

УДК 532.516

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В СЛЕДЕ ЗА ЦИЛИНДРОМ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

А. А. ПРИХОДЬКО, Д. А. РЕДЧИЦ

Днепропетровский национальный университет

Получено 05.11.2004

Для исследования нестационарных течений несжимаемой жидкости применены двумерные уравнения Навье-Стокса, записанные относительно произвольной системы координат. Алгоритм численного решения исходных уравнений основан на методе искусственной сжимаемости, модифицирован для расчета нестационарных течений и использует схемы TVD MinMod второго и ISNAS третьего порядка для конвективных членов и центрально-разностную второго порядка для вязких членов. Интегрирование по времени уравнений количества движения осуществляется с помощью односторонней схемы второго порядка. В качестве тестовой задачи, рассматривается ламинарное течение за цилиндром.

Для дослідження нестационарних течій нестисливої рідини застосовані двовимірні рівняння Нав'є-Стокса, записані відносно довільної системи координат. Алгоритм чисельного розв'язування вихідних рівнянь заснований на методи штучної стисливості та модифікований для розрахунку нестационарних течій, використовує схеми TVD MinMod другого і ISNAS третього порядку для конвективних членів і центрально-різницеву другого порядку для в'язких членів. Інтегрування за часом рівнянь кількості руху здійснюється за допомогою однобічної схеми другого порядку. Як тестова задача, розглядається ламинарна течія за цилиндром.

The two-dimensional Navier-Stokes equations, which have been written down concerning generalized system of coordinates, are applied for research of unsteady flows of an incompressible liquid. The numerical decision algorithm of the initial equations is based on the method of the artificial compressibility. This method has been modified for calculation of unsteady flows, it uses schemes TVD MinMod of the second and ISNAS the third order for convective terms and central differencing the second order for viscous terms. Integration on time of the momentum equations is carried out with the help of the unilateral scheme of the second order. As a test problem, laminar flow behind a circular cylinder is being considered.

ВВЕДЕНИЕ

При теоретическом исследовании течений в следе за кораблями и летательными аппаратами наилучшие результаты получаются при применении модели реальной жидкости – уравнений Навье-Стокса.

Разработка методик решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости – актуальная задача вычислительной гидродинамики. Большинство задач, представляющих практическую ценность, имеют ярко выраженный нестационарный характер. Основная проблема получения нестационарных решений заключается в трудностях одновременного решения уравнений количества движения и уравнения неразрывности. На первом этапе развития численных алгоритмов решения уравнений Навье-Стокса для несжимаемой жидкости чаще использовались переменные завихренность–функция тока [1]. На основе данного подхода было решено большое количество прикладных задач, но расчеты пространственных задач с использованием функций тока весьма затруднительны.

Применение физических переменных позволяет

решать двумерные и трехмерные задачи по единому алгоритму. Основные математические проблемы при решении уравнения Навье-Стокса связаны с различным типом дифференциальных уравнений для законов сохранения массы и количества движения. Различие между эллиптическим и параболическим характером используемых уравнений преодолевалось с помощью введения для определения давления специального уравнения Пуассона [2], уравнений для поправок [2, 3], различных штрафных функций [4], дополнением уравнения неразрывности нестационарным членом [5], регуляризацией матрицы коэффициентов при производных по времени [6].

При решении уравнений несжимаемой жидкости в физических переменных применялись метод маркеров и ячеек (MAC), алгоритм SIMPLE, в последнее время значительный прогресс в повышении эффективности численных алгоритмов достигнут при применении локального предобуславливания. Обзор указанных методов можно найти в работах [7-11].

В последние годы для моделирования течения несжимаемой жидкости все чаще применяются подходы, использующие эффекты сжимаемости

[12-14].

Практика применения уравнений сжимаемого газа показывает низкую работоспособность данной модели при малых числах Маха ($M < 0.1$). Это связано с жесткостью исходных уравнений для низкоскоростных течений вследствие значительных различий в характерных временах конвективного переноса и распространения акустических возмущений. Данное препятствие может быть преодолено применением предобуславливания (preconditioning) [6]. Однако теоретические основы предобуславливания в настоящее время достаточно развиты только для стационарных течений.

Метод искусственной сжимаемости представляет собой разумный компромисс между указанными выше подходами. С одной стороны, за счет добавления к уравнению неразрывности производной давления по времени исходная система уравнений приводится к единому параболическо-гиперболическому типу. Это позволяет напрямую согласовать поля давления и скорости на одном временном слое. С другой стороны, данный метод не связан с ограничениями по числу Маха в отличие от "чисто сжимаемого" подхода.

В настоящей работе на основе проведенного анализа существующих тенденций развития численных методов предложена методика расчета нестационарных течений несжимаемой вязкой жидкости. Одной из таких тенденций является повышение качества получаемых численных решений на базе применения идей невозрастания полной вариации (TVD). В настоящей методике используются ограничители TVD MinMod второго и ISNAS третьего порядка аппроксимации конвективных слагаемых в рамках уравнений Навье-Стокса искусственной сжимаемости для произвольной неортогональной системы координат. Для расширения применения разрабатываемой методики к нестационарным задачам проводятся подытерации на каждом временном шаге для выполнения уравнения неразрывности аналогично работам [12-14]. Такой подход позволяет получать результаты, отражающие реальную картину течений, с приемлемыми затратами машинного времени.

Выбор задачи о нестационарном обтекании цилиндра обусловлен тем, что, несмотря на простую геометрию, она дает возможность отразить многие характерные параметры задач, описываемых уравнениями Навье-Стокса: различные соотношения между вязкими и конвективными силами, нелинейностью конвективных членов, существованием областей больших и малых градиентов давле-

ния, что позволяет использовать данную задачу как тестовую при численном моделировании.

При обтекании цилиндра несжимаемой жидкостью можно выделить три режима: течение имеет ламинарный характер во всей области, ламинарное обтекание цилиндра и турбулентный след, все поле течения является турбулентным.

Применение моделей турбулентности в рамках осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса вносит нефизические эффекты в нестационарную картину течений, в частности это проявляется в искажении вихревой дорожки Кармана. Проведение серийных расчетов с использованием методов крупномасштабной турбулентности в данный момент не представляется возможным в силу больших затрат вычислительных ресурсов. В то же время, моделирование ламинарных отрывных нестационарных течений является необходимым этапом расчета турбулентных задач.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Нестационарные уравнения Навье-Стокса для течений несжимаемой жидкости с постоянной плотностью могут быть записаны в консервативной форме. Используя произвольные координаты $\xi = \xi(x, y, t)$, $\eta = \eta(x, y, t)$, запишем систему уравнений Навье-Стокса в векторном виде:

$$\frac{\partial \hat{D}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial \xi}(\hat{E} - \hat{E}_v) - \frac{\partial}{\partial \eta}(\hat{F} - \hat{F}_v), \quad (1)$$

где

$$\hat{D} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} p \\ u \\ \nu \end{bmatrix}, \quad \hat{E} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta U + \xi_t(p - \beta) \\ uU + \xi_x p \\ \nu U + \xi_y p \end{bmatrix},$$

$$\hat{F} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \beta V + \eta_t(p - \beta) \\ uV + \eta_x p \\ \nu V + \eta_y p \end{bmatrix},$$

$$U = \xi_t + \xi_x u + \xi_y \nu, \quad V = \eta_t + \eta_x u + \eta_y \nu, \quad (2)$$

U, V – контравариантные компоненты скорости, $\xi_t = -\xi_x x_\tau - \xi_y y_\tau$, $\eta_t = -\eta_x x_\tau - \eta_y y_\tau$, $\xi_x = J y_\eta$, $\xi_y = -J x_\xi$, $\eta_x = J y_\xi$, $\eta_y = J x_\xi$ – метрические коэффициенты,

$$J = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \det \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix}$$

– якобиан преобразования координат. Вязкие члены для неортогональной сетки имеют вид

$$\hat{E}_v = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2)u_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)u_\eta \\ (\xi_x^2 + \xi_y^2)\nu_\xi + (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)\nu_\eta \end{bmatrix},$$

$$\hat{F}_v = \frac{1}{ReJ} \begin{bmatrix} 0 \\ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) u_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) u_\eta \\ (\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) v_\xi + (\eta_x^2 + \eta_y^2) v_\eta \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Граничные условия. Нестационарное течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями параболическо-гиперболического типа, для решения которых граничные условия задавались на всех границах расчетной области по явной схеме. На внешней границе, за исключением выходного участка, где задавались условия Неймана, значения зависимых переменных рассчитывались по методу характеристик. На поверхности цилиндра ставилось условие прилипания. При вычислении давления на поверхности цилиндра нормальный градиент давления полагался равным нулю.

2. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

2.1. Аппроксимация по времени

Производные по времени в уравнениях количества движения вычисляются по конечно-разностной второго порядка трехточечной явной схеме:

$$\frac{3\hat{u}^{n+1} - 4\hat{u}^n + \hat{u}^{n-1}}{2\Delta t} = -\hat{r}_u^n, \quad \frac{3\hat{v}^{n+1} - 4\hat{v}^n + \hat{v}^{n-1}}{2\Delta t} = -\hat{r}_v^n, \quad (4)$$

где верхний индекс обозначает величину времени $t = n\Delta t$; \hat{r} – правая часть в уравнениях количества движения (1).

Для решения уравнения (4) и выполнения уравнения неразрывности на временном слое $n+1$, введем псевдовременной слой и обозначим его верхним индексом m . Уравнения решаются итеративно так, чтобы $\hat{u}^{n+1,m+1}, \hat{v}^{n+1,m+1}$ приближались к значению скорости $\hat{u}^{n+1}, \hat{v}^{n+1}$ на новом временном слое, а дивергенция скорости стремилась к нулю. Используя метод искусственной сжимаемости и применяя явную схему Эйлера к производной по времени в уравнении неразрывности, запишем дискретный аналог уравнений (1) с псевдовременными индексами:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\hat{p}^{n+1,m+1} - \hat{p}^{n+1,m}}{\Delta \tau} = \\ = -\beta \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{U}{J} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{V}{J} \right) \right)^{n+1,m+1}, \\ \frac{3\hat{u}^{n+1,m+1} - 4\hat{u}^n + \hat{u}^{n-1}}{2\Delta t} = -\hat{r}_u^n, \\ \frac{3\hat{v}^{n+1,m+1} - 4\hat{v}^n + \hat{v}^{n-1}}{2\Delta t} = -\hat{r}_v^n \end{array} \right. \quad (5)$$

где $\hat{p} = p/J$.

Для ускорения сходимости поля давления к стационарному решению, использовался переменный в пространстве шаг по псевдовремени $\overline{\Delta \tau}$ в уравнении неразрывности, предложенный в работе [15]. Местный шаг по псевдовремени зависел исключительно от площади ячейки и определялся по формуле

$$\overline{\Delta \tau} = \Delta \tau (1 + \sqrt{J}), \quad (6)$$

где J – якобиан преобразования координат, $\Delta \tau$ – фиксированное значение шага по псевдовремени, задаваемое перед началом расчета.

Устойчивость метода при интегрировании исходных уравнений по явной схеме напрямую зависит от физического шага по времени Δt , параметра искусственной сжимаемости β и псевдовремени $\Delta \tau$, выбор которых должен удовлетворять условию Куранта-Фридрихса-Леви.

2.2. Аппроксимация по пространству

При решении задач о нестационарном течении несжимаемой вязкой жидкости необходимо применять эффективные численные методы повышенного порядка точности в областях произвольной формы. Важным свойством численного метода в произвольной системе координат является его монотонность и консервативность, которые сводят к минимуму возмущения, обусловленные методом решения за счет разностной аппроксимации и кривизны сеточных линий.

Использование центрально-разностных схем для представления конвективных членов требует, чтобы в уравнение явным образом была добавлена искусственная диссипация, которая является следствием нелинейности конвективных членов. Такие схемы трудны в применении, так как параметр искусственной диссипации приходится подбирать для каждого конкретного случая. Использование слишком большой искусственной диссипации может привести к потере точности вычислений [14].

Существуют два основных класса противоточных схем. К первому относятся схемы, основанные на значениях собственных чисел конвективных потоков. В основном, эти схемы разрабатывались применительно к уравнениям Эйлера и Навье-Стокса сжимаемой жидкости [16, 17].

Ко второму типу относятся схемы TVD, которые основаны на ограничении порядка дифференцирования вблизи разрывов или областей с большим градиентом давления, где порядок дифференцирования понижается, а суммарная диссипация возрастает [14].

В работах Hsu и Hartwich [18], Gorski [19], Zijlema [20] схемы TVD были применены к решению уравнений несжимаемой жидкости.

В данной работе используются схемы TVD Min-Mod [21] второго и ISNAS [20] третьего порядка к нестационарным двумерным уравнениям Навье-Стокса несжимаемой жидкости.

Конвективные производные аппроксимировались с помощью соотношения

$$\frac{\partial(Uf)}{\partial\xi} = \frac{U_R f_R - U_L f_L}{\Delta\xi}, \quad (7)$$

где $f = u, v, U_R = 0.5(U_{i+1} + U_i), U_L = 0.5(U_i + U_{i-1})$; U – контрвариантная компонента скорости, вычисляемая на левой L и на правой R гранях ячейки.

Несложно показать [22, 20, 11], что практически любая TVD схема может быть записана в виде

$$f_i = (f_{UDS})_i + \psi_i, \quad (8)$$

где $(f_{UDS})_i$ – значение функции на грани контрольного объема, рассчитанное по противопоточной схеме; ψ_i – нелинейный ограничитель потоков, который является функцией значений в окрестности i -той грани контрольного объема.

Противопоточная схема усовершенствуется с помощью следующих соотношений:

$$f_R = \begin{cases} f_i + \psi_i(f_{i+1} - f_i, f_i - f_{i-1}), & U_R \geq 0, \\ f_{i+1} - \psi_i(f_{i+2} - f_{i+1}, f_{i+1} - f_i), & U_R < 0, \end{cases}$$

$$f_L = \begin{cases} f_{i-1} + \psi_i(f_i - f_{i-1}, f_{i-1} - f_{i-2}), & U_L \geq 0, \\ f_i - \psi_i(f_{i+1} - f_i, f_i - f_{i-1}), & U_L < 0. \end{cases} \quad (9)$$

Ограничитель ψ_i для схемы Колгана MinMod второго порядка [21] имеет вид

$$\psi_i = \begin{cases} 0.5 \text{MinMod}(\Delta f_L, \Delta f_R), & (\Delta f_L \cdot \Delta f_R) > 0, \\ 0, & (\Delta f_L \cdot \Delta f_R) \leq 0. \end{cases} \quad (10)$$

Для схемы TVD ISNAS [20] третьего порядка точности ограничитель может быть записан

$$\psi_i = \begin{cases} \frac{1}{2} \Delta f_L \frac{\Delta f_R^2 + 3 \Delta f_L \Delta f_R}{(\Delta f_L + \Delta f_R)^2}, & (\Delta f_L \Delta f_R) > 0, \\ 0, & (\Delta f_L \cdot \Delta f_R) \leq 0. \end{cases} \quad (11)$$

Выполнение условий в выражениях (10), (11) обеспечивает невозрастание локального максимума. Используемая конечно-разностная схема является пятиточечной.

При аппроксимации производных в диффузионных членах уравнений Навье-Стокса использовались центральные разности.

2.3. Искусственная диссипация

При проведении расчетов в уравнение неразрывности для демпфирования высокочастотных возмущений вводились диссипативные члены. Явное сглаживание оказывает большое влияние на устойчивость и точность метода искусственной сжимаемости, особенно для давления, которое играет важную роль в сходимости решения несжимаемого течения. В статье Chang и Kwak [23] показано, что волны давления затухают экспоненциально со временем и исчезают, когда решение сходится. Таким образом, градиент давления по псевдвремени стремится к нулю, а дивергенция скорости – к величине диссипативных членов.

