

УДК 532.59

## ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

И. Т. СЕЛЕЗОВ\*, О. В. АВРАМЕНКО\*\*, Ю. В. ГУРТОВЫЙ\*\*

\* Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

\*\* Кировоградский государственный педуниверситет

Получено 22.08.2004

Исследуется распространение волновых пакетов на поверхности контакта двух жидких слоев с различными свойствами с учетом поверхностного натяжения. Методом многомасштабных разложений получено эволюционное уравнение в третьем приближении. Анализируется структура волнового пакета и проведено сравнение с аналогичными волновыми пакетами в системах "полупространство - полупространство" и "слой - полупространство". Исследуется форма волнового пакета, а также условия резонанса второй гармоники. Представлены условия распространения волновых пакетов:  $\Omega$ -образной и  $U$ -образной форм и установлены характерные особенности резонансной области для системы "слой - слой".

Досліджується поширення хвильових пакетів на поверхні контакту двох рідинних шарів з різними властивостями з урахуванням поверхневого натягу. Методом багатомасштабних розв'язків отримано еволюційне рівняння у третьому наближенні. Аналізується структура хвильового пакету і проведено порівняння з аналогічними хвильовими пакетами у системах "півпростір - півпростір" та "шар - півпростір". Досліджено форму хвильового пакету, а також умови резонансу другої гармоніки. Представлено умови поширення хвильових пакетів:  $\Omega$ -образної і  $U$ -образної форм і установлені характерні особливості резонансної області для системи "шар - шар".

Propagation of wave-packet at the interface of two layers of different properties is investigated with accounting of the surface tension. Using the method of multiple scale expansions the evolution equation is obtained in the third approximation. The structure of wave packets is analyzed and the comparison with analogous packets in the systems "half-space - half-space" and "layer - half-space" is carried out. The form of wave-packet and condition of the second harmonic resonance are investigated. The conditions of wave packet propagation of the  $\Omega$ -form and  $U$ -form are presented and the characteristic features of resonant region for the system "layer-layer" are found.

### ВВЕДЕНИЕ

Изучение нелинейных волновых процессов в многослойных и стратифицированных средах представляет большой общезначимый и прикладной интерес и является предметом многочисленных исследований. Внутренние волны в системах, состоящих из жидкостей с разными свойствами, относятся к гидродинамическим задачам указанного класса. Внутренние волны большой амплитуды, которые эффективно поддерживают свою форму на больших расстояниях при их распространении, часто наблюдаются в атмосфере и океане. Это легко воспроизводится и в экспериментах.

Нелинейность и дисперсия – два фундаментальных механизма при распространении гравитационных волн в жидкостях. Хорошо известно, что нелинейность имеет тенденцию к укрупнению формы волны, в то время как дисперсия – это противоположный эффект, имеющий тенденцию сглаживания формы волны, т. е. уменьшения градиентов волновой поверхности. Наиболее замечательное явление наблюдается при балансе этих эффектов, когда формируется уединенная волна (солитон), распространяющаяся без изменения фор-

мы. Солитон характеризуется тремя свойствами: перманентностью – постоянством формы при распространении, инвариантностью по отношению к соударениям и устойчивостью.

В случае двухслойной жидкости, когда верхняя и нижняя жидкости конечной глубины, появляется еще один параметр – отношение глубин  $h_2/h_1$ . Этот параметр может существенно влиять на баланс нелинейных и дисперсионных эффектов и, следовательно, на устойчивость и эволюцию волновых пакетов при их распространении вдоль поверхности раздела.

Большие трудности математического характера, встречающиеся при решении задач точной волновой теории, приводят к необходимости развития различного рода приближенных нелинейных теорий. В результате интенсивно развивались асимптотические подходы, и они по существу доминируют в проведении количественного и качественного анализа явлений. Широкое распространение получили различные варианты асимптотических подходов Буссинеска, Кортвега и де Вриза, Фридрикса, Захарова и др.

Современная теория солитонных решений в значительной степени опирается на классические решения, полученные в рамках приближенных

моделей поверхностных волн на неограниченной жидкости, а также на новые результаты, полученные при решении проблем обоснования приближенных моделей. В работе [1] дан обзор состояния исследований нелинейных безвихревых поверхностных гравитационных волн в жидкости бесконечной глубины. Общие положения и подходы к физико-математическому моделированию и решению нелинейных волновых задач изложены в [2]. Исследование установившихся волн предоставляет возможность получить важный результат в решении нелинейных задач о существовании двумерных периодических прогрессивных волн [3]. В точной теории неустановившихся волновых движений получены результаты, относящиеся к реализации картин волновых движений для малых или больших значений времени, которые всесторонне освещены в монографии [4].

Метод многомасштабных разложений был успешно применен Г. Хасимото и Г. Оно [5] для получения нелинейного уравнения Шредингера, описывающего эволюцию гравитационных волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности жидкого слоя. Отметим некоторые из работ, внесших существенный вклад в изучение указанной проблемы: Г. Сегур и Дж. Хаммак [6], Г. Йен и Б. Лейк [7], М. Абловиц и Г. Сегур [8], Дж. Уизем [9], П. Бхатнагар [10], Г. Ламб [11], И. Т. Селезов и С. В. Корсунский [12, 13]. Значительное количество публикаций, например, [14–16] посвящается распространению волновых пакетов в жидких средах с учетом поверхностного натяжения. При рассмотрении больших волн в океане в некоторых случаях поверхностным натяжением можно пренебречь, однако для экспериментальных исследований двухслойных систем в лабораторных условиях фактор поверхностного натяжения играет значительную роль. Различные аспекты проблемы нелинейных внутренних волн освещены в работах, опубликованных в последнее время, [17–23].

Статья Найфэ [24] содержит обстоятельный анализ волновых движений на поверхности контакта двух полубесконечных жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Аналогичная задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта жидкого полупространства и жидкого слоя над ним изучалась в [25], где обсуждалась проблема устойчивости волновых пакетов в системе "слой - полупространство" методом многомасштабных разложений до третьего порядка, а также в [26] для случая малых частот. В статьях, опубликованных в последнее время, рассмотрены различные аспекты четвертого приближения проблемы эволюции нелинейных волновых па-

кетов, такие как эволюционное уравнение при околокритических волновых числах [27, 28], эволюционное уравнение при волновых числах, далеких от критического [29–31], исследование устойчивости решений указанных уравнений [32, 33]. Области резонанса второй гармоники, направление распространения волн, форма волнового пакета в системе "слой - полупространство" описаны в статье [34]. Отметим также работы [35–40].

В настоящей статье проведено исследование аналогичных особенностей распространения волновых пакетов в системе, состоящей из двух жидких слоев. Проведено сравнение с ранее полученными результатами для систем "слой - полупространство" и "полупространство - полупространство".

