

## Критериальные соотношения для определения остаточного ресурса материалов

А. А. Лебедев<sup>а</sup>, В. М. Михалевич<sup>б</sup>

<sup>а</sup> Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

<sup>б</sup> Винницкий национальный технический университет, Винница, Украина

*Представлены результаты, позволяющие создать алгоритм определения остаточного ресурса в рамках тензорного подхода к описанию поврежденности материалов при неупругом деформировании. Получены явные конечные критериальные зависимости для определения остаточного ресурса, обобщающие известные соотношения на более широкий случай процессов нагружения.*

**Ключевые слова:** остаточный ресурс, тензор, повреждение, нагружение.

Целью настоящей работы является получение, в рамках тензорного описания поврежденности [1, 2], критериальных соотношений, позволяющих определить остаточный ресурс работы материалов при известной предыстории нагружения.

Для моделирования разрушения в условиях пластического деформирования, ползучести и других процессов используется математический аппарат, развитый в [1]. При известных исходных свойствах материала (они будут уточнены на конкретных примерах) и истории нагружения компоненты девиатора повреждений  $\psi_{ij}$  для данного текущего состояния  $q_d$ , согласно принятым допущениям [1, 2], можно представить в виде

$$\psi_{ij}(q_d) = \int_0^{q_d} f(q; \eta_i) \eta_{ij}(q) dq; \quad (1)$$

$$h_{ij}(q) = a\beta_{ij}(q) + b \left[ \beta_{ik}(q)\beta_{kj}(q) - \frac{1}{3}\delta_{ij} \right], \quad (2)$$

где  $\beta_{ij}$  – направляющий тензор приращений деформаций или напряжений;  $q$  – параметр нагружения (деформация или время);  $a$ ,  $b$  – коэффициенты тензорной нелинейности [1, 2];  $\delta_{ij}$  – единичный тензор Кронеккера;  $\eta_i$  – совокупность аргументов, характеризующих напряженно-деформированное состояние и свойства материала.

Поставленная задача состоит в том, чтобы определить остаточный ресурс материала. (Что именно подразумевается под остаточным ресурсом будет конкретизировано в каждом отдельном случае.)

В общем случае компоненты остаточного девиатора повреждений можно определить согласно (1)

$$\Delta\psi_{ij}^* = \Delta\psi_{ij}(q^*) = \int_{q_d}^{q^*} f(q; \eta_i) h_{ij}(q) dq, \quad (3)$$

где  $q^*$  соответствует моменту исчерпания остаточного ресурса и определяется из условия [1, 2]

$$\psi_u + 2\psi_{ij}\Delta\psi_{ij}^* + \Delta\psi_u^* = 1, \quad (4)$$

где

$$\psi_u = \psi_{ij}\psi_{ij}, \quad \Delta\psi_u^* = \Delta\psi_{ij}^*\Delta\psi_{ij}^*.$$

Применительно к пластическому деформированию соотношение (1) можно представить в виде [1]

$$\psi_{ij}(E_u^{\pi}) = \int_0^{E_u^{\pi}} \frac{n}{E_{*c}(\eta(E_u))} \left( \frac{E_u}{E_{*c}(\eta(E_u))} \right)^{n-1} h_{ij}(E_u) dE_u, \quad (5)$$

где  $E_u^{\pi}$  – накопленная пластическая деформация;  $E_{*c}(\eta)$  – диаграмма пластичности;  $\eta$  – показатель напряженного состояния [3];  $h_{ij}$  – тензор, определяемый направляющим тензором приращений деформаций  $\beta_{ij}$  и коэффициентом тензорной нелинейности  $b$  [1] (при  $b = 0$  имеем тензорно-линейную модель, для которой  $h_{ij} = \beta_{ij}$ );  $n$  – экспериментально определяемый параметр.