В работе применена скалярная модель диссипации, основанная на схеме Jameson, Schmidt и Turkel [24]. Эта модель определяет функцию переключения, основанную на совместном использовании разностей второго и четвертого порядков. Диссипативные члены могут быть представлены в виде

$$ADw_j = -(D^2 - D^4)w_j = d_{j+1/2} - d_{j-1/2}. \quad (12)$$

Тогда

$$D^2 w_j = \nabla \left(\left(\lambda_{j+1/2} \epsilon_{j+1/2}^{(2)} \right) \Delta \right) w_j, \quad (13)$$

$$D^4 w_j = \nabla \left(\left(\lambda_{j+1/2} \epsilon_{j+1/2}^{(4)} \right) \Delta \nabla \Delta \right) w_j, \quad (14)$$

где индекс j относится к центру ячейки; операторы Δ и ∇ – правосторонний (вперед) и левосторонний (назад) разностные операторы; w – функция, к которой применяется искусственная диссипация. Переменный масштабный множитель $\lambda_{j+1/2}$ определяется по формуле

$$\lambda_{j+1/2} = \frac{1}{2} \left((\bar{\lambda}_\xi)_j + (\bar{\lambda}_\xi)_{j+1} \right), \quad (15)$$

где $\bar{\lambda}_\xi$ является наибольшим собственным значением по абсолютной величине (т. е. спектральным радиусом) матрицы Якоби вектора потока из уравнений Навье-Стокса. В двумерном случае, в произвольной криволинейной системе координат (ξ, η) , масштабный множитель находится с помощью соотношений

$$\left(\bar{\lambda}_\xi \right)_{j,k} = \phi_{j,k}(r) \left(\lambda_\xi \right)_{j,k}, \quad \phi_{j,k}(r) = 1 + r_{j,k}^\zeta, \quad (16)$$

где $r = \lambda_\eta / \lambda_\xi$. Показатель степени ζ обычно берется между 1/2 и 2/3. Коэффициенты $\epsilon^{(2)}$ и $\epsilon^{(4)}$

определяются по полю давления как

$$\begin{cases} \epsilon_{j+1/2}^{(2)} = k^{(2)} \max(\nu_{j-1}, \nu_j, \nu_{j+1}, \nu_{j+2}), \\ \nu_j = \frac{|p_{j-1} - 2p_j + p_{j+1}|}{|p_{j-1} + 2p_j + p_{j+1}|}, \\ \epsilon_{j+1/2}^{(4)} = \max\left(0, \left(k^{(4)} - \epsilon_{j+1/2}^{(2)}\right)\right), \end{cases} \quad (17)$$

где значения для констант $k^{(2)}$ и $k^{(4)}$ находятся в диапазонах от 1/4 до 1/2 и от 1/64 до 1/32 соответственно. Функция переключения ν может быть интерпретируема как ограничитель и максимизирует слагаемые второго порядка в экстремуме и включает четвертый порядок.

Для гладких течений ν является малым, и диссипативные слагаемые состоят из линейных слагаемых четвертого порядка, демпфирующих высокочастотные колебания, которые при центральных разностях не затухают. В окрестностях больших градиентов давления ν становится большим и включает второго порядка диссипативную вязкость при одновременном уменьшении слагаемых четвертого порядка.

При применении скалярной диссипации с TVD свойствами проводится замена переключателя в уравнении (19), аналогично работе [25]. В одномерной постановке этот переключатель имеет вид

$$\nu_j = \frac{|p_{j-1} - 2p_j + p_{j+1}|}{|p_{j+1} - p_j| + |p_j - p_{j-1}| + \epsilon} \quad (18)$$

и $k^{(2)} = 1/2$. При проведении расчетов в настоящей работе использовалась модифицированная форма уравнения (18):

$$\nu_j = \frac{|p_{j-1} - 2p_j + p_{j+1}|}{(1 - \omega)P_{TVD} + \omega P}, \quad (19)$$

где

$$\begin{cases} P_{TVD} = |p_{j+1} - p_j| + |p_j - p_{j-1}|, \\ P = p_{j+1} + 2p_j + p_{j-1}, \end{cases} \quad (20)$$

и $0 \leq \omega \leq 1$. Обычно в расчетах $\omega \sim 1/2$.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЯ

Отрыв потока на поверхности тела – явление, приводящее к нежелательным последствиям (увеличение сопротивления тел, нестационарные нагрузки и т. п.). Обтекание тел конечного размера имеет, как правило, периодический характер. Большое число расчетных [2, 13, 14, 26-29, 32-34, 37-41] и экспериментальных [30, 31, 35, 36, 42, 43] работ посвящено изучению течения за цилиндром.

Установлены зависимости коэффициентов лобового сопротивления, подъемной силы, частоты срыва вихрей и числа Струхала от числа Рейнольдса.

С целью проверки эффективности разработанного численного алгоритма нами рассчитано стационарное и нестационарное течения несжимаемой жидкости за круговым цилиндром. Расчеты проведены для чисел Рейнольдса 5, 10, 20, 40, 50, 100 и 200 на сетке типа O с количеством узлов 121×250 . Для правильного определения эффектов вязкости в физической области введена сильно неравномерная сетка со сгущением вблизи поверхности цилиндра и в следе так, что наименьшее расстояние к поверхности равно 0.0035 диаметра и количество точек в пограничном слое 40. Внешняя граница расположена на расстоянии 50 диаметров цилиндра, шаг по времени $\Delta t = 0.001$, параметр искусственной сжимаемости $\beta = 1$. Цилиндр мгновенно приводился в движение из состояния покоя. Вихревая структура течения развивалась без каких-либо искусственных возмущений.

Ламинарное течение в следе за цилиндром при обтекании несжимаемой жидкостью характеризуется следующими режимами: безотрывное стационарное, стационарный отрыв и нестационарное отрывное периодическое.

Линии тока, построенные по мгновенному полю скоростей, для различных чисел Рейнольдса приведены на рис. 1. Картину течения в следе за цилиндром можно охарактеризовать следующим образом. При числах Рейнольдса $Re < 5$ обтекание цилиндра происходит без отрыва пограничного слоя (рис. 1, а). Увеличение числа Рейнольдса приводит к отрыву ламинарного пограничного слоя от поверхности цилиндра. Отрыв является следствием влияния градиента давления и вязких сил. Под действием положительного градиента давления возникает возвратное течение, которое приводит к утолщению пограничного слоя. В точке отрыва потока, где касательные напряжения обращаются в нуль, поток отходит от поверхности цилиндра под небольшим углом. Экспериментальные и численные расчеты свидетельствуют, что при значении Рейнольдса $Re < Re_{кр}$ (для цилиндра $Re = 40$) реализуется стационарный режим течения, характеризующийся наличием в ближнем следе двух симметричных вихрей. При малых числах Рейнольдса $Re = 5 - 10$ ширина и длина вихревого следа увеличивается с ростом числа Рейнольдса (рис. 1, б, в). При увеличении числа Рейнольдса размеры стационарной отрывной зоны растут до тех пор, пока не будет достигнуто его критическое значение. В этом случае длина зоны отрыва равна примерно двум диа-