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Исследуется задача о распространении двумерных волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности контакта двух жидких слоев  $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 \leq z < 0\}$  и  $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$  с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно. Учитывается сила поверхностного натяжения. Сила тяжести перпендикулярна к поверхности контакта в направлении, противоположном к вертикальной оси  $z$  (рис. 1). Жидкости считаются несжимаемыми.

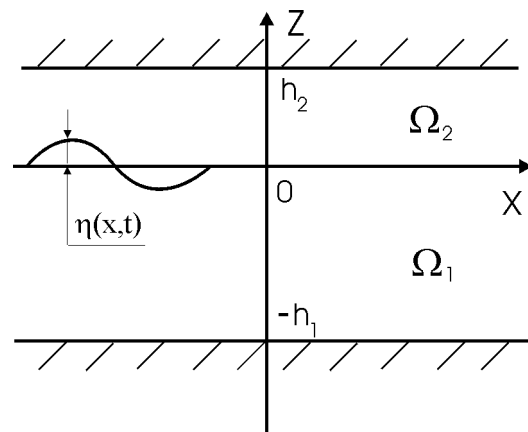


Рис. 1. Постановка задачи

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в } \Omega_j, \quad (1)$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{,x} \quad \text{на } z = \eta(x, t), \quad (2)$$

$$\varphi_{1,t} - \rho \varphi_{2,t} + (1 - \rho) \eta + \frac{1}{2} \left[ (\nabla \varphi_1)^2 - \rho (\nabla \varphi_2)^2 \right] - T (1 + \eta_{,x}^2)^{-3/2} \eta_{,xx} = 0 \quad \text{на } z = \eta(x, t), \quad (3)$$

$$\varphi_{1,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1, \quad (4)$$

$$\varphi_{2,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2, \quad (5)$$

где  $j = 1, 2$ ;  $\rho = \rho_2/\rho_1$  – отношение плотностей;  $\eta(x, t)$  – отклонение поверхности от ее невозмущенного состояния  $z = 0$ .

Безразмерные величины введены с помощью характерной длины  $L$ ; характерного времени  $(L/g)^{1/2}$ ; плотности нижней жидкости  $\rho_1$ ; ускорения свободного падения  $g$ . Безразмерный коэффициент поверхностного натяжения при этом имеет вид  $T^* = T/(L^2 \rho g)$  (звездочка опущена).

Для определения приближенного решения задачи (1)–(5) для малых, но конечных амплитуд, применим метод многомасштабных разложений [41]:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\varepsilon^4), \quad (6)$$

$$\phi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^3 \varepsilon^n \phi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\varepsilon^4), \quad (7)$$

где  $\varepsilon$  – малый безразмерный параметр;  $x_n = \varepsilon^n x$ ;  $t_n = \varepsilon^n t$  – масштабные переменные.

Подставляя выражения (6)–(7) в (1)–(5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях  $\varepsilon$ , получаем:

порядок  $\varepsilon$

$$\phi_{j1,x_0x_0} + \phi_{j1,zz} = 0, \quad (8)$$

$$\eta_{1,t_0} - \phi_{j1,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \quad (9)$$

$$\phi_{11,t_0} - \rho \phi_{21,t_0} + (1 - \rho)\eta_1 - T\eta_{1,x_0x_0} = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \quad (10)$$

$$\phi_{11,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = -h_1, \quad (11)$$

$$\phi_{21,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = h_2, \quad (12)$$

порядок  $\varepsilon^2$

$$\phi_{j2,x_0x_0} + \phi_{j2,zz} = -2\phi_{j1,x_0x_1}, \quad (13)$$

$$\eta_{2,t_0} - \phi_{j2,z} = \eta_1 \phi_{j1,zz} - \eta_{1,t_1} - \phi_{j1,x_0} \eta_{1,x_0} \quad \text{на} \quad z = 0, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \phi_{12,t_0} - \rho \phi_{22,t_0} + (1 - \rho)\eta_2 - T\eta_{2,x_0x_0} = \\ = -\phi_{11,t_1} + \rho \phi_{21,t_1} + 2T\eta_{1,x_0x_1} - \\ - 0.5(\phi_{11,x_0}^2 + \phi_{11,z}^2) + 0.5\rho(\phi_{21,x_0}^2 + \phi_{21,z}^2) - \\ - \eta_1 \phi_{11,t_0z} + \rho \eta_1 \phi_{21,t_0z} \quad \text{на} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\phi_{12,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = -h_1, \quad (16)$$

$$\phi_{22,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = h_2, \quad (17)$$

порядок  $\varepsilon^3$

$$\begin{aligned} \phi_{j3,x_0x_0} + \phi_{j3,zz} = \\ = -2\phi_{j1,x_0x_2} - 2\phi_{j2,x_0x_1} - \phi_{j1,x_1x_1}, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \eta_{3,t_0} - \phi_{j3,z} = -\eta_{1,t_2} - \eta_{2,t_1} + \eta_1 \phi_{j2,zz} + \eta_2 \phi_{j1,zz} + \\ + 0.5\eta_1^2 \phi_{j1,zzz} - \phi_{j1,x_0} \eta_{2,x_0} - \phi_{j2,x_0} \eta_{1,x_0} - \phi_{j1,x_1} \eta_{1,x_0} - \\ - \phi_{j1,x_0} \eta_{1,x_1} - \eta_1 \phi_{j1,x_0z} \eta_{1,x_0} \quad \text{на} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \phi_{13,t_0} - \rho \phi_{23,t_0} + (1 - \rho)\eta_3 - T\eta_{3,x_0x_0} = \\ = -(\phi_{11,t_2} + \phi_{12,t_1}) + \rho(\phi_{21,t_2} + \phi_{22,t_1}) + \\ + 2T(\eta_{1,x_0x_2} + \eta_{2,x_0x_1}) + T\eta_{1,x_1x_1} - \\ - (\phi_{11,x_0} \phi_{12,x_0} + \phi_{11,x_0} \phi_{11,x_1} + \eta_1 \phi_{11,x_0} \phi_{11,x_0z}) + \\ + \rho(\phi_{21,x_0} \phi_{22,x_0} + \phi_{21,x_0} \phi_{21,x_1} + \eta_1 \phi_{21,x_0} \phi_{21,x_0z}) - \\ - (\phi_{11,z} \phi_{12,z} + \eta_1 \phi_{11,z} \phi_{11,zz}) + \\ + \rho(\phi_{21,z} \phi_{22,z} + \eta_1 \phi_{21,z} \phi_{21,zz}) - \\ - (\eta_2 \phi_{11,t_0z} + \eta_1 \phi_{12,t_0z} + 0.5\eta_1^2 \phi_{11,t_0zz}) + \\ + \rho(\eta_2 \phi_{21,t_0z} + \eta_1 \phi_{22,t_0z} + 0.5\eta_1^2 \phi_{21,t_0zz}) - \\ - \eta_1 \phi_{11,t_1z} + \rho \eta_1 \phi_{21,t_1z} - 1.5T\eta_{1,x_0x_0} \eta_{1,x_0}^2 \quad \text{на} \quad z = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

