НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4+539.376

Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 2. Предельное состояние неравномерно нагретых элементов конструкций

А. Ф. Никитенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Для произвольного тела (элемента конструкции), подвергнутого стационарным внешним температурно-силовым воздействиям, получено с использованием кинетической теории ползучести Работнова условие предельного состояния, обеспечивающее его равнопрочность вплоть до исчерпания несущей способности. Представлена методика расчета элементов конструкций по предельному состоянию. Для случая выполнения условия предельного состояния только на отдельных частях поверхности тела изложена методика расчета его напряженно-деформированного состояния при максимальном приближении к равнопрочному.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, ползучесть, параметр повреждаемости, разрушение, предельное состояние, несущая способность, равнопрочное тело.

Кинетическая теория ползучести, математическая модель которой представлена в сообщении [1] системой уравнений (1) и (2), с привлечением уравнений равновесия, соотношений Коши, уравнений совместности скоростей деформаций ползучести и соответствующих граничных условий позволяет рассчитать напряженно-деформированное состояние элементов конструкций в любой момент времени вплоть до начала разрушения. Преобразуем эту систему уравнений следующим образом:

$$\dot{p}_{ij} = \frac{W}{\sigma_э}\frac{\partial \sigma_э}{\partial \sigma_{ij}}, \qquad W = \frac{B_1 \sigma_э^{n+1}}{\varphi_1(\omega)}, \qquad \varphi_1(\omega) = (1-\omega)^{m_1}, \qquad i, j = 1, 2, 3; \tag{1}$$

$$\dot{\omega} = \frac{B_2 \sigma_{*э}^{g+1}}{\varphi_2(\omega)}, \qquad \omega(x_k, 0) = 0, \qquad \omega(x_k^*, t_*) = 1, \qquad \varphi_2(\omega) = (1-\omega)^m. \tag{2}$$

Принятые обозначения в (1) и (2) подробно описаны в сообщении [1].

Время начала разрушения тела (элемента конструкции) определяется из условия достижения параметром повреждаемости $\omega(x_k, t)$ в некоторой точке с координатами $\overset{*}{x}_k$ критического значения, равного единице. Действительно, интегрируя (2), получаем

$$\int_0^{t_*} B_2 \sigma_{*_э}^{g+1} d\tau = \int_0^1 \varphi_2(\omega) d\omega. \tag{3}$$

Из (3) определяем не только время начала разрушения t_*, но и точку с координатами $\overset{*}{x}_k$, в которой произойдет разрушение. Определяется она как точка, в которой произведение $B_2 \sigma_{*_э}^{g+1}$ достигает наибольшего значения. При $t > t_*$ происходит движение фронта разрушения, и окончательное разрушение тела наступает в момент времени $t = t_{*f}$. Оценка времени распространения фронта разрушения $t_{*f} - t_*$ представляет собой самостоятельную достаточно трудоемкую задачу [2–4].

Поэтому целесообразно рассмотреть альтернативную задачу, связанную с определением таких внешних температурно-силовых воздействий на тело, при которых разрушение происходило бы одновременно во всех точках. Очевидно, эта задача имеет непосредственное прикладное значение, и ее решение интересовало многих исследователей [5–11].

Следуя работам [8–11], сформулируем следующее определение: тело объемом V, ограниченное поверхностью S и нагруженное внешними температурно-силовыми воздействиями, будем называть равнопрочным, если накопление повреждений в процессе ползучести материала в объеме и на поверхности тела происходит эквивалентно, т.е. таким образом, что разрушение наступает одновременно во всех точках за некоторое наперед заданное время $t = t_{**}$. Именно одновременное разрушение тела во всех точках в момент $t = t_{**}$ будем называть его предельным состоянием в процессе ползучести материала. На основании сформулированного определения очевидно, что предельное состояние может быть реализовано только в равнопрочном теле, для которого, как следует из (3), в каждой его точке в любой момент времени должно быть выполнено следующее равенство, которое целесообразно называть условием предельного состояния:

$$B_2(\theta)[\sigma_{*_э}(x_k, t)]^{g+1} = f_1(t), \tag{4}$$

где $f_1(t)$ – пока произвольная функция времени.