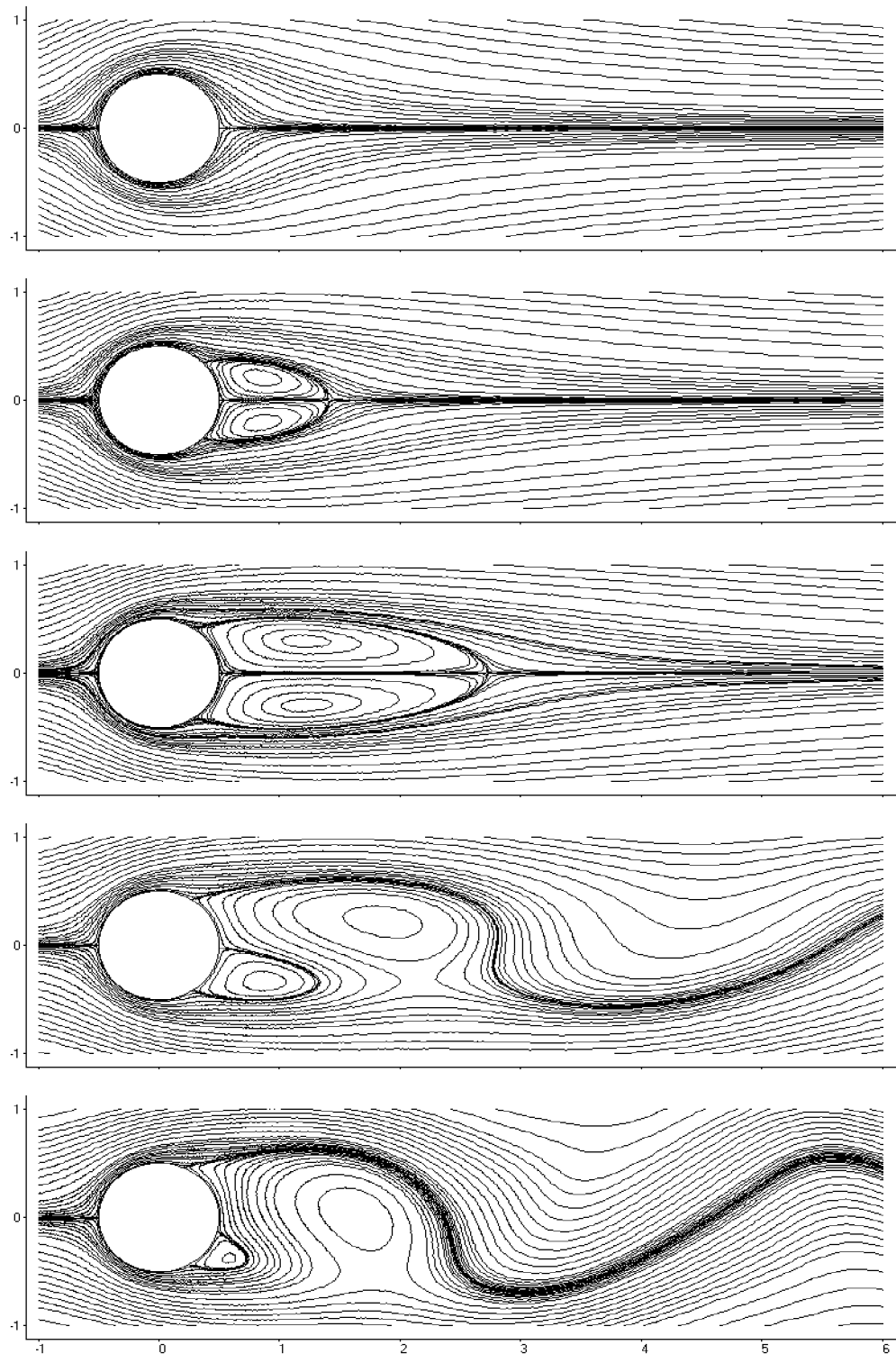


Рис. 1. Стационарное и нестационарное обтекание цилиндра.
Линии тока, построенные по мгновенному полю скоростей:
а - $Re = 5$, б - $Re = 20$, в - $Re = 40$, г - $Re = 50$, д - $Re = 100$

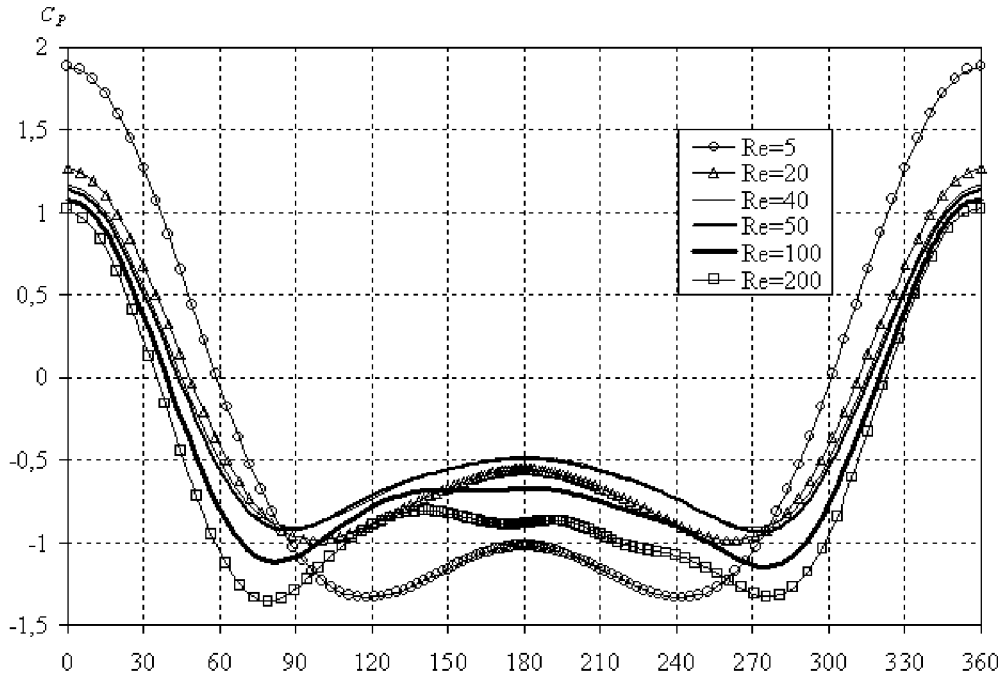


Рис. 2. Распределение коэффициента давления C_p по поверхности кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса

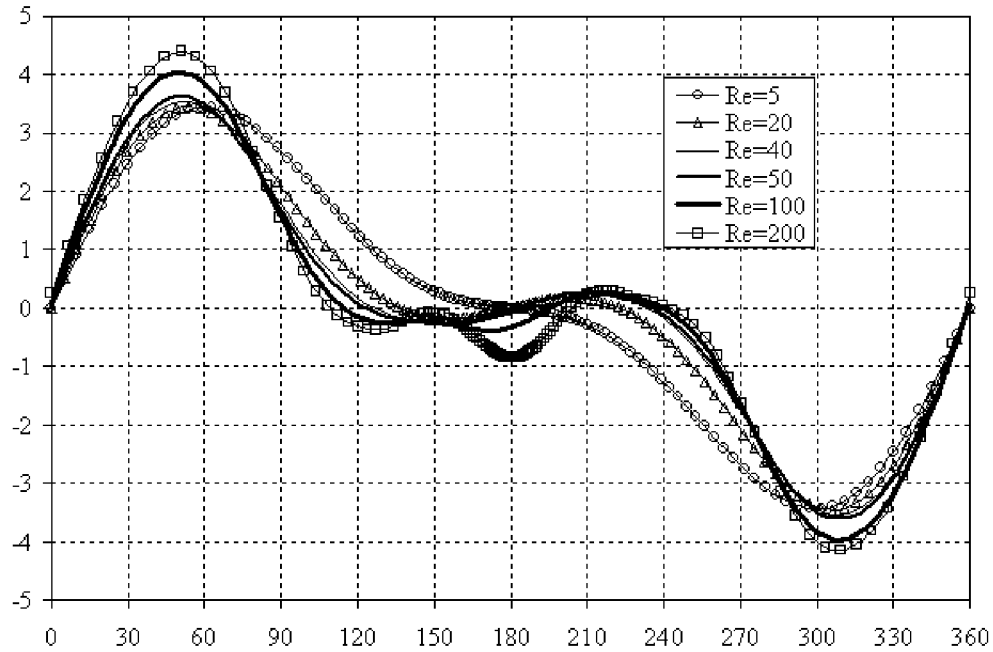


Рис. 3. Распределение коэффициента трения C_f по поверхности кругового цилиндра в зависимости от чисел Рейнольдса