$$\phi_{13,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = -h_1, \quad (21)$$

$$\phi_{23,z} = 0 \quad \text{на} \quad z = h_2. \quad (22)$$

Таким образом, получены линейные задачи первых трех приближений относительно неизвестных функций  $\eta_1, \phi_{11}, \phi_{21}, \eta_2, \phi_{12}, \phi_{22}, \eta_3, \phi_{13}, \phi_{23}$ , которые являются слагаемыми в многомасштабных разложениях потенциалов  $\phi_1, \phi_2$  (7) и в разложении отклонения поверхности контакта жидкостей с различными свойствами  $\eta$  (6). Решение задачи первого порядка (8)–(12) ищется в виде бегущих волн

$$\eta_1 = A \exp i\theta + \bar{A} \exp(-i\theta), \quad (23)$$

$$\phi_{11} = -i \frac{\omega}{k} [A \exp i\theta - \bar{A} \exp(-i\theta)] \frac{\text{ch}k(h_1+z)}{\text{sh}kh_1}, \quad (24)$$

$$\phi_{21} = i \frac{\omega}{k} [A \exp i\theta - \bar{A} \exp(-i\theta)] \frac{\text{ch}k(h_2-z)}{\text{sh}kh_2}, \quad (25)$$

где  $\bar{A}$  – величина, сопряженная комплексной огибающей волнового пакета  $A$ ;  $\theta = kx_0 - \omega t_0$ ;  $k$  – волновое число и  $\omega$  – частота центра волнового пакета. Подстановка решений (23)–(25) в (10) приводит к дисперсионному уравнению

$$\omega^2 = \frac{k(1 - \rho + Tk^2)}{\text{cth}kh_1 + \rho \text{csth}kh_2}. \quad (26)$$

Как и в случае распространения волн вдоль поверхности контакта двух полупространств [28], а также в системе "слой - полупространство" [33], в рассматриваемой системе "слой - слой" поверхность контакта линейно устойчива или неустойчива в зависимости от того, является  $k$  больше

или меньше критического волнового числа  $k_c = [(\rho - 1)/T]^{1/2}$ .

Подставляя решения (23)–(25) в задачу второго порядка (13)–(17), приходим к системе

$$\phi_{12,x_0x_0} + \phi_{12,zz} = -2\omega A_{,x_1} \frac{\text{chk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} \exp i\theta + cc, \quad (27)$$

$$\phi_{22,x_0x_0} + \phi_{22,zz} = 2\omega A_{,x_1} \frac{\text{chk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} \exp i\theta + cc, \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \eta_{2,t_0} - \phi_{12,z} &= \quad (29) \\ &= -A_{,t_1} \exp i\theta - 2i\omega k A^2 \text{cthh}_1 \exp 2i\theta + cc \text{ на } z=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{2,t_0} - \phi_{22,z} &= \quad (30) \\ &= -A_{,t_1} \exp i\theta + 2i\omega k A^2 \text{cthh}_2 \exp 2i\theta + cc \text{ на } z=0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{12,t_0} - \rho\phi_{22,t_0} + (1-\rho)\eta_2 - T\eta_{2,x_0x_0} &= \quad (31) \\ &= i[2TkA_{,x_1} + \frac{\omega}{k}(\text{cthh}_1 + \rho\text{cthh}_2)A_{,t_1}] \exp i\theta + \\ &+ \omega^2 [2 - \text{cthh}_1 \text{cthh}_2 - \rho(2 - \text{cthh}_2 \text{cthh}_1)] \times \\ &\times A^2 \exp 2i\theta + 1 - \text{cthh}_1 - \rho(1 - \text{cthh}_2) + cc \\ &\text{на } z=0, \end{aligned}$$

где  $cc$  означает комплексно сопряженную величину к предшествующим слагаемым.

Частное решение системы (27)–(31), записанное через неизвестные коэффициенты, подставляем в дифференциальные уравнения (27) и (28) и в граничные условия (29)–(31), далее приравниваем выражения при одинаковых функциях, что приводит к двум независимым системам относительно неопределенных коэффициентов. Система, полученная после приравнивания выражений при функции  $\exp i\theta$ , является несовместной, причем ее условие разрешимости имеет вид

$$\begin{aligned} 2(\text{cthh}_1 + \rho\text{cthh}_2) \frac{\omega}{k} A_{,t_1} + \quad (32) \\ + \left[ 2Tk + \left( \frac{\omega}{k} \right)^2 (\text{cthh}_1 - kh_1(1 - \text{cthh}_1) + \right. \\ \left. + \rho(\text{cthh}_2 - kh_2(1 - \text{cthh}_2))) \right] A_{,x_1} = 0. \end{aligned}$$

Частное решение задачи второго порядка можно записать в виде

$$\eta_2 = \frac{\omega^2(1 - \text{cthh}_1 - \rho(1 - \text{cthh}_2))}{1-\rho} A\bar{A} + \quad (33) \\ + \Lambda A^2 \exp 2i\theta + cc,$$

$$\phi_{12} = \frac{1}{k} \left[ \left( \frac{\omega}{k} (1 + kh_1 \text{cthh}_1) A_{,x_1} \right) \frac{\text{chk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} + \right.$$

$$\left. + A_{,t_1} - \omega(z+h_1) A_{,x_1} \frac{\text{shk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} \right] \exp i\theta + \quad (34)$$

$$+ i \frac{\omega}{k} [k \text{cthh}_1 - \Lambda] A^2 \frac{\text{ch}2k(h_1+z)}{\text{sh}2kh_1} \exp 2i\theta + cc,$$

$$\begin{aligned} \phi_{22} = -\frac{1}{k} \left[ \left( \frac{\omega}{k} (1 + kh_2 \text{cthh}_2) A_{,x_1} \right) \frac{\text{chk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} + \right. \\ \left. + A_{,t_1} + \omega(z-h_2) A_{,x_1} \frac{\text{shk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} \right] \exp i\theta + \quad (35) \end{aligned}$$

$$+ i \frac{\omega}{k} [k \text{cthh}_2 + \Lambda] A^2 \frac{\text{ch}2k(h_2-z)}{\text{sh}2kh_2} \exp 2i\theta + cc,$$

где

$$\Lambda = \frac{(1.5 \text{cthh}_1 - 0.5 - \rho(1.5 \text{cthh}_2 - 0.5)) \omega^2}{2\omega^2(\text{cthh}_1 + \rho\text{cthh}_2) - k(1 - \rho + 4Tk^2)}. \quad (36)$$