Полагаем, что температура тела определяется известной функцией координат и времени $\theta = \theta(x_k, t)$. Она может быть конкретизирована в результате решения уравнения теплопроводности или же аппроксимации экспериментальных данных, полученных при исследовании температурного поля тела [12]. Простоты ради и обозримости получаемых результатов ограничимся случаем стационарного температурного поля. Тогда коэффициент B_2 будет являться функцией только координат. В дальнейшем функции координат будем обозначать нулем в верхнем индексе. С учетом ограничения на температурное поле соотношение (4) запишем так:

$$B_2^0[\sigma_{*э}(x_k,t)]^{g+1} = f_1(t), \tag{5}$$

откуда следует, что эквивалентное напряжение $\sigma_{*э}$ должно иметь вид $\sigma_{*э} = \sigma_{*э}^0 f(t)$, где $f(t)$ – пока произвольная, как и $f_1(t)$, функция времени. Разделяя переменные в (5), получаем

$$B_2^0(x_k)[\sigma_{*э}^0(x_k)]^{g+1} = C, \qquad f_1(t)/[f(t)]^{g+1} = C. \tag{6}$$

Реализуемые в теле температурное поле и напряженное состояние, связанные между собой равенством (4) или же, более конкретно при сформулированных выше ограничениях, равенством (6), обеспечивают равнопрочность этого тела в любой момент времени $0 < t < t_{**}$ и его предельное состояние на момент $t = t_{**}$, при этом для $0 < t \le t_{**}$ должны быть выполнены:

уравнения равновесия

$$\partial\sigma_{ij}/\partial x_j = 0; \tag{7}$$

соотношения Коши

$$2\dot{p}_{ij} = (\partial\dot{u}_i/\partial x_j + \partial\dot{u}_j/\partial x_i); \tag{8}$$

граничные условия

$$\sigma_{ij}\nu_j = T_i \qquad \text{на} \quad S_T, \tag{9}$$

$$\dot{u}_i(x_k,t) = \dot{u}_i^e \qquad \text{на} \quad S_u \;\; (S_u + S_T = S), \tag{10}$$

где ν_j – направляющие косинусы внешней нормали к поверхности тела в соответствующей точке; T_i – компоненты вектора внешней нагрузки; u_i – компоненты вектора перемещений. В частности, на S_u могут быть заданы постоянные перемещения, тогда $\dot{u}_i^e = 0$, или же изменяющиеся во времени по заданному закону, тогда $\dot{u}_i^e = \dot{u}_i^0 F(t)$. Напомним, что в тех задачах, в которых при известном поле скоростей деформаций ползучести определение поля скоростей перемещений связано с интегрированием соотношений (8), необходимо требовать еще выполнения соответствующих уравнений совместности.

Таким образом, решение сформулированной выше задачи свелось, по-существу, к определению напряженно-деформированного состояния равнопрочного тела в любой момент времени вплоть до исчерпания его несущей способности.

Решение задачи, представленной системой уравнений (1), (2), (6)–(10), отыскиваем в следующем виде:

$$\sigma_{ij}(x_k,t) = \sigma_{ij}^0 f(t); \tag{11}$$

$$\dot{u}_i(x_k,t) = \dot{u}_i^* F(t), \qquad u_i^* = u_i^*(x_k). \tag{12}$$

Ограничимся случаем пропорционального нагружения, тогда $T_i(x_k, t) = T_i^0 \psi(t)$, где $\psi(t)$ – известная функция времени.

Легко убедиться, что поле напряжений (11) удовлетворяет уравнениям равновесия (7) и граничным условиям (9), если этим же уравнениям равновесия и граничным условиям удовлетворяет стационарное поле σ_{ij}^0, а произвольная пока функция $f(t)$ совпадает с известной функцией нагружения $\psi(t)$. Очевидно, что стационарное поле σ_{ij}^0 должно быть статически допустимым.

С использованием (11) вычисляем эквивалентное напряжение $\sigma_{*э}$, представляющее, как отмечалось выше, однородную относительно напряжений функцию первой степени:

$$\sigma_{*э}(x_k, t) = \sigma_{*э}^0 \psi(t).$$

Это согласуется с выражением, следующим из (5) при условии, что температурное поле стационарное.