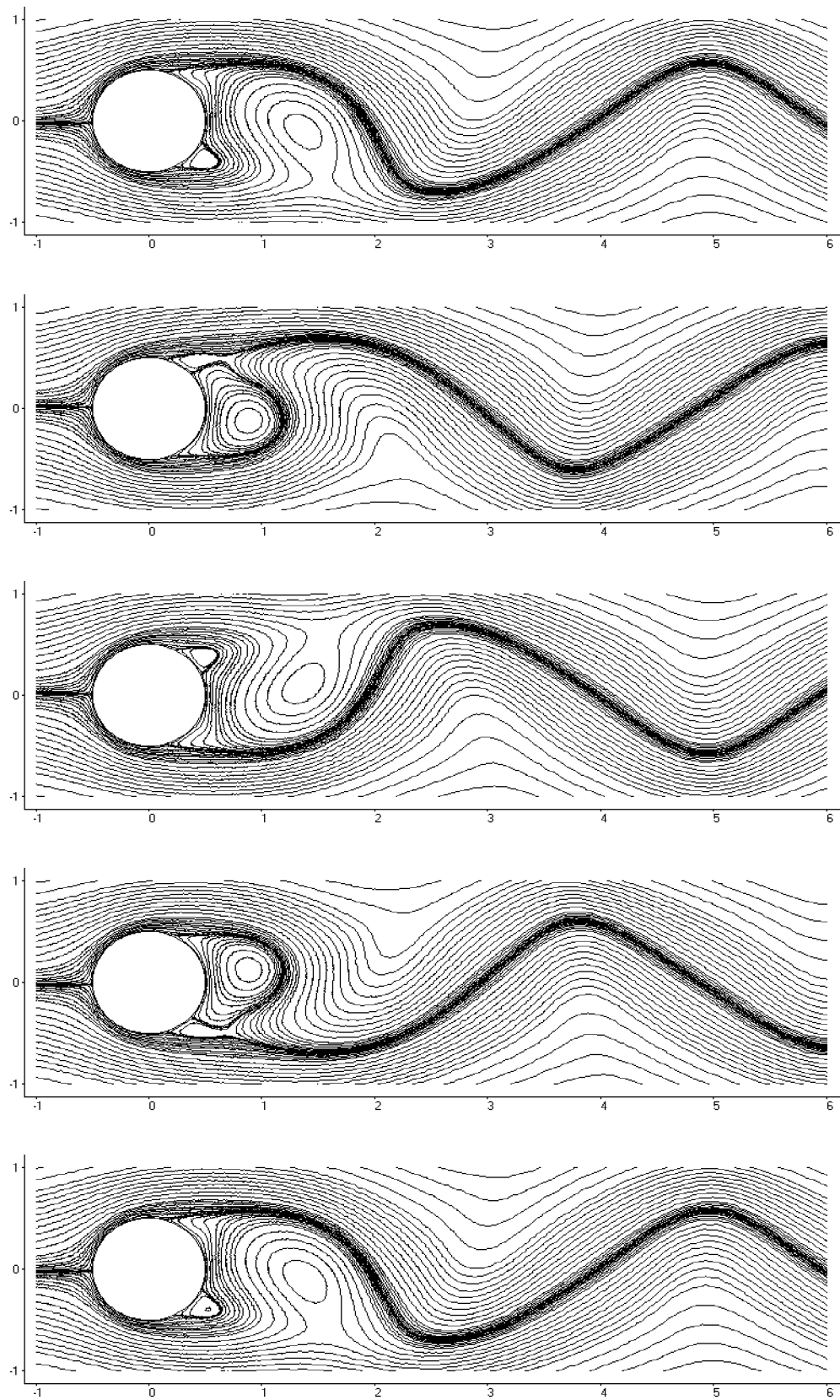


Рис. 4. Нестационарное обтекание цилиндра $Re = 200$.
Линии тока построены по мгновенному полю скоростей для моментов времени:
 $a - t = 0$, $b - t = 1.3$, $c - t = 2.6$, $d - t = 3.9$, $e - t = 5.2$

Табл. 1. Параметры стационарного течения для кругового цилиндра

Источник	Числа Рейнольдса			
	5	10	20	40
	L_{sep}			
Данная работа	0	0.250	0.930	2.30
[13]	0	0.254	0.932	2.29
[26]	0	0.249	0.935	2.32
[27]	0	0.252	0.932	2.35
[28]	0	0.25	0.94	2.1
[30] (эксперимент)	–	0.34	0.9	2.13
[32]				2.33
[33]		0.473		
	Θ_{sep}			
Данная работа	0	28.9	43.3	53.1
[13]	0	28.8	43.1	53.0
[26]	–	29.3	43.7	53.6
[27]	0	29.6	43.7	53.8
[28]	$i \cdot 6$	29.7	44.1	54.8
[29]	–	–	43.6	54.5
[30] (эксперимент)	–	32.5	44.8	53.5
[32]				53.8
[33]		29.5		
	$C_D (C_{Dp})$			
Данная работа	4.10 (2.16)	2.84 (1.601)	2.02 (1.228)	1.523 (1.007)
[13]	4.18 (2.19)	2.89 (1.602)	2.08 (1.242)	1.549 (1.011)
[26]	–	2.80	2.01	1.536
[27]	4.12 (2.20)	2.85 (1.600)	2.05 (1.233)	1.522 (0.998)
[28]	4.66 (2.48)	3.18 (1.775)	2.25 (1.350)	1.675 (1.095)
[29]	–	–	2.18	1.60
[31] (эксперимент)	4.16	3.06	2.02	1.65
[32]				1.497 (0.981)
[33]		3.103		
	$C_{pf} (-C_{pr})$			
Данная работа	1.884 (1.019)	1.474 (0.696)	1.261 (0.558)	1.162 (0.489)
[13]	1.847 (1.067)	1.476 (0.755)	1.265 (0.615)	1.147 (0.536)
[26]	–	1.474 (0.670)	1.261 (0.537)	1.141 (0.512)
[27]	1.872 (1.044)	1.489 (0.742)	1.269 (0.589)	1.144 (0.509)
[28]	2.230 (1.081)	1.744 (0.773)	1.457 (0.614)	1.312 (0.543)
[32]				1.130 (0.484)
[33]		1.516		

Примечание. L_{sep} – длина отрывной зоны в диаметрах цилиндра, измеряемая от задней критической точки; Θ_{sep} – угол отрыва потока, отсчитываемый от задней критической точки; C_D – коэффициент сопротивления; C_{Dp} – коэффициент сопротивления от давления; C_{pf} – коэффициент давления в лобовой точке; C_{pr} – коэффициент давления в задней точке;

метрам цилиндра. Границу вихревой области для стационарного режима течения можно определить по линии нулевой скорости. Результаты расчетов параметров стационарного течения для кругового цилиндра при низких числах Рейнольдса 5, 10, 20, 40 представлены в табл. 1, где сравниваются с численными расчетами Takami и Keller [26], Dennis и Chang [27], Tuann и Olson [28], Braza и др. [29], Белоцерковский [33], Белов [32], а также с экспериментальными данными Coutanceau [30] и Tritton [31]. Интегральные и дифференциальные характеристики хорошо совпадают с данными других авторов.

При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса течение в следе приобретает асимметричный характер (рис. 1, г, д и рис. 4, а). Картины течения для чисел Рейнольдса 50 (рис. 1, г), 100 (рис. 1, д) и 200 (рис. 4, а) подобны. Однако существуют некоторые отличия. Так, при $Re = 50$ длина отрывного пузыря в два раза больше, чем при $Re = 200$. С ростом числа Рейнольдса время периода колебания уменьшается, а интенсивность вихрей в следе увеличивается.

Обтекание цилиндра при числах Рейнольдса, превышающих критическое значение, сопровождается отрывом вихрей, которые сносятся вниз по потоку через равные интервалы времени. Периодическое вихревое течение можно разделить на два диапазона в зависимости от числа Рейнольдса. Для $40 < Re < 300$ реализуется устойчивый ламинарный режим течения, с регулярной вихревой дорожкой, при котором можно еще не учитывать влияние турбулентных пульсаций. При высоких числах Рейнольдса возникает турбулизация течения в следе за цилиндром, что приводит к необходимости моделирования турбулентности.

Распределение коэффициентов давления C_p и трения C_f по поверхности цилиндра при изменении числа Рейнольдса приведены на рис. 2 и 3. Рост числа Рейнольдса является причиной понижения коэффициента давления в передней и увеличения в задней критических точках, а, следовательно, и уменьшения лобового сопротивления. Анализируя коэффициент трения, можно установить значения углов отрыва потока от поверхности цилиндра. Угол отрыва пограничного слоя, отсчитываемый от задней критической точки, растет с увеличением числа Рейнольдса. Нестационарный режим течения $Re > 40$ не имеет строго определенного угла отрыва. В донной части цилиндра могут формироваться сразу несколько вихрей. Их количество и интенсивность зависят от времени и числа Рейнольдса, и они влияют на положение точек отрыва и присоединения пото-

ка на поверхности цилиндра. Более подробно рассмотрим нестационарное обтекание цилиндра для Рейнольдса 200. На каждом временном слое проводились подытерации для корректировки поля давления до тех пор, пока максимальная дивергенция скорости в любой точке не была меньше, чем $\epsilon_{div} = 10^{-4}$. В течение начального неустановившегося периода требовалось от 10 до 20 подытераций на каждом временном шаге, но их количество со временем уменьшилось в среднем до 5 подытераций. Когда сформировалась вихревая дорожка Кармана, количество подытераций выросло до 12–15.

Используя схему TVD ISNAS третьего порядка для конвективных членов, формирование асимметрии в следе начиналось с безразмерного времени 50 и заканчивалось к 100. Принимая во внимание схемную вязкость, которой обладает схема TVD MinMod, формирование периодического течения завершилось к безразмерному времени 180. Течение около цилиндра становится нестационарным из-за срыва вихрей с противоположными направлениями вращения жидкости, поочередно с верхней и нижней поверхностей.

За начало отсчета времени принимается момент, в котором коэффициент лобового сопротивления имеет минимальное значение, а коэффициент подъемной силы обращается в нуль. Расчет проводился до установления периодических колебаний решения.