Обратимся к выводу условия разрешимости задачи третьего приближения. Сначала подставим решения первого (23)–(25) и второго порядка (33)–(36) в задачу третьего приближения (18)–(22). В результате получаем

$$\begin{aligned} \phi_{13,x_0x_0} + \phi_{13,zz} = \left[ -2\omega A_{,x_2} \frac{\text{chk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} - \right. \\ \left. - 2iA_{,t_1x_1} \frac{\text{chk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} - \right. \\ \left. - i \frac{\omega}{k} [1 + 2kh_1 \text{cthh}_1] A_{,x_1x_1} \frac{\text{chk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} + \right. \\ \left. + 2i\omega(z+h_1) A_{,x_1x_1} \frac{\text{shk}(h_1+z)}{\text{shkh}_1} \right] \exp i\theta + \\ + 8\omega(k \text{cthh}_1 - \Lambda) \frac{\text{ch}2k(h_1+z)}{\text{sh}2kh_1} A A_{,x_1} \exp 2i\theta + \\ + cc \text{ в } \Omega_1, \quad (37) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{23,x_0x_0} + \phi_{23,zz} = \left[ 2\omega A_{,x_2} \frac{\text{chk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} + \right. \\ \left. + 2iA_{,t_1x_1} \frac{\text{chk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} + \right. \\ \left. + i \frac{\omega}{k} [1 + 2kh_2 \text{cthh}_2] A_{,x_1x_1} \frac{\text{chk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} + \right. \\ \left. + 2i\omega(z-h_2) A_{,x_1x_1} \frac{\text{shk}(h_2-z)}{\text{shkh}_2} \right] \exp i\theta + \\ + 8\omega(k \text{cthh}_2 + \Lambda) \frac{\text{ch}2k(h_2-z)}{\text{sh}2kh_2} A A_{,x_1} \exp 2i\theta + \\ + cc \text{ в } \Omega_2, \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{3,t_0} - \phi_{13,z} = & \\ = & \left\{ -A_{,t_2} - i\omega k [3(2\text{cth}kh_1\text{cth}2kh_1 - 1.5)k + \right. \\ & \left. + \frac{\omega^2\text{cth}kh_1(1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))}{1-\rho} \right\} + \\ & + (\text{cth}kh_1 + 2\text{cth}2kh_1)\Lambda A^2\bar{A} \Big\} \exp i\theta + \\ & + \left\{ 2(k\text{cth}kh_1 - \Lambda)AA_{,t_1} - \right. \\ & \left. - 2\omega[\text{cth}kh_1 + kh_1(1 - \text{cth}^2kh_1)]AA_{,x_1} \right\} \exp 2i\theta + \\ & + 1.5k\omega i [k(4\text{cth}2kh_1\text{cth}kh_1 - 1) - \\ & - 2\Lambda(\text{cth}kh_1 + 2\text{cth}2kh_1)]A^3 \exp 3i\theta - \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} & - 2\omega\text{cth}kh_1\bar{A}A_{,x_1} - \\ & - \frac{\omega^2(1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))}{1-\rho}\bar{A}A_{,t_1} + cc \\ & \text{на } z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{3,t_0} - \phi_{23,z} = & \\ = & \left\{ -A_{,t_2} - i\omega k [(2\text{cth}kh_2\text{cth}2kh_2 - 1.5)k - \right. \\ & \left. - \frac{\omega^2(1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))}{1-\rho}\text{cth}kh_2 + \right. \\ & \left. + (\text{cth}kh_2 + 2\text{cth}2kh_2)\Lambda A^2\bar{A} \right\} \exp i\theta + \\ & + \left\{ -2(k\text{cth}kh_2 + \Lambda)AA_{,t_1} + \right. \\ & \left. + 2\omega[\text{cth}kh_2 + kh_2(1 - \text{cth}^2kh_2)]AA_{,x_1} \right\} \exp 2i\theta + \\ & + 1.5k\omega i [k(4\text{cth}2kh_2\text{cth}kh_2 - 1) + \\ & + 2\Lambda(\text{cth}kh_2 + 2\text{cth}2kh_2)]A^3 \exp 3i\theta + \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & + 2\omega\text{cth}kh_2\bar{A}A_{,x_1} - \\ & - \frac{\omega^2(1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))}{1-\rho}\bar{A}A_{,t_1} + cc \\ & \text{на } z = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{13,t_0} - \rho\phi_{23,t_0} + (1 - \rho)\eta_3 - T\eta_{3,x_0x_0} = & \\ = & \left\{ [3 - 2\text{cth}kh_1\text{cth}2kh_1 - \right. \\ & - \rho(3 - 2\text{cth}kh_2\text{cth}2kh_2)]\omega^2\Lambda - \\ & - 2.5[\text{cth}kh_1 + 0.8\text{cth}kh_2(1 - \text{cth}kh_1\text{cth}2kh_1) + \\ & + \rho\text{cth}kh_2 + \\ & + 0.8\rho\text{cth}kh_2(1 - \text{cth}kh_2\text{cth}2kh_2)]\omega^2k + 1.5Tk^4 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \omega^4((1 - \text{cth}^2kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2kh_2))]A^2\bar{A} + \\ & + k^{-1}(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2)(i\omega A_{,t_2} - A_{,t_1t_1}) - \\ & - \omega k^{-1}[(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2)k^{-1} - \\ & - h_1(\text{cth}^2kh_1 - 1) - \rho h_2(\text{cth}^2kh_2 - 1)]A_{,t_1x_1} + \\ & + 2iTkA_{,x_2} + TA_{,x_1x_1} \Big\} \exp i\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left\{ [2\omega\Lambda ik^{-1}(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2) - \right. \\ & - i\omega(\text{cth}^2kh_1 - 3 + 2\text{cth}kh_1\text{cth}2kh_1) + \\ & + i\omega\rho(\text{cth}^2kh_2 - 3 + 2\text{cth}kh_2\text{cth}2kh_2)]AA_{,t_1} + \\ & + [8iTk\Lambda + i\omega^2h_1\text{cth}kh_1(\text{cth}^2kh_1 - 1) + \\ & + i\rho\omega^2h_2\text{cth}kh_2(\text{cth}^2kh_2 - 1)]AA_{,x_1} \Big\} \exp 2i\theta + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left\{ -0.5[\text{cth}kh_1(11 - 4\text{cth}kh_1\text{cth}2kh_1) + \right. \\ & + \rho\text{cth}kh_1(11 - 4\text{cth}kh_2\text{cth}2kh_2)]k\omega^2 + \\ & + \omega^2\Lambda[7 - 2\text{cth}kh_1\text{cth}2kh_1 - \\ & - \rho(7 - 2\text{cth}kh_2\text{cth}2kh_2)] - 1.5Tk^4 \Big\} A^3 \exp 3i\theta - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - i\omega[(\text{cth}^2kh_1 - 1)(h_1\omega\text{cth}kh_1\bar{A}A_{,x_1} + \bar{A}A_{,t_1}) - \\ & - \rho(\text{cth}^2kh_2 - 1)(h_2\omega\text{cth}kh_2\bar{A}A_{,x_1} + \bar{A}A_{,t_1})] + \\ & + cc \text{ на } z = 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Как и во втором приближении, поскольку однородная часть задачи третьего порядка имеет нетривиальное решение, то неоднородная задача третьего порядка имеет решение тогда и только тогда, если выполняется условие разрешимости