Далее займемся определением остаточного ресурса для любого вида простого деформирования ( $\beta_{ij} = \beta_{ij}^{(0)} = \text{const}$ ,  $\eta = \eta_0 = \text{const}$ ). Для этого случая согласно (3)–(5) получим

$$\Delta\psi_* = \left[ \left( \frac{E_u^{(\pi)}}{E_{*0}} \right)^n - \psi_{ij}(E_u^{(\pi)}) h_{ij}^{(0)} + \sqrt{(\psi_{ij}(E_u^{(\pi)}) h_{ij}^{(0)})^2 - \psi_u(E_u^{(\pi)}) + 1} \right]^{1/n} - \frac{E_u^{(\pi)}}{E_{*0}}, \quad (6)$$

где  $\Delta\psi_* = \Delta E_*^{(0)} / E_{*0}$  – остаточный ресурс;  $E_{*0} = E_{*c}(\eta_0)$ ;  $\Delta E_*^{(0)}$  – остаточная пластическая деформация до разрушения.

Рассматривая некоторые частные случаи процессов деформирования до момента достижения девиатором повреждений величины  $\psi_{ij}(E_u^{(\pi)})$  будем получать из соотношения (7) соответствующие критериальные зависимости, известные ранее [1].

Так, для многоэтапного деформирования, состоящего из ряда последовательных конечных этапов, в пределах которых деформация является простой, имеем

$$\psi_u(E_u^{(n)}) = \sum_{m=1}^{n-1} \left\{ 2h_{ij}^{(m)} F_m \left[ \sum_{l=m}^{n-1} h_{ij}^{(l)} F_l \right] - F_m^2 \right\}; \quad (7)$$

$$\psi_{ij}(E_u^{(n)}) h_{ij}^{(0)} = h_{ij}^{(n)} \sum_{m=1}^{n-1} h_{ij}^{(m)} F_m; \quad (8)$$

$$F_m = \left( \sum_{k=1}^m \psi_k \alpha_{km} \right)^n - \left( \sum_{k=1}^{m-1} \psi_k \alpha_{km} \right)^n; \quad (9)$$

$$\psi_k = \frac{E_u^{(k)} - E_u^{(k-1)}}{E_{*k}}, \quad \alpha_{km} = \frac{E_{*c}(\eta^{(k)})}{E_{*c}(\eta^{(m)})}, \quad \Delta\psi = \Delta\psi_{*n}. \quad (10)$$

Получение явных расчетных зависимостей для частных случаев многоэтапного деформирования – работа достаточно трудоемкая. Для ее облегчения была составлена процедура в среде пакета символьной математики Maple, которая практически полностью автоматизирует процесс определения указанных зависимостей и выполнение соответствующих расчетов.

Применительно к двухэтапному деформированию, когда на первом этапе при  $0 \leq E_u \leq E_u^{(1)}$  справедливо  $\beta_{ij}(E_u) = \beta_{ij}^{(1)}$ ,  $\eta(E_u) = \eta^{(1)}$ , а на втором, при  $E_u^{(1)} < E_u < E_* - \beta_{ij}(E_u) = \beta_{ij}^{(2)}$ ,  $\eta(E_u) = \eta^{(2)}$ , соотношение (6), с учетом (7)–(10), преобразуется к виду

$$\psi_{*2} = \left[ (\psi_1 \alpha_{12})^{n_2} - \psi_1^{n_1} I_{12} + \sqrt{\psi_1^{2n_1} (I_{12}^2 - 1) + 1} \right]^{1/n_2} - \psi_1 \alpha_{12}. \quad (11)$$

Здесь  $\psi_1 = E_u^{(1)} / E_*(\eta^{(1)})$  – использованный ресурс пластичности на первом этапе;  $\psi_{*2} = (E_* - E_u^{(1)}) / E_{*c}(\eta^{(2)})$  – остаточный ресурс пластичности на втором этапе;  $E_*$  – накопленная пластическая деформация до разрушения при данном нестационарном процессе;  $\alpha_{12} = E_*(\eta^{(1)}) / E_*(\eta^{(2)})$ ;  $I_{12}$  – инвариантный параметр, который определяется направляющими тензорами  $\beta_{ij}^{(1)}$  и  $\beta_{ij}^{(2)}$ , а также коэффициентом  $b$ ; параметры модели  $n_1$  и  $n_2$  вычисляются по результатам экспериментов при двухэтапном деформировании.