Линии тока, построенные по мгновенному полю скоростей, а также изобары для различных моментов времени одного периода колебания цилиндра, которые более информативны для нестационарных течений, приведены на рис. 5 и 6.

Вследствие действия сил вязкости вблизи поверхности цилиндра частицы жидкости теряют часть кинетической энергии, которой уже недостаточно, чтобы преодолеть повышение давления в кормовой части цилиндра. Возле точки отрыва формируется возвратное течение, из которого развивается большой вихрь. Через некоторое время этот вихрь отрывается от тела и уплывает вниз по течению. В завихренной зоне позади кормовой части цилиндра давление сильно понижено по сравнению с давлением в невозмущенном потоке. На некотором удалении за цилиндром формируется последовательность вихрей, вращающихся попеременно в разных направлениях.

Момент времени, при котором коэффициент лобового сопротивления имеет минимальное значение, а коэффициент подъемной силы обращается в нуль, соответствует рис. 4, а и 5, а. Это видно из того, что новый вихрь только формируется на

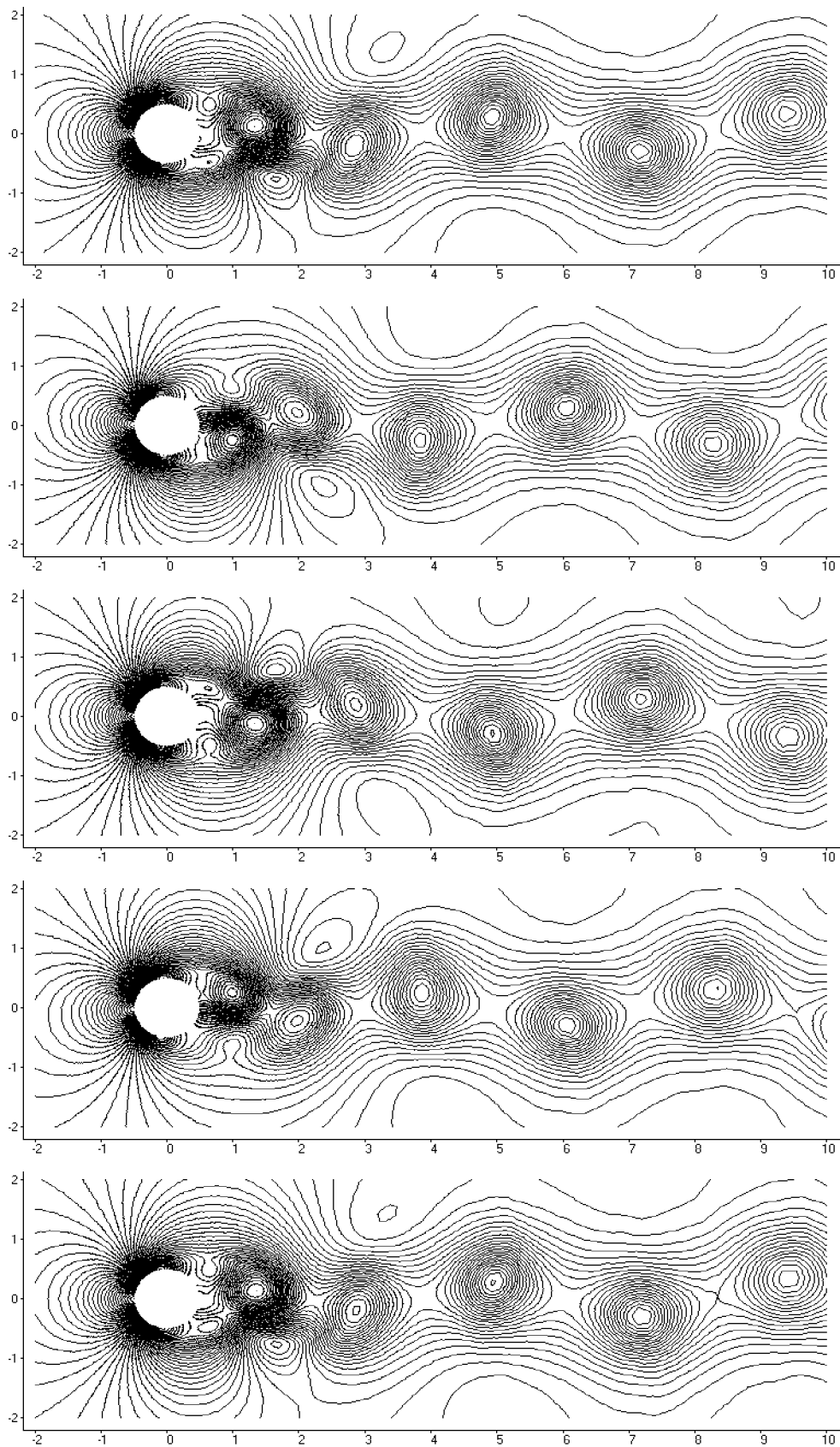


Рис. 5. Нестационарное обтекание цилиндра $Re = 200$. Изобары для моментов времени: $a - t = 0$, $b - t = 1.3$, $v - t = 2.6$, $r - t = 3.9$, $d - t = 5.2$

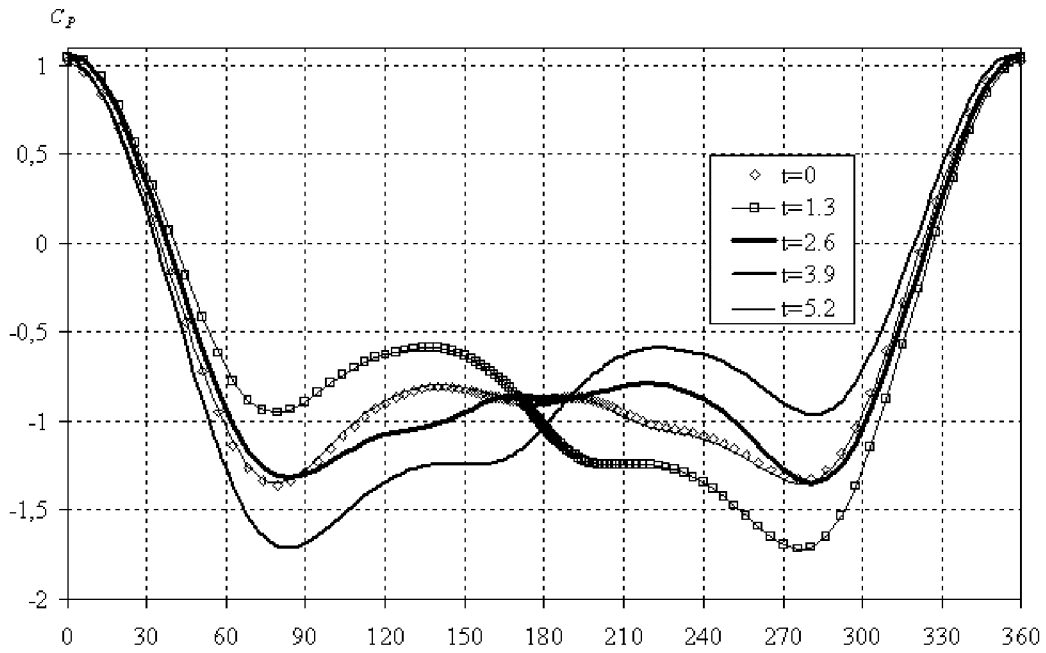


Рис. 6. Распределение коэффициента давления C_p по поверхности кругового цилиндра при $Re = 200$ в различные моменты времени