$$\begin{aligned} & \frac{2i\omega}{k}(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2)A_{,t_2} + \\ & + i \left[ 2Tk + (\text{cth}kh_1 - kh_1(1 - \text{cth}^2kh_1) + \right. \\ & + \rho\text{cth}kh_2 - \rho kh_2(1 - \text{cth}^2kh_2))\frac{\omega^2}{k^2} \Big] A_{,x_2} - \\ & - \frac{1}{k}(\text{cth}kh_1 + \rho\text{cth}kh_2)A_{,t_1t_1} + \\ & + \left[ T - \frac{\omega^2}{k^3}[\text{cth}kh_1 - kh_1(1 - \text{cth}^2kh_1) - \right. \\ & - k^2h_1^2\text{cth}kh_1(1 - \text{cth}^2kh_1) + \\ & + \rho(\text{cth}kh_2 - kh_2(1 - \text{cth}^2kh_2) - \\ & - k^2h_2^2\text{cth}kh_2(1 - \text{cth}^2kh_2))] \Big] A_{,x_1x_1} - \\ & - \frac{2\omega}{k^2} \left[ \text{cth}kh_1 - kh_1(1 - \text{cth}^2kh_1) + \right. \\ & + \rho(\text{cth}kh_2 - kh_2(1 - \text{cth}^2kh_2))] A_{,x_1t_1} = \\ & = 2IA^2\bar{A}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$I = 0.5 \left\{ \Lambda \omega^2 [3\text{cth}^2 kh_2 - 1 - \rho(3\text{cth}^2 kh_2 - 1)] - \right. \\ \left. - 1.5Tk^4 + 2k\omega^2 [\text{cthh}h_1(3 - 2\text{cth}2kh_1\text{cthh}h_1) + \right. \\ \left. + \rho\text{cthh}h_2(3 - 2\text{cth}2kh_2\text{cthh}h_2)] + \right. \\ \left. + \frac{\omega^4}{(1-\rho)} (1 - \text{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2 kh_2))^2 \right\}. \quad (43)$$

Соотношения (32) и (42) связывают частные производные по масштабным переменным. Эту связь можно записать в более компактном виде, если в отдельности рассматривать два случая: на значительном отдалении от волнового числа  $k_c$  (то есть если  $\omega \gg 0$ ) и при волновых числах близких к критическому (то есть при  $\omega \approx 0$ ). Для упрощения условия разрешимости (32) задачи второго порядка продифференцируем (26) по  $k$  и получим

$$2\omega\omega'(\text{cthh}h_1 + \rho\text{cthh}h_2) + \\ + \omega^2(h_1(1 - \text{cth}^2 kh_1) + \rho h_2(1 - \text{cth}^2 kh_2)) = \\ = 1 - \rho + 3Tk^2, \quad (44)$$

где  $\omega' = d\omega/dk$  – групповая скорость. Итак, соотношение (32) может быть переписано в виде

$$A_{,t_1} + \omega' A_{,x_1} = 0. \quad (45)$$

Для упрощения условия разрешимости (42) задачи третьего порядка продифференцируем выражение (44) по  $k$ :

$$(\text{cthh}h_1 + \rho\text{cthh}h_2)\omega\omega'' = -(\text{cthh}h_1 + \rho\text{cthh}h_2)\omega'^2 - \\ - 2(h_1(1 - \text{cth}^2 kh_1) + \rho h_2(1 - \text{cth}^2 kh_2))\omega\omega' + \\ + (h_1^2\text{cthh}h_1(1 - \text{cth}^2 kh_1) + \\ + \rho h_2^2\text{cthh}h_2(1 - \text{cth}^2 kh_2))\omega^2 + 3Tk, \quad (46)$$

где  $\omega'' = d^2\omega/dk^2$ .

Используя полученные выражения (44) и (46) для производных  $\omega'$  и  $\omega''$ , перепишем условие разрешимости (42) в виде

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - 0.5i\omega'' A_{,x_1x_1} = \\ = -ik\omega^{-1}(\text{cthh}h_1 + \rho\text{cthh}h_2)^{-1}IA^2\bar{A}. \quad (47)$$

Домножим соотношения (45) и (47) на  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon^2$  соответственно и прибавим одно к другому. Учитывая известные выражения для частных производных  $A_{,t}$ ,  $A_{,x}$  и  $A_{,xx}$ , получаем искомое эволюционное уравнение

$$A_{,t} + \omega' A_{,x} - 0.5i\omega'' A_{,xx} = \\ = -i\varepsilon^2 k\omega^{-1}(\text{cthh}h_1 + \rho\text{cthh}h_2)^{-1}IA^2\bar{A}. \quad (48)$$

Таким образом, аналогично ранее рассмотренным задачам о распространении волновых пакетов вдоль поверхности контакта двух полуограниченных жидких сред и вдоль поверхности контакта слоя и полупространства, в представленной здесь новой задаче получено нелинейное уравнение Шредингера второго порядка.

После замены независимых переменных  $x$  и  $t$  на

$$\xi = x - \omega't, \quad \zeta = t \quad (49)$$

запишем эволюционное уравнение (48) в виде

$$A_{,\zeta} - 0.5i\omega'' A_{,\xi\xi} = i\varepsilon^2\omega^{-1}I_0A^2\bar{A}, \quad (50)$$

где  $I_0 = -k(\text{cthh}h_1 + \rho\text{cthh}h_2)^{-1}I$ .

Уравнение (50) дает такие решения, которые изменяются только с течением времени:

$$A = a \exp(i\varepsilon^2\omega^{-1}I_0a^2\zeta), \quad (51)$$

где  $a$  – постоянная. Заменяя  $A$  в выражениях (23) и (33) и далее подставляя результат в (6), несложно получить выражение для отклонения поверхности

$$\eta(x, t) = \varepsilon a \cos(kx - \hat{\omega}t) + \\ + \varepsilon^2 a^2 \left( \frac{\omega^2(1 - \text{cth}^2 kh_1 - \rho(1 - \text{cth}^2 kh_2))}{1-\rho} \right) + \\ + \Lambda \cos 2(kx - \hat{\omega}t) + O(\varepsilon^3), \quad (52)$$

где  $\hat{\omega} = \omega - \varepsilon^2\omega^{-1}a^2I_0$ . Выражение (52) не имеет смысла при  $\omega \rightarrow 0$  (вблизи волнового числа  $k_c$ ), а также при условии  $\Lambda \rightarrow \infty$ .