Очевидно, что произвольная функция $f_1(t)$ в условии предельного состояния (4) или (5) приобретает вполне конкретное выражение.

Действительно, из (6) следует

$$f_1(t) = C[\psi(t)]^{g+1}, \tag{13}$$

причем константа C, как видно из (3), с использованием (5) и (13) равна:

$$C = \int_0^1 \varphi_2(\omega) d\omega \bigg/ \int_0^{t_{**}} [\psi(t)]^{g+1} dt.$$

Поскольку $\varphi_2(\omega) = (1-\omega)^m$, получаем

$$C = \left[(m+1) \int_0^{t_{**}} [\psi(t)]^{g+1} dt\right]^{-1}. \tag{14}$$

Условие предельного состояния (6), которому должно удовлетворять искомое поле напряжений (11), окончательно принимает вид

$$B_2^0 (\sigma_{*э}^0)^{g+1} = \left[(m+1) \int_0^{t_{**}} [\psi(t)]^{g+1} dt\right]^{-1}, \tag{15}$$

где t_{**} – наперед заданное из условий эксплуатации время исчерпания несущей способности равнопрочного тела.

Если поверхностные нагрузки не изменяются во времени, т.е. $\psi(t) = 1$, то $f(t) = 1$, и искомое поле напряжений (11) совпадает со стационарным статически допустимым полем напряжений σ_{ij}^0, а условие предельного состояния (15) имеет вид

$$B_2^0(\sigma_{*э}^0)^{g+1} = [(m+1)t_{**}]^{-1}. \tag{16}$$

Поле напряжений (11) позволяет рассчитать поле скоростей деформаций ползучести. Подставив (11) в (1), вычислим поле скоростей деформаций ползучести:

$$\dot{p}_{ij}(x_k,t) = \frac{[\psi(t)]^n}{[\mu(t)]^{m_1}} \frac{W^0}{\sigma_э^0} \frac{\partial \sigma_э^0}{\partial \sigma_{ij}^0}, \tag{17}$$

где $\mu(t)$ – функция, связанная, как следует из (2), с параметром повреждаемости $\omega(t)$ соотношением $\omega = 1 - \mu$ и введенная только для удобства:

$$\mu(t) = \left\{ 1 - \int_0^t [\psi(\tau)]^{g+1} d\tau \Big/ \int_0^{t_{**}} [\psi(\tau)]^{g+1} d\tau \right\}^{1/(m+1)}. \tag{18}$$

Из выражения (17) для поля скоростей деформаций ползучести следует, что оно должно быть подобно некоторому стационарному полю $\dot{p}_{ij}^0$, т.е. $\dot{p}_{ij}(x_k, t) = \dot{p}_{ij}^0 \Phi(t)$, где $\Phi(t)$ – пока произвольная функция времени. Разделяя переменные в (17) и полагая соответствующую константу равной единице, получаем

$$\dot{p}_{ij}^0(x_k, t) = \frac{W^0}{\sigma_э^0} \frac{\partial \sigma_э^0}{\partial \sigma_{ij}^0}, \qquad \Phi(t) = [\psi(t)]^n \big/ [\mu(t)]^{m_1}. \tag{19}$$

Из (19) вытекает, что стационарное поле скоростей деформаций $\dot{p}_{ij}^0$ связано со стационарным полем напряжений σ_{ij}^0, которое является статически допустимым, законом установившейся ползучести. Поле $\dot{p}_{ij}^0$ не является, вообще говоря, кинематически возможным.