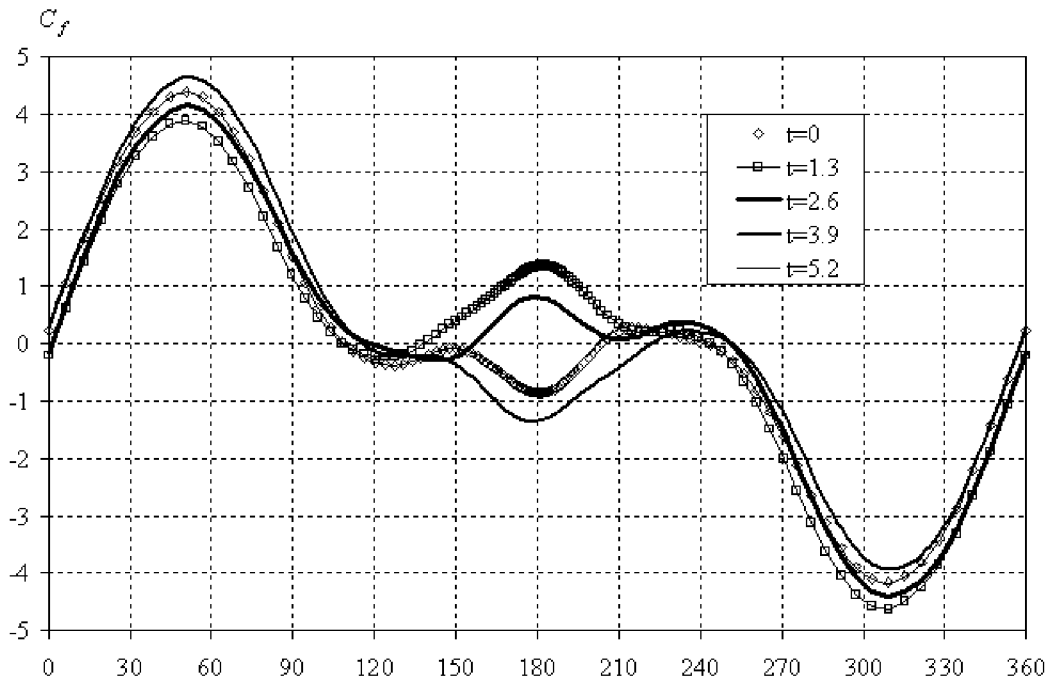


Рис. 7. Распределение коэффициента трения C_f по поверхности кругового цилиндра при $Re = 200$ в различные моменты времени

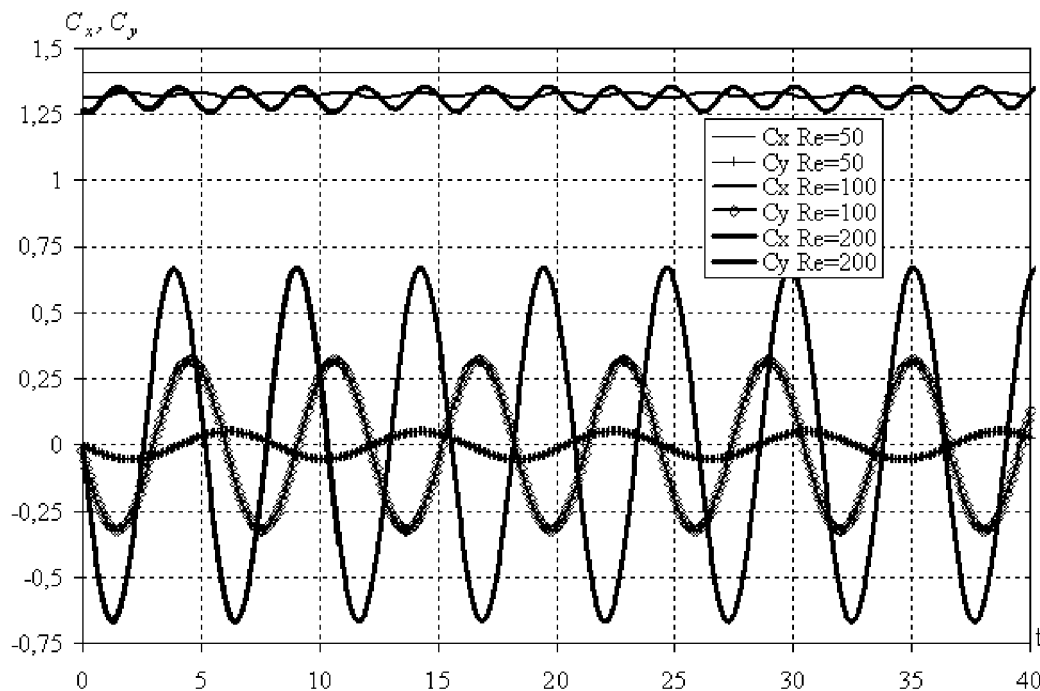


Рис. 8. Залежність коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили кругового циліндра від часу для чисел Рейнольдса 50, 100, 200

нижній половині, в то время как в центральній частині циліндра спостерігається область з пониженим тиском, яка і є причиною зниження опору.

Через деякий проміжок часу вихор збільшується в розмірах, кілька зміщується в горизонтальній площині і займає майже все простір ззаду від циліндра (рис. 4, б і 5, б). Ця картина течії відповідає максимальній величині коефіцієнта лобового опору та мінімальній величині підйомної сили. На цих малюнках видно вихор, готовий відірватися від поверхні циліндра. Цей вихор виконує екрануючий ефект на потік в верхній частині циліндра. Сформований внаслідок відрива пограничного шару вихор в верхній частині циліндра не сносить потоком, а формується в нижній області циліндра. По мірі зростання його інтенсивності та розміру верхній вихор відтискує нижній від поверхні циліндра, який, в свою чергу, з часом сносить потоком.

Наступні два малюнки відповідають мінімуму опору з нульовим коефіцієнтом підйомної сили та максимуму опору з максимумом коефіцієнта підйомної сили (рис. 4, в, г і 5, в, г). Ці малюнки є зображеннями перших двох. Останній рису-

нок майже ідентичний першому. Деякі відмінності є наслідком того, що реальний період цього течії дорівнює 5,21 (рис. 4, д і 5, д).

Розподіл коефіцієнтів тиску C_p та тертя C_f по поверхні кругового циліндра в різні моменти часу наведено на рис. 6 і 7 відповідно. Періодичний характер течії призводить до коливань положення точок сльвів вихорів та задньої критичної точки. Взаємодія вихрових структур практично не впливає на передню критичну точку, в силу її віддаленості від інтенсивного вихрового течії.

Основні особливості течії, розрахованої за допомогою схеми TVD MinMod, такі ж, як і на рис. 4 і 5.

В табл. 2 наведено результати чисельних розрахунків [13, 37-41] та експериментальні дані [35, 36, 42, 43] значень коефіцієнтів лобового опору та підйомної сили для періодичного течії, а також числа Струхала. Як видно, існує досить широкий діапазон досліджуваних параметрів. Так число Струхала коливається навколо 0,19 і значення, отримане за допомогою схеми TVD MinMod, кілька нижче значення від схеми TVD ISNAS. Відмінність між ними полягає в різниці сумарної чисельної дисипації, кото-

Табл. 2. Значения коэффициентов лобового сопротивления C_x , подъемной силы C_y и чисел Струхала St для кругового цилиндра при числе Рейнольдса 200

Источник	C_x	C_y	St
Данная работа TVD MinMod 2-ой порядок	1.33±0.05	±0.69	0.189
Данная работа TVD ISNAS 3-ий порядок	1.31±0.05	±0.67	0.192
Rogers, Kwak [38] 3-ий порядок	1.29±0.05	±0.75	0.16
Rogers, Kwak [38] 5-ый порядок	1.23±0.05	±0.65	0.185
Rosenfeld [55]	1.46±0.05	±0.69	0.211
Lecoite, Piquet [65] 2-ой порядок	1.46±0.04	±0.70	0.227
Lecoite, Piquet [65] 4-ый порядок	1.58±0.0035	±0.50	0.194
Martinez [66]	1.27±0.0035		
Lin [67]	1.17		
Кудинов [68]		±0.55	0.1905
Thoman, Szewczyk [69]	1.17±0.005		
Wille [70] (эксперимент)	1.3		
Kovasznaу [71] (эксперимент)			0.19
Gaster [72] (эксперимент)			0.1895
Roshko [73] (эксперимент)			0.19

Табл. 3. Зависимость числа Струхала St от Рейнольдса Re

Источник	Числа Рейнольдса		
	50	100	200
Данная работа TVD MinMod 2-ой порядок	0.120	0.162	0.189
Данная работа TVD ISNAS 3-ий порядок	0.123	0.166	0.191
Кудинов [34]	0.129	0.170	0.191
Roshko [35] (эксперимент)	0.121	0.168	0.190
Gaster [36] (эксперимент)	0.122	0.167	0.190

рую каждая из схем вносит в решение.

Несколько периодов колебаний коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления цилиндра от времени, рассчитанные по схеме TVD ISNAS для различных чисел Рейнольдса, представлены на рис. 8. С увеличением Рейнольдса растет амплитуда колебаний коэффициентов подъемной силы и лобового сопротивления, но уменьшается их период.

