7), (8) указанными итерационными методами.

Результаты расчетов. Рассматривалась устойчивость тонкостенного стержня уголкового профиля со следующими механическими характеристиками: $E = 50$ ГПа; $\nu = 0,25$. При расчетах варьировалась толщина стенок стержня h , линейные размеры нормировались величиной l . Цель расчетов заключалась в определении критических параметров конструкции в зависимости от параметра тонкостенности $\alpha = h/l$. При этом величина α изменялась в интервале $0,05 \leq \alpha \leq 0,20$. Определялись также погрешности критических нагрузок, полученных для данной задачи по прикладной теории устойчивости рамных конструкций [11]. Геометрия расчетной области, способ нагружения и закрепления конструкции, а также схема дискретизации расчетной области представлены на рис. 1.

Для дискретизации расчетной области, занимаемой конструкцией, использовали неравномерную разностную сетку по направлениям Ox_1 и Ox_2 . Расчеты проводили на последовательности сгущающихся сеток. Для получения новой сетки шаги предыдущей сетки уменьшали вдвое по каждому направлению. Исходная сетка содержала 169 узлов (рис. 1). В качестве критерия окончания процесса при определении собственного числа прини-

малось совпадение в результатах расчета трех значащих цифр на двух последовательных сетках. Для получения указанной точности использовали четыре сетки. Последняя сетка содержала 1247 узлов. Для указанного диапазона изменения параметра тонкостенности $\alpha = (0,05; 0,1; 0,15; 0,20)$ получены соответственно следующие значения критических нагрузок: $P_{кр} = (0,00027E; 0,00213E; 0,0071E; 0,015E)$, $P_{пр} = (0,00028E; 0,0022E; 0,0078E; 0,018E)$, где $P_{кр}$ – критические нагрузки по трехмерной теории устойчивости; $P_{пр}$ – критические нагрузки по прикладной теории.

Анализ полученных результатов показал, что значения критических нагрузок, определенные по прикладной теории завышены; погрешность значений увеличивается с ростом параметра тонкостенности α . Например, при $\alpha = 0,05$ погрешность критической нагрузки составляет 1%, при $\alpha = 0,2$ она достигает 14%.

На рис. 2 показаны приведенные компоненты возмущения смещений $u_1(l_1 - h/2; x_2)$, $u_2(x_1; l_2 - h/2)$, масштабированные соответственно величинами $\max|u_1|$, $\max|u_2|$. Кривые 1–4 построены для срединной линии вертикальной полки $x_1 = l_1 - h/2$, кривые 5–8 – для срединной линии горизонтальной полки $x_2 = l_2 - h/2$.

Представленные графики определяют форму потери устойчивости при разных значениях параметра тонкостенности α рассматриваемой конструкции. Видно, что формы потери устойчивости для горизонтальной и вертикальной полок существенно различаются.