## 2. АНАЛИЗ ФОРМЫ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

Форма волнового пакета во втором приближении определяется формулой (52). Легко видеть, что для определения формы поверхности контакта  $\eta(x, t)$  важен знак величины  $\Lambda(\rho, k, h)$ , который изменяется при переходе через кривую  $L_1$ , вдоль которой  $\Lambda(\rho, k, h) = 0$ , или при переходе через кривую  $L_2$ , вдоль которой  $\Lambda(\rho, k, h) \rightarrow \infty$ . Учитывая формулу (36), уравнения этих кривых в неявной форме имеют вид

$$L_1 : \\ (1.5\text{cth}^2 kh_1 - 0.5 - \rho(1.5\text{cth}^2 kh_2 - 0.5))\omega^2 = 0, \quad (53)$$

$$L_2 : \\ 2\omega^2(\text{cth}2kh_1 + \rho\text{cth}2kh_2) - k(1 - \rho + 4Tk^2) = 0. \quad (54)$$

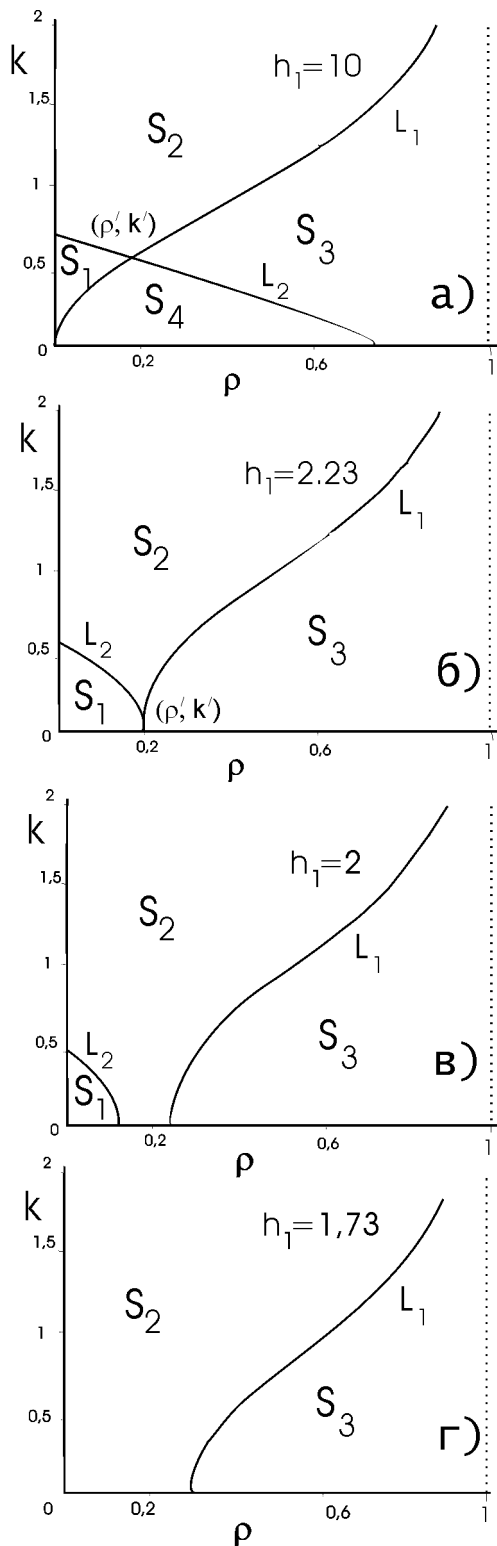


Рис. 2. Области с различной формой волн ( $S_1, S_3$  U-форма;  $S_2, S_4$  П-форма) при  $h_2 = 1$  и толщинах нижнего слоя: а -  $h_1 = 10$ , б -  $h_1 = 2.23$ , в -  $h_1 = 2$ , г -  $h_1 = 1.73$

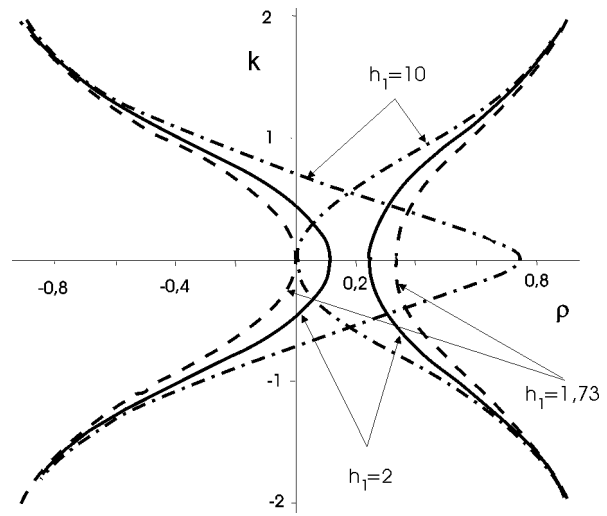


Рис. 3. Границы областей с различной формой волн при  $h_2 = 1$  и толщинах нижнего слоя  $h_1 = 10$  (штрих-пунктир),  $h_1 = 2$  (сплошная линия),  $h_1 = 1.73$  (штриховая)

Графики  $L_1$  и  $L_2$  изображены на рис. 2 при фиксированном значении толщины верхнего слоя  $h_2 = 1$  и при различных значениях толщины нижнего слоя.

При больших значениях  $h_1$  (например  $h_1 = 10$ ) кривые пересекаются и разделяют плоскость  $\rho, k$  на четыре области  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . В областях  $S_1$  и  $S_3$  имеет место волны с заостренными гребнями и затупленными подошвами, а в областях  $S_2$  и  $S_4$  – волны с затупленными гребнями и заостренными подошвами. Такое явление уже было отмечено в предельном случае при  $h_1 \rightarrow \infty$ , т. е. в системе "слой-полупространство" [42]. Следовательно, при больших значениях толщины нижнего слоя для капиллярно-гравитационных волн имеет место влияние поверхностного натяжения, выражающееся в стремлении сгладить волновую картину.

При уменьшении толщины нижнего слоя точка пересечения кривых  $L_1$  и  $L_2$  ( $\rho', k'$ ) опускается ниже и приблизительно при значении толщины  $h_1 = 2.23$  точка пересечения находится на горизонтальной координатной оси. Таким образом, областей с характерной формой остается три:  $S_1, S_2, S_3$ . Каждая из них имеет те же свойства, что и в случае больших толщин нижнего слоя. При еще большем уменьшении толщины нижнего слоя кривая  $L_2$  выходит за пределы первого квадранта плоскости  $(\rho, k)$ , что происходит приблизительно при  $h_1 = 1.73$ .

При малых толщинах нижнего слоя  $h_1 < 1.73$

остается лишь две области  $S_2, S_3$ . Это означает, что при значениях толщины нижнего слоя  $h_1 < 1.73$  и верхнего  $h_2 = 1$ , волновые пакеты принимают  $\cap$ -образную форму для обширной области  $S_2$ , и только в узкой области  $S_3$  имеют  $\cup$ -образную форму. Заметим, однако, что физическое значение в гидромеханике имеет узкая полоса, отвечающая отношению плотностей  $0.9 \leq \rho \leq 1$ , т. е. гравитационные волны на поверхности контакта двух слоев в натуральных условиях имеют  $\cup$ -образную форму, а капиллярные –  $\cap$ -образную форму.