Зависимость чисел Струхала St от чисел Рейнольдса Re , которые сравниваются с расчетными Кудинова [34], а также экспериментальными данными Roshko [35] и Gaster [36], приведены в табл. 3. Хорошее совпадение обусловлено эффективным методом решения уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости, а также применением схем высокого порядка аппроксимации конвективных чле-

нов, которые играют важную роль при расчете нестационарных течений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реализована методика расчета нестационарных двумерных течений на основе уравнений Навье-Стокса несжимаемой жидкости, записанных в естественных переменных в произвольной системе координат. Алгоритм численного решения исходных уравнений основан на методе искусственной сжимаемости и модифицирован для расчета нестационарных течений. Повышение точности расчетов достигнуто за счет применения свойств TVD и ограничителей потоков для конвективных членов. Проведены верификация методики, сравнение схем ISNAS третьего и MinMod второго по-

рядка на задаче о течении несжимаемой жидкости за круговым цилиндром. Получены структура стационарного и нестационарного течения в следе за цилиндром, коэффициенты лобового сопротивления, подъемной силы, числа Струхала. Выполнено сравнение полученных результатов с расчетными и экспериментальными данными других авторов. Анализ приведенных данных свидетельствует о работоспособности алгоритма и возможности надежно решать нестационарные задачи.

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика.– М.: Мир, 1980.– 616 с.
2. Белов И.А., Исаев С.А., Коробков В.А. Задачи и методы расчета отрывных течений несжимаемой жидкости.– М.: Судостроение, 1989.– 256 с.
3. Патанкар С.В. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости.– М.: Энергоатомиздат, 1984.– 152 с.
4. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ.– М.: Мир, 1981.– 408 с.
5. Chorin A.J. Numerical solution of Navier-Stokes equations // Mathematics of Computation.– 1968.– V. 22.– P. 745-762.
6. Блинова Л.А., Шур М.Л. Метод "масштабирования" для расчета нестационарных течений вязкого газа в широком диапазоне изменения характерных чисел Маха // Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики.– М.: ИПМ, 1991.– С. 34–39.
7. Пейре Р., Тейлор Т.Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости.– Л.: Гидрометеоиздат, 1986.– 352 с.
8. Андерсон Д., Таннехил Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен.– М.: Мир.– 1990.– Т. 1.– 392 с., Т. 2.– 336 с.
9. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкости.– М.: Мир, 1991.– Т. 1.– 501 с., Т. 2.– 552 с.
10. Приходько А.А., Сохацкий А.В. Математическое и экспериментальное моделирование аэродинамики элементов транспортных систем вблизи экрана. - Днепрпетровск: Наука и образование, 1998.– 160 с.
11. Приходько А.А. Компьютерные технологии в аэрогидродинамике и тепломассообмене.– Киев: Наук. думка, 2003.– 382 с.
12. Athavale M.M., Merkle C.L. An upwind differencing scheme for time-accurate solutions of unsteady incompressible flow // AIAA Paper 88-3650, 1988.– P. 225–244.
13. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier-Stokes equations // AIAA J. – 1990. – Vol. 28, N 2. – P. 253–262.
14. Rogers S.E., Kwak D. An upwind differencing scheme for the incompressible Navier-Stokes equations // Journal Numerical Mathematics. – 1991. - Vol. 8. – P. 43–64.
15. Пуллиам Т.Х., Стегер Дж.Л. Расчет трехмерных течений сжимаемого газа с помощью неявного разностного метода // РТК. – 1980. – Т. 18, N 4. – С. 39–50.
16. Roe P.L. Approximate riemann schemes // Journal of Computational Physics. – 1981. – V. 43. – P. 357–372.
17. Roe P.L. Characteristic-based schemes for the Euler equations // Annual review of fluid mechanics. – 1986. – V. 18. – P. 337–365.
18. Hsu C.H., Hartwich P.M. Incompressible Navier-Stokes solutions for a sharp-edged double-delta wing // AIAA Paper 87-0206, 1987. – P. 135–161.
19. Gorski J.J. TVD solution of the incompressible Navier-Stokes equations with an implicit multigrid scheme // AIAA Paper 88 – 3699, 1988. – P. 254–276.
20. Zijlema M. On the construction of third-order accurate TVD scheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains // Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-94-104. – 1994. – 25 p.
21. Колган В.П. Применение принципа минимальных значений производных к построению конечно-разностных схем для расчета разрывных решений газовой динамики // Уч. зап. ЦАГИ. – 1972. – Т. 3, N 6. – С. 68–77.
22. Harten A. A high resolution scheme for the computation of wear solution of hyperbolic conservation laws // J. Comput.Phys. – 1983. – V. 49. – P. 357–393.
23. Chang J.L.C., Kwak D. On the method of pseudo-compressibility for numerically solving incompressible flows // AIAA Paper 84-0252, Reno, Nov., – 1984. – N 10. – P. 190–196.
24. Jameson A., Schmidt W., Turkel E. Numerical solutions of the Euler equations by finite volume methods using Runge-Kutta time-stepping schemes // AIAA Paper 81-1259, – 1981. – P. 213–232.
25. Swanson R.C., Turkel E. On central difference and upwind schemes // Journal of Computational Physics. – 1992. – V. 43. – P. 292–306.
26. Takami H., Keller H. B. Steady two-dimensional viscous flow of an incompressible fluid past a circular cylinder // Phys. Fluids Suppl. – 1969. – V. 12. – P. 11–51.
27. Dennis S., Chang G. Z. Numerical solutions for steady flow past a circular cylinder at reynolds numbers up to 100 // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42. – P. 471–493.
28. Tuann S. Y., Olson M. D. Numerical studies of the flow around a circular cylinder by a finite element method // Comp. and Fluids. – 1978. – V. 6. – P. 219–234.
29. Braza M., Chassaing P., Minh H. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 8. – P. 79–98.
30. Coutanceau M., Bernard R. Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady Flow // J. Fluid Mech. – 1977. – V. 79. – P. 231–254.
31. Tritton D.J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers // J. Fluid Mech. – 1959. – V. 6. – P. 547–567.
32. Белов И.А., Кудрявцев Н.А. Теплоотдача и сопротивление пакетов труб. – Л.: Энергоатомиздат, 1987. – 223 с.
33. Белоцерковский О.М. Численное моделирование в механике сплошных сред. – М.: Наука, 1984. – 520 с.

34. *Кудинов П.И.* Диссертация на соискание научной степени канд. физ.-матем. наук. Численное моделирование гидродинамики и теплообмена в задачах с конвективной неустойчивостью и неединственным решением. – Днепропетровск, 1999, – 229 с.
35. *Roshko A.* On the development of turbulent wakes from vortex streets // *NACA Rep.* 1191, 1954. – P. 32–65.
36. *Gaster M.* Vortex shedding from circular cylinder at low Reynolds numbers // *Journal. Fluid Mech.* – 1971. – V. 46, part 4. – P. 751–756.
37. *Rosenfeld M., Kwak D. and Vinokur M.* A Solution method for unsteady, incompressible Navier-Stokes equations in generalized coordinate systems // *AIAA Paper 88-0718, AIAA 26th Aerospace Sciences Meeting, Reno, Nevada, January 11–14, 1988.* – P. 92–106.
38. *Lecoq Y., Piquet J.* On the use of several compact methods for the study of unsteady incompressible viscous flow round a circular cylinder // *Computers and Fluids.* – 1984. – V. 12. -N. 4, – P. 255–280.
39. *Martinez G.* Caracteristiques dynamiques et thermiques de l'écoulements autour d'un cylindre circulaire a nombres de Reynolds moderes // *These D. I.* – I. N. P. Toulouse, 1979. – P. 186
40. *Lin C.L., Pepper D.W., Lee S.C.* Numerical methods for separated flow solutions around a circular cylinder // *AIAA J.* – 1976. – V. 14, N 2. – P. 900–907.
41. *Thoman D., Szeewczyk A.* Time dependent viscous flow over a circular cylinder // *Phys. Fluids.* – 1969. – V. 1, – P. 79–86.
42. *Wille R.* Karman Vortex Streets // *Adv. Appl. Mech.* – 1960. – V. 6. – P. 273–284.
43. *Kovasznay L.S.G.* Hot-wire Investigation of the wake behind cylinders at low Reynolds numbers // *Proc. Roy. Soc. A.* – 1949. – V. 198. – P. 174–190.