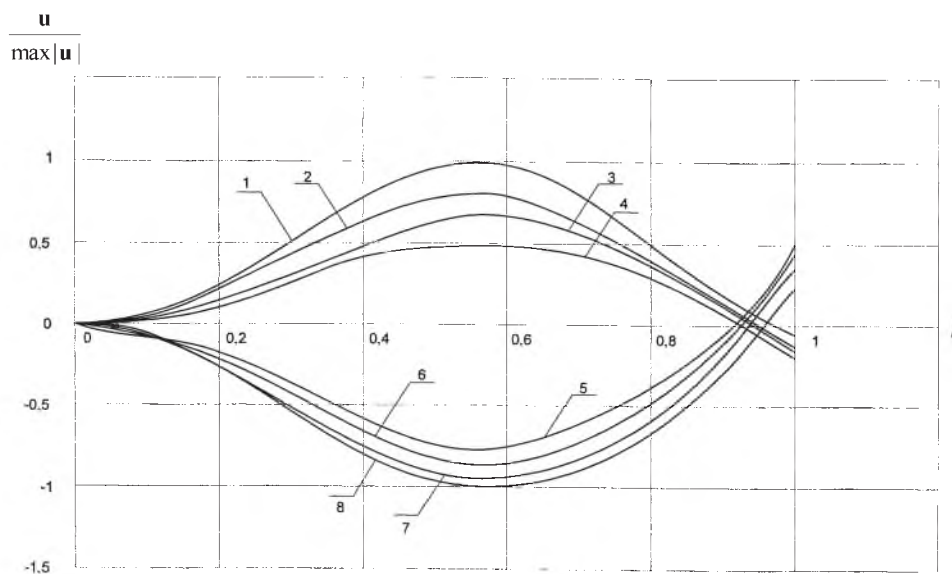


Рис. 2. Формы потери устойчивости конструкции для различных значений параметра тонкостенности α : 1, 5 – $\alpha = 0,05$; 2, 6 – $\alpha = 0,1$; 3, 7 – $\alpha = 0,15$; 4, 8 – $\alpha = 0,2$.

Закключение. Применение трехмерной линеаризованной теории устойчивости позволяет в достаточно строгой постановке исследовать задачи устойчивости тонкостенных конструкций из традиционных материалов и оценить погрешность результатов, полученных по прикладным теориям.

Поскольку нахождение аналитических решений в подобных случаях затруднительно, для решения задач такого класса применяются эффективные численные методы (прямые и итерационные), обеспечивающие получение результатов с заданной точностью.

Резюме

Розглянуто плоску задачу стійкості тонкостінного стрижня кутикового профілю з ізотропного лінійно-пружного матеріалу. Критичні параметри визначалися за допомогою другого варіанта тривимірної лінеаризованої теорії стійкості, основний стан – з рівнянь лінійної теорії пружності. Досліджено залежність критичних параметрів від параметра тонкостінності конструкції і визначено похибки прикладної теорії стійкості, що використовується для розрахунку рамних конструкцій.

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. – М.: Наука, 1987. – 598 с.
2. Галеркин Б. Г. Собрание сочинений. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 391 с.
3. Головчан В. Т., Гузь А. Н., Коханенко Ю. В., Куц В. И. Механика композитов. В 12 т. Т. 1. Статика материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 453 с.
4. Гузь А. Н. Устойчивость трехмерных деформируемых тел. – Киев: Наук. думка, 1971. – 273 с.
5. Гузь А. Н., Бабич И. Ю. Трехмерная теория устойчивости стержней, пластин и оболочек. – Киев: Вища шк., 1980. – 167 с.
6. Гузь А. Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища шк., 1986. – 512 с.
7. Гузь А. Н., Коханенко Ю. В. Решение плоских задач трехмерной теории упругой устойчивости пластин при неоднородных докритических состояниях // Прикл. механика. – 1977. – **13**, № 12. – С. 63 – 72.
8. Гузь А. Н., Зеленский В. С., Коханенко Ю. В. О решении пространственных задач трехмерной теории упругой устойчивости пластин и стержней при неоднородных докритических состояниях // Механика композитных материалов. – 1980. – № 3. – С. 62 – 64.
9. Зеленский В. С. Пространственная задача устойчивости сопряженных стержней при неоднородных докритических состояниях // Доп. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 44 – 46.
10. Коханенко Ю. В. Численное решение задач теории упругости и трехмерной устойчивости кусочно-неоднородных сред // Прикл. механика. – 1986. – **22**, № 1. – С. 46 – 53.
11. Зеленский В. С., Коханенко Ю. В. Численное решение плоской задачи трехмерной устойчивости сопряженных прямоугольных пластин // Доп. НАН України. – 1998. – № 9. – С. 62 – 66.

12. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 228 с.
13. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
14. *Guz A. N.* Fundamentals of the Three-Dimensional Theory of Stability of Deformable Bodies. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
15. *Kokhanenko Yu. V.* Method of solving problem of the three-dimensional stability of composite laminates // Appl. Mech. – 1998. – **34**, No. 3. – P. 239 – 249.

Поступила 02. 03. 2005