Перейдем к рассмотрению поля скоростей перемещений (12). Подставляя (12) в (8), получаем

$$\dot{p}_{ij}(x_k, t) = \dot{p}_{ij}^* F(t), \tag{20}$$

где стационарное поле скоростей деформаций ползучести $\dot{p}_{ij}^*$ связано со стационарным полем скоростей перемещений $\dot{u}_i^*$ соотношениями Коши:

$$2\dot{p}_{ij}^* = (\partial \dot{u}_i^* \big/ \partial x_j + \partial \dot{u}_j^* \big/ \partial x_i). \tag{21}$$

Очевидно, что: а) искомое поле скоростей перемещений $\dot{u}_i(x_k, t)$ удовлетворяет граничным условиям (10) на поверхности S_u, если этим граничным условиям удовлетворяет стационарное поле $\dot{u}_i^*$; б) поле $\dot{u}_i^*$ и связанное с ним в соответствии с (21) стационарное поле скоростей деформаций ползучести $\dot{p}_{ij}^*$ являются кинематически возможными. Поле напряжений, с которым с помощью соотношений (1) связано поле скоростей деформаций ползучести (20), может, вообще говоря, не удовлетворять уравнениям равновесия (7) и граничным условиям (9).

Не нарушая общности и не усложняя соответствующего анализа, отождествим кинематически возможное поле скоростей $\dot{p}_{ij}^*$, связанное с полем $\dot{u}_i^*$ соотношениями Коши (21), с полем $\dot{p}_{ij}^0$, связанным со статически допустимым полем напряжений σ_{ij}^0 законом установившейся ползучести (19). Сопоставляя (20) с (17) и учитывая (19), для функции $F(t)$ получаем следующее выражение:

$$F(t) = [\psi(t)]^n \big/ [\mu(t)]^{m_1} . \qquad (22)$$

Поскольку методы решения задач в предположении установившейся ползучести материала разработаны [2, 4, 13], считаем их известными.

На основании вышеизложенного заметим, что решение задачи (1), (2), (6)–(10) связано с расчетом напряженно-деформированного состояния равнопрочного тела в предположении установившейся ползучести материала. Чтобы получить истинное решение, необходимо согласно (11), (12) или (20) с учетом того, что $\dot{p}_{ij}^* = \dot{p}_{ij}^0$, решение установившейся ползучести умножить на вполне конкретные функции времени, определяемые через известную функцию нагружения $\psi(t)$ и параметр повреждаемости $\mu(t)$. Одновременно с этим на стационарное поле напряжений σ_{ij}^0 совместно со стационарным температурным полем необходимо наложить ограничения в соответствии с условием предельного состояния (15) или (16), если поверхностные нагрузки не изменяются во времени.

Ограничимся случаем, когда поверхностные нагрузки являются стационарными. Условие предельного состояния в этом случае представляется выражением (16). Его можно преобразовать таким образом:

$$U^0 \sigma_{*\text{э}}^0 = \sigma_{\text{д.п}}, \qquad U^0 = [B_2^0(\theta) \big/ B_2^0(\theta_0)]^{1/(g+1)}, \qquad (23)$$

где

$$\sigma_{\text{д.п}} = [(m+1) B_2^0(\theta_0) t_{**}]^{-1/(g+1)} \ - \qquad (24)$$

согласно определению есть предел длительной прочности материала, определенный на базе $t = t_{**}$ часов при фиксированной температуре $\theta = \theta_0$ [3].

Если тело равномерно нагрето, то $U^0 = 1$, и условие предельного состояния (23) таково:

$$\sigma^{0}_{*э} = \sigma_{д.п}. \qquad (25)$$

Очевидно, что при температурно-силовых воздействиях на тело, при которых $U^{0}\sigma^{0}_{*э} < \sigma_{д.п}$, его состояние является безопасным, и исчерпание несущей способности наступает при $U^{0}\sigma^{0}_{*э} = \sigma_{д.п}$. Необходимо учитывать, что для равномерно нагретого тела обеспечение выполнения условий (23) или (25) во всех его точках во многих случаях есть практически неразрешимая задача. В связи с этим приходится требовать выполнения этих условий на отдельных частях тела или в его опасных сечениях.

Впервые, по-видимому, определение предельного состояния тела сформулировано в работах [6, 14] без соответствующей математической его трактовки. Поэтому представляется целесообразным установить соответствие этого определения условиям (23) и (25). В [6, 14] под предельным состоянием понимается "... такое статически допустимое напряженное состояние равномерно нагретого тела, при котором величина эквивалентного напряжения по опасному сечению постоянна. В случае переменной по сечению температуры величина эквивалентного напряжения в предельном состоянии такова, что время разрушения во всех точках опасного сечения одинаково". Очевидно, что это определение полностью согласуется с условиями (23), (25).