Результаты, представленные выше, могут быть использованы при исследовании других слабонелинейных задач в других разделах прикладной математики и физики. На рис. 3 приводится вид кривых  $L_1$  и  $L_2$  при  $-2 < k < 2$  и  $-1 < \rho < 1$  для значения толщины верхнего слоя  $h_2 = 1$ , а нижнего  $h_1 = 10$ ,  $h_1 = 2$  и  $h_1 = 1.73$ .

### 3. РЕЗОНАНС ВТОРОЙ ГАРМОНИКИ

В окрестности кривой  $L_2$  возникает так называемый резонанс второй гармоники, когда амплитуда  $\eta_2(x, t)$ , равная  $0.5\varepsilon^2 a^2 \Lambda$ , возрастает по сравнению с амплитудой  $\eta_1(x, t)$ , равной  $\varepsilon a$ .

Ниже представлены кривые  $L_1$  и  $L_2$  при фиксированном значении толщины верхнего слоя  $h_2 = 1$  и различных значениях толщины нижнего слоя  $h_1$ . Показаны также окрестности кривой  $L_2$ , где значение величины  $\Lambda$  больше заданной величины ( $|\Lambda| > 1$  и  $|\Lambda| > 10$ ), т. е. области проявления резонанса второй гармоники.

Возможно несколько различных видов резонансной области.

На рис. 4 представлены области резонанса второй гармоники при значениях толщин слоев  $h_2 = 1, h_1 = 10$ . Как отмечено в предыдущем пункте, кривые  $L_1$  и  $L_2$  имеют точку пересечения  $(\rho', k')$ , где значение  $\Lambda$  неопределенно. Вдоль кривой  $L_2$  значение предела  $\lim \Lambda = \infty$ , причем при переходе через кривую  $L_2$  бесконечность меняет знак. Точка  $(\rho', k')$  является точкой соприкосновения четырех областей  $S_1, S_2, S_3, S_4$ . В как угодно малой ее окрестности существуют точки, принадлежащие каждой из четырех областей. Резонансной областью является окрестность кривой  $L_2$ , причем в точке  $(\rho', k')$  резонансная область стягивается к точке.

На рис. 5 представлена резонансная область при толщинах слоев  $h_2 = 1$  и  $h_1 = 2.23$ . Точка пересечения  $(\rho', k')$  кривых  $L_1$  и  $L_2$  в этом случае находится на прямой  $k = 0$ . В этой точке значение  $\Lambda$  также неопределенно, а значение преде-

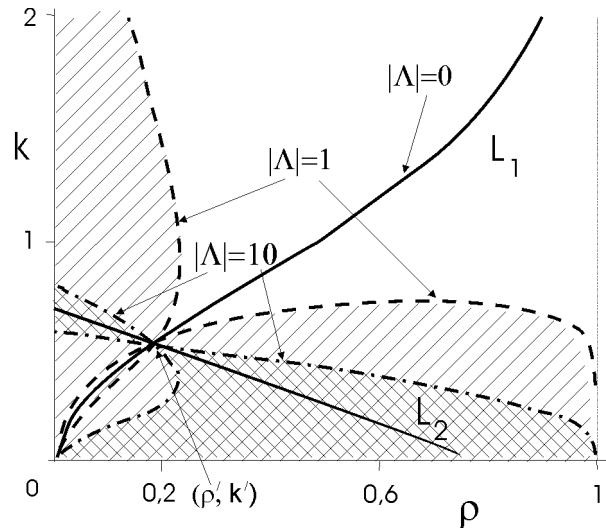


Рис. 4. Области резонанса второй гармоники при  $h_2 = 1, h_1 = 10$

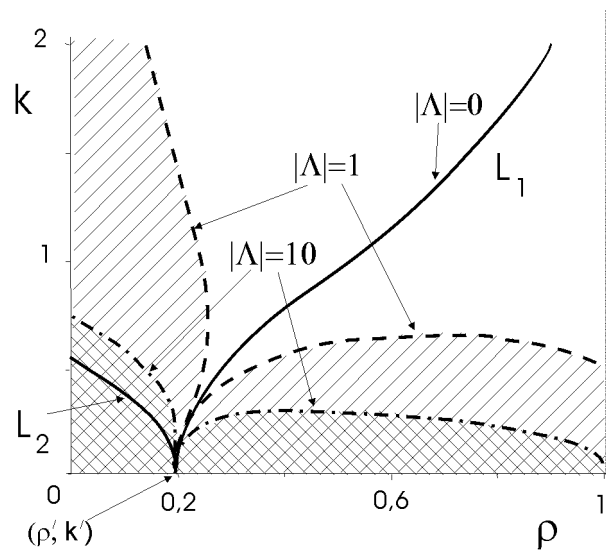


Рис. 5. Области резонанса второй гармоники при  $h_2 = 1, h_1 = 2.23$

ла  $\lim \Lambda = \infty$ . В как угодно малой окрестности точки  $(\rho', k')$  лежат точки, принадлежащие трем областям  $S_1, S_2, S_3$ . Резонансной областью является окрестность кривой  $L_2$ , ограниченная кривыми, соответствующими  $|\Lambda| = \text{const}$  и осями координат.

Случай малых толщин  $h_1 \leq 1.73$  отличается от предыдущего лишь тем, что кривая  $L_2$  уходит из первого квадранта, а резонансная область становится ограниченной снизу прямой  $k = 0$ , а сверху кривыми, вдоль которых  $\Lambda = 1$  и  $\Lambda = 10$ .



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта двух жидких слоев на основе метода многомасштабных разложений до третьего приближения.

Исследование формы волны на поверхности контакта двух слоев показало возможность образования волн различной формы: U-образной и П-образной. Установлено, что при больших величинах толщины нижнего слоя в случае капиллярно-гравитационных волн учет поверхностного натяжения приводит к сглаживанию волнового поля.

Обнаружены характерные особенности резонансной области в зависимости от отношения толщин слоев, в частности выявлены такие геометрические и гидродинамические параметры системы, когда резонансная область сужается и стягивается к точке.