Применительно к трехэтапному деформированию получим

$$\psi_{*3} = [KI_{32} - \psi_1^n I_{31} + \sqrt{K_1 + K_2^n}]^{1/n} - K_2, \quad (12)$$

где

$$K = (\psi_1 \alpha_{12} + \psi_2)^n - (\psi_1 \alpha_{12})^n; \quad (13)$$

$$K_1 = \psi_1^{2n} (I_{31}^2 - 1) + 2\psi_1^n I_{31} I_{32} K + (KI_{32})^2 + 1 - K^2 - 2\psi_1^n KI_{12}; \quad (14)$$

$$K_2 = \psi_1 \alpha_{13} + \psi_2 \alpha_{23}. \quad (15)$$

Рассмотрим частный случай трехэтапного деформирования призматического тела, когда на всех трех этапах выполняется сжатие, причем на первом и третьем – осевое, а на втором – поперечное. Для данного случая справедливо

$$\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 1, \quad I_{31} = 1, \quad I_{12} = I_{32} = -0,5 \quad (16)$$

и соотношение (12) существенно упрощается

$$\begin{aligned} \psi_{*3} = & [-1,5\psi_1^n + 1,5(\psi_1 + \psi_2)^n + \\ & + \sqrt{1 - 0,75[(\psi_1 + \psi_2)^n - \psi_1^n]^2}]^{1/n} - \psi_1 - \psi_2. \end{aligned} \quad (17)$$

На рис. 1 приведены расчетные зависимости остаточного ресурса пластичности на третьем этапе  $\psi_{*3}$  в зависимости от использованного ресурса пластичности на втором  $\psi_2$  этапе. Каждая кривая соответствует определенному значению использованного ресурса пластичности на первом этапе  $\psi_1$ . Исключением есть крайняя справа кривая, представляющая собой зависимость остаточного ресурса пластичности на третьем этапе  $\psi_{*3}$  от использованного ресурса пластичности на первом этапе  $\psi_1$  при условии полного исчерпания ресурса пластичности на втором этапе ( $\psi_2 = \psi_{*2}$ ). Следует заметить, что, согласно представленной тензорной модели, материал, исчерпавший ресурс пластичности при данных условиях деформирования, может воспринимать дальнейшую пластическую деформацию – при изменении направлений главных приращений деформаций. Иными словами речь идет об одном из следствий деформационной анизотропии предельных деформаций. А именно – предельная деформация для данного вида деформации неодинакова в разных направлениях. Важно, что в рамках рассматриваемой модели деформационная анизотропия предельных деформаций описывается отдельно для каждого простого деформирования, характеризуемого совокупностью показателей  $\eta_i$ .

Толстая линия на рис. 1 соответствует значению  $\psi_1 = 0$  и является, фактически, зависимостью остаточного ресурса пластичности на сжатие в поперечном направлении в зависимости от использованного ресурса пластичности на сжатие в осевом направлении. Экспериментальные данные (○ – 9ХС, □ – Р6М5 [4]), на основании которых подобрано значение  $n = 1,3$ , относятся именно к этому случаю.

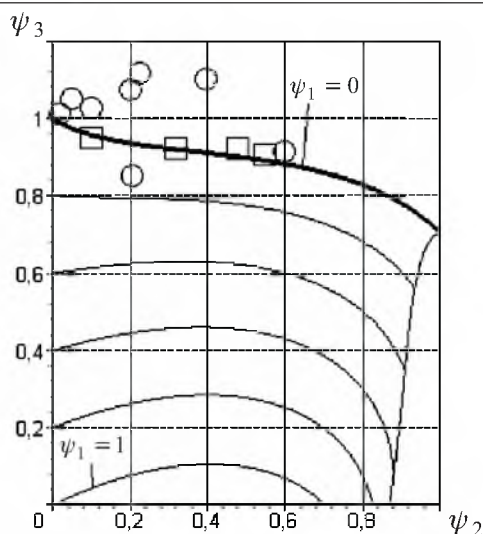


Рис. 1. Остаточный ресурс пластичности при трехэтапном сжатии.