На основании вышеизложенного сформулируем методику расчета элементов конструкций по предельному состоянию. Методика сводится к расчету напряженно-деформированного состояния тела (элемента конструкции) в предположении установившейся ползучести материала с последующим наложением ограничений на поле напряжений в соответствии с условиями предельного состояния (23) или (25), если тело равномерно нагрето. Эти условия позволяют определить предельные значения внешних температурно-силовых воздействий, обеспечивающих равнопрочность тела в любой момент времени вплоть до исчерпания несущей способности.

В качестве примера вычислим предельные температурно-силовые воздействия, обеспечивающие равнопрочность толстостенной трубы вплоть до исчерпания несущей способности. Труба находится под действием стационарного внутреннего давления p и плоского осесимметричного температурного поля $\theta(\rho)$, причем [12]

$$\theta(\rho) = \theta(a) + \bar{\theta}\ln\rho, \qquad 1 \le \rho = r/a \le \beta_1,$$

где $\bar{\theta} = [\theta(b) - \theta(a)]/\ln\beta_1$; $\beta_1 = b/a$; a, b, r – соответственно внутренний, наружный и текущий радиусы трубы.

Решение задачи, связанное с расчетом напряженно-деформированного состояния толстостенной неравномерно нагретой трубы, находящейся под внутренним давлением, известно [3]. Это отмечалось в сообщении 1 [1]. В частности, если в (1) и (2) положить $\sigma_э = \sigma_i$, $\sigma_{*э} = \sigma_i$, $B_1 = B_0\exp(c\theta)$, $B_2 = k_0 B_1$, то поле напряжений в поперечном сечении трубы будет:

$$\sigma_r^0 = \frac{p}{\beta_1^{2/n_*} - 1}\left[1 - \left(\frac{\beta_1}{\rho}\right)^{2/n_*}\right]; \qquad \sigma_\varphi^0 = \frac{p}{\beta_1^{2/n_*} - 1}\left[1 - \frac{n_* - 2}{n_*}\left(\frac{\beta_1}{\rho}\right)^{2/n_*}\right];$$
$$\sigma_z^0 = \frac{p}{\beta_1^{2/n_*} - 1}\left[1 - \frac{n_* - 1}{n_*}\left(\frac{\beta_1}{\rho}\right)^{2/n_*}\right]; \qquad \sigma_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{J_1}\rho^{-2/n_*}; \tag{26}$$

$$J_1 = \frac{n_*}{2}\frac{\beta_1^{2/n_*} - 1}{\beta_1^{2/n_*}}; \qquad \frac{2}{n_*} = \frac{2 + c\bar{\theta}}{n}.$$

Поле напряжений (26) должно удовлетворять условию предельного состояния (23). Выбор в качестве базовой, например, температуры на внутреннем радиусе $\theta_0 = \theta(a)$ приводит к функции U^0 (23) в виде $U^0 = \rho^{c\bar{\theta}/(g+1)}$. С учетом этого и (26) условие предельного состояния запишем в виде

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{J_1}\rho^{-\kappa} = \sigma_{\text{д.п}}, \qquad \kappa = \frac{2(g+1) - (n - g - 1)c\bar{\theta}}{n(g+1)}.$$

Это условие должно выполняться одновременно во всех точках поперечного сечения трубы, что равносильно требованию $\kappa = 0$. При обозначении предельного давления p_{**} и предельного перепада температуры по радиусу трубы $\bar{\theta}_*$ получим

$$c\bar{\theta}_* = \frac{2(g+1)}{n - (g+1)}, \qquad \frac{p_{**}}{\sigma_{\text{д.п}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}J_1. \tag{27}$$

Если труба равномерно нагрета, то $\theta = 0$, $n_* = n$, и условие предельного состояния (25) с учетом (26) будет

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{p}{J_1}\rho^{-2/n} = \sigma_{\text{д.п}}, \qquad J_1 = \frac{n}{2}\frac{\beta_1^{2/n} - 1}{\beta_1^{2/n}}.$$

Для выполнения полученного равенства одновременно во всех точках поперечного сечения трубы необходимо показатель ползучести устремить к бесконечности:

$$\bar{\theta}_* = 0, \qquad \frac{p_{**}}{\sigma_{\text{д.п}}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\ln\beta_1. \tag{28}$$

Таким образом, (27) или (28) есть предельные внешние температурно-силовые воздействия на трубу, обеспечивающие ее равнопрочность вплоть до исчерпания несущей способности.