Исследование поддерживается Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (Грант 01.07/00079)

1. Yuen H.C. Recent advances in nonlinear water waves. An overview // Proc. Int. Sch. Phys. "Enrico Fermi", Varenna, 26 July - 5 Aug., 1988. Course 109.- Bologna, Amsterdam etc., 1991.- P. 461-498.
2. Селезов И.Т. Моделирование волновых и дифракционных процессов в сплошных средах.- Киев: Наук. думка, 1989.- 204 с.
3. Некрасов А.И. Точная теория установившихся волн на поверхности тяжелой жидкости.- Москва: Из-во АН СССР, 1951.- 96 с.
4. Овсянников В.Л., Макаренко Н.И., Налимов В.И. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.- Новосибирск: Наука, 1985.- 318 с.
5. Hasimoto H., Ono H. Nonlinear modulation of gravity waves // J. of the Phys. Soc. of Japan.- 1972.- 33.- P. 805-811.
6. Segur H., Hammack J.L. Soliton models of long internal waves // J.Fluid Mech.- 1982.- 118.- P. 285-304.
7. Yuen H.C., Lake B.M. Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves // Advances in Appl. Mech.- New York, London.- 1982.- 22.- P. 33-45.
8. Ablowitz M.J., Segur H. Solutions and the inverse scattering transform.- SIAM: Philadelphia, 1981.- 210 p.
9. Уизем Дж.Б. Линейные и нелинейные волны.- М.: Мир, 1977.- 622 с.
10. Bhatnagar P.L. Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems.- Oxford: Clarendon Press, 1979.- 199 p.
11. Lamb G.L. Elements of soliton theory.- A Wiley: Interscience Publications, 1980.- 213 p.
12. Selezov I.T., Korsunsky S.V. Wave propagation along the interface between the liquid metal and electrolyte // Proc. International Conference "MHD Processes to Protection of Environment". Part 1.- Kiev-Odessa, 1992.- P. 111-117.
13. Selezov I.T., Huq P. Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with surface tension // 2nd Eur. Fluid Mech. Conf., Warsaw, 20-24 Sept., 1994, Abstr. Pap.- Warsaw, 1994.- P. 250.
14. Bontozoglou V. Weakly nonlinear Kelvin-Helmholtz waters between fluids of finite depth // Int. J. Multiphase Flow.- 1991.- 17, N4.- P. 509-518.
15. Dias F., Kharif Ch. Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. Part 7. Importance of surface tension effects // Annu. Rev. Fluid Mech.- 1999.- 31.- P. 301-346.
16. Duncan J.H. Spilling breakers // Annu. Rev. Fluid Mech.- 2001.- 33.- P. 519-547.
17. Baker G.R. Meiron D.I., Orszag S.A. Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J.Fluid Mech.- 1982.- 123.- P. 477-501.
18. Bourtos Y.Z., Abl-el-Malek M.B., Tewfick A.H. A format expansion procedure for the internal solitary wave problem in a two-fluid system of constant topography // Acta Mechanica.- 1991.- 88.- P. 172-197.
19. Chen Y., Liu P.L.-F. The unified Kadomtsev - Petviashvili equation for interfacial waves // J.Fluid Mech.- 1995.- 228.- P. 383-408.
20. Choi W., Camassa R. Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech.- 1996.- 313.- P. 83-103.
21. Ioualalen M., Kharif C., Roberts A.J. Stability regimes of finite depth short-crested water waves // J. Phys. Oceanography.- 1999.- 29.- P. 2318-2331.
22. Stamp A.P., Jacka M. Deep-water internal solitary waves // J. Fluid Mech.- 1995.- 305.- P. 347-371.
23. Trulsen K. Wave kinematics computed with the nonlinear Schroedinger method for deep water // Trans. ASME.- 1999.- 121.- P. 126-130.
24. Nayfeh A. Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME J. Appl. Mech.- 1976.- Ser. E, 43, N4.- P. 584-588.
25. Avramenko O. V., Selezov I. T. Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доповіді НАНУ.- 1997.- N10.- С. 61-66.
26. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Нелинейное распространение волновых пакетов при малых частотах // Теорет. и прикл. механика.- 2000.- Вып.31.- С. 151-157.
27. Селезов И.Т., Авраменко О.В. Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околорезонансных частотах // Динамические системы.- 2001.- Вып.17.- С. 58-67.
28. Selezov I., Avramenko O. Some features of nonlinear wave trains propagating in two-layer fluid // Geophysical Research Abstracts, The 26<sup>th</sup> General Assembly of the European Geophys. Soc., Nice, France, 25-30 March, 2001.- 2001.- 3.- P. 8102.
29. Селезов И. Т., Авраменко О. В. Эволюция нелинейных волновых пакетов в гидродинамической системе "слой-полупространство" с учетом поверхностного натяжения // Мат. методи та фіз.-мех. поля.- 2001.- 44, 2.- С. 113-122.
30. Selezov I., Avramenko O., Kharif C., Trulsen K. Higher asymptotic approximations for nonlinear internal waves in fluid // Int. Conf. "Nonlinear Partial differential equations" Book of abstracts, Kyiv. 22-28 Aug, 2001.- Donetsk, 2001.- P. 105-106.
31. Selezov I., Avramenko O., Mironchuk M., Morozova L. On application of the potential theory in the problems of surface gravity waves // Ukrainian Math. Congress. Abstracts. Int. Conf. on Complex Analysis and Potential Theory, Ukraine, Kyiv, 7-12 Aug. 2001.- Kyiv, 2001.- P. 50-51.

32. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладная гидромеханика.– 2001.– №4.– С. 38–46.
33. Selezov I., Avramenko O. Stability analysis of nonlinear wave trains propagating in two-fluid system. // Abstracts, Int. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, 2001, May 22-25.– Kyiv, 2001.– P. 356.
34. Авраменко О.В. Резонанс и форма волнового пакета на поверхности контакта жидких сред // Вісник ХНУ, Сер. "Математика, прикл. математика і механіка".– 2001.– Вып.50.– С. 122–128.
35. Selezov I., Avramenko O., Kharif Ch., Trulsen K. High-order evolution equation for nonlinear wave-packet propagation with surface tension accounting // C.R. Mecanique .– 2003.– 331.– P. 197–201.
36. Selezov I.T., Avramenko O.V. Nonlinear propagation of wave packets for nearcritical wave numbers in a liquid that is piecewise nonuniform with depth // J. Math. Sciences, February .– 2001.– 103(3).– P. 409–413.
37. Selezov I.T., Avramenko O.V. Transformation of a pressure pulse in a fluid-filled cylindrical elastic shell. // J. Math. Sciences, January .– 2001.– 103(2).– P. 195–201.
38. Selezov I.T. Wave processes in fluids and elastic media // Int. J. Fluid Mechanics Research.– 2003.– 30, N2.– P. 219–224.
39. Avramenko O.V., Selezov I.T. A new solution of the problem of wave propagation in stratified fluid // Доп. НАН України. Сер. А.– 1996.– №9.– P. 59–65.
40. Selezov I., Avramenko O., Kharif Ch., Trulsen K. Higher asymptotic approximations for nonlinear internal waves in fluids // Нелин. граничные задачи.– 2003.– Вып.13.– P. 141–148.
41. Найфэ А. Методы возмущений.– М.: Мир, 1976.– 242 с.
42. Авраменко О.В., Селезов И.Т. Структура нелинейных волновых пакетов на поверхности контакта жидких сред // Прикладная гидромеханика.– 2002.– 4(76), 4.– С. 3–13.