Анализ данных рис. 1, показывает, что при изменении  $\psi_1$  в пределах 0...0,6 использование ресурса пластичности на втором этапе в тех же пределах практически не влияет на остаточный ресурс. Более того, при  $\psi_1 > 0,5$  становится ярко выраженным эффект восстановления пластичности в осевом направлении после некоторой степени деформации в поперечном направлении. Данный эффект можно объяснить частичным залечиванием накопленных микрповреждений в материала при изменении направления деформирования.

Важной является задача определения остаточной пластичности после воздействия на материал определенного числа циклов деформирования. В [1] приведены соотношения между числом циклов деформирования до разрушения и амплитудой пластической деформации для достаточно общего случая, когда под циклом понимается произвольная комбинация двухэтапного деформирования. С использованием в представлении (5) вместо степенной – квадратичной аппроксимации, для частного случая циклического деформирования – знакопеременного кручения, получена зависимость остаточного ресурса пластичности на кручение от числа циклов  $N$  предварительного деформирования с амплитудой  $\Delta$

$$\psi_{*n} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c}-1\right) - 2N\Delta + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{c}-1\right)^2 + \left(\frac{1}{c}-1\right)2N\Delta + 4N^2\Delta^2 + 2N\Delta^2 + \frac{1}{c}}. \quad (18)$$

Здесь  $c$  – параметр квадратичной аппроксимации,  $0 < c \leq 1$ . Полученное соотношение находится в хорошем качественном и удовлетворительном количественном соответствии с экспериментальными данными работы [5].

Применительно к процессам ползучести соотношение (1) можно записать в виде [1, 2]

$$\psi_{ij}(t^{\text{Д}}) = \int_0^{t^{\text{Д}}} \frac{m \exp[-m(t^{\text{Д}} - \tau)]}{1 - \exp\{-mt_{*c}[\sigma_u(\tau), \eta(\tau)]\}} \beta_{ij}(\tau) d\tau, \quad (19)$$

где  $t^{\text{Д}}$  – момент времени, предшествующий определению остаточного ресурса;  $t_{*c} = t_{*c}[\sigma_u(\tau), \eta(\tau)]$  – поверхность длительной прочности [2];  $\beta_{ij}$  – направляющий тензор напряжений;  $m$  – экспериментально определяемый параметр.

При определении остаточного ресурса по длительной прочности в соответствии с (3), (4), (19) получаем соотношение

$$\Delta\psi_* = \frac{\ln \left[ 1 - (1 - e^{-mt_{*o}}) \left( \psi_{ij}(t^{\text{Д}}) \beta_{ij}^{(o)} + \sqrt{(\psi_{ij}(t^{\text{Д}}) \beta_{ij}^{(o)})^2 - \psi_u(t^{\text{Д}}) + 1} \right) \right]}{-mt_{*o}}, \quad (20)$$

где  $\Delta\psi_* = (t_* - t^{\text{Д}})/t_{*o}$  – остаточный ресурс;  $t_{*o} = t_{*c}(\sigma_u^{(o)}, \eta_o)$ ;  $t_*$  – общее время до разрушения.

Рассмотрим двухступенчатое нагружение, которое отличается от двухэтапного нагружения тем, что направляющий тензор напряжений остается неизменным в течение всего процесса нагружения. Изменяться могут только интенсивность напряжений и среднее напряжение. Для такого процесса соотношение (22) приобретает следующий вид:

$$\psi_{*2} = \frac{\alpha_{12}}{mt_{*1}} \ln \left\{ e^{m\psi_1 t_{*1}} - (1 - e^{-mt_{*1}/\alpha_{12}}) \frac{e^{m\psi_1 t_{*1}} - 1}{1 - e^{-mt_{*1}}} \right\} - \psi_1 \alpha_{12} + 1. \quad (21)$$

На рис. 2 приведены расчетные и экспериментальные данные по определению остаточного ресурса в условиях ползучести при ступенчатом растяжении. Для кривых 5, 6 значение параметра  $m$  определялось из аппроксимации кривой длительной прочности при растяжении. Количественное несоответствие этих кривых экспериментальным данным свидетельствует о недостаточности данных по стационарному нагружению для определения данного параметра.