Выше отмечалось, что требование одновременного обеспечения предельного состояния во всех точках тела часто невыполнимо, т.е., например, внешние температурно-силовые воздействия могут задаваться так, что тело не будет равнопрочным. Поэтому целесообразно сформулировать условие, выполнение которого на стадии проектирования приближало бы тело к равнопрочному. Равнопрочное означает, что в таком теле за наперед заданное из условий эксплуатации время t_{**} должно накопиться в процессе ползучести материала как можно больше повреждений, т.е. на момент t_* "остаточный ресурс" при заданных внешних температурно-силовых воздействиях должен быть минимальным. Ассоциируя этот "ресурс" с параметром $\mu(x_k, t)$, условие приближения тела к равнопрочному запишем в виде

$$\int_V \mu(x_k, t_*) dV \to \min.$$

Задача проектирования "почти равнопрочных" элементов конструкций решена в [15]. В случае если условие (23) выполняется в одной наиболее нагруженной точке тела, такой расчет будем называть расчетом по допускаемым внешним температурно-силовым воздействиям.

Работа выполнена в рамках программы INTAS, грант № 03-51-6046.

Р е з ю м е

Для довільного тіла (елемента конструкції), що зазнає стаціонарного зовнішнього температурно-силового навантаження, отримано з використанням кінетичної теорії повзучості Работнова умову граничного стану, за якої забезпечується його рівноміцність майже до вичерпування несучої здатності. Представлено методику розрахунку елементів конструкцій по граничному стану. Для випадку, якщо умова граничного стану виконується тільки на окремих частинах поверхні тіла, викладено методику розрахунку його напружено-деформованого стану за максимального наближення до рівноміцного.

1. *Никитенко А. Ф., Любашевская И. В.* Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщ. 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб // Пробл. прочности. – 2005. – № 5. – С. 30 – 44.
2. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
3. *Качанов Л. М.* Время разрушения в условиях ползучести // Пробл. механики сплошной среды. Сб. науч. тр. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 186 – 201.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
5. *Работнов Ю. Н.* Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 36 – 41.
6. *Милейко С. Т.* Оценки долговечности в условиях ползучести // Там же. – 1968. – № 5. – С. 82 – 87.

7. *Немировский Ю. В.* Об учете веса при проектировании конструкций в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 4. – С. 113 – 123.
8. *Никитенко А. Ф.* О напряженном состоянии в оптимальных по долговечности конструкциях // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. Ин-та гидродинамики СО АН СССР. – 1975. – Вып. 22. – С. 239 – 246.
9. *Никитенко А. Ф.*, *Заев В. А.* Об экспериментальном обосновании эквивалентной термосиловой поверхности в смысле процесса повреждаемости материала и длительности до разрушения // Пробл. прочности. – 1979. – № 3. – С. 5 – 10.
10. *Никитенко А. Ф.* Определение внешних температурно-силовых полей для равнопрочных в процессе ползучести элементов конструкций // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1982. – № 5. – С. 142 – 145.
11. *Никитенко А. Ф.* Определение критического числа оборотов для равнопрочного в процессе ползучести диска // Пробл. прочности. – 1982. – № 8. – С. 15 – 18.
12. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 308 с.
13. *Писаренко Г. С.*, *Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
14. *Работнов Ю. Н.*, *Милейко С. Т.* Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
15. *Заев В. А.*, *Никитенко А. Ф.* Расчет и проектирование оптимальных по долговечности элементов конструкций // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1987. – № 3. – С. 165 – 171.

Поступила 06. 04. 2005