Для кривых 1–4 значение параметра  $m$  определялось по результатам двухступенчатого растяжения с частичной разгрузкой. При этом расчет двухступенчатого нагружения с догрузкой является прогнозным и удовлетворительно согласуется с представленными данными.

Важным практическим приложением полученных результатов является вывод о проведении экспресс-испытаний. Сущность таких испытаний хорошо видна из данных рис. 3. Суммарное время до разрушения  $t_{*\Sigma}$  определяется соотношением

$$t_{*\Sigma} = \psi_1 t_{*1} + \Delta\psi_2 t_{*2}, \quad (22)$$

где  $\Delta\psi_2$  определяется выражением (21).

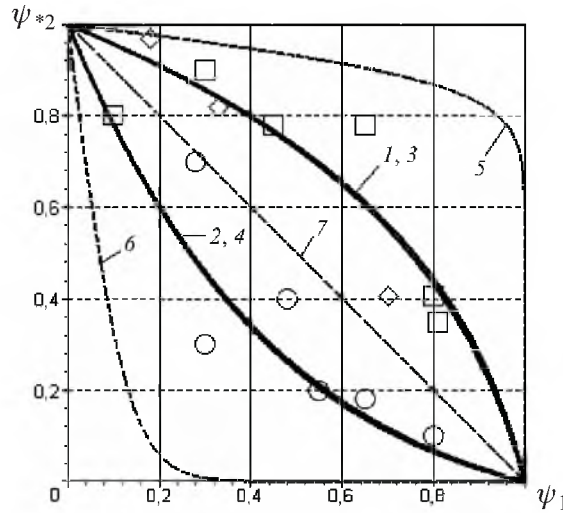


Рис. 2. Остаточный ресурс длительной прочности при двухступенчатом растяжении: 1–6 – расчет по (21); 1, 2 –  $m = 0,04$ ; 3, 4 –  $m = 0,015$ ; 5, 6 –  $m = 0,32$ ; 1, 5,  $\square$  –  $t_{*1} = 7,05$ ; 2, 6,  $\circ$  –  $t_{*1} = 64$ ; 3,  $\diamond$  –  $t_{*1} = 7,6$ ; 4 –  $t_{*1} = 153$ ;  $\square$ ,  $\circ$  – эксперимент [6], сталь 316 при 550°C;  $\diamond$  – эксперимент [7], сплав XH70BMTIO при 800°C.

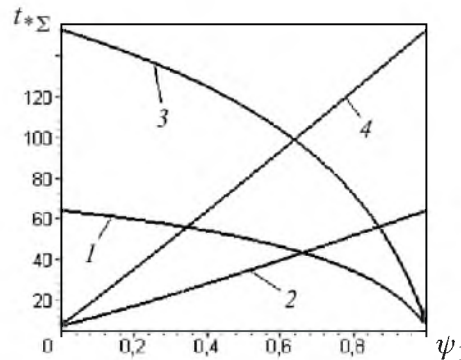


Рис. 3. Суммарное время до разрушения при двухступенчатом растяжении. Обозначения те же, что и на рис. 2.

Вместо долгосрочных испытаний на длительную прочность при небольших напряжениях можно проводить двухступенчатое нагружение с частичной разгрузкой для определения  $t_{*\Sigma}$ , с последующим определением из (22) величины  $t_{*2}$ . При больших значениях  $\psi_1$ , согласно приведенным данным, длительность испытаний можно сократить более чем в два раза.

## Резюме

Наведено результати, що дозволяють створити алгоритм визначення залишкового ресурсу в рамках тензорного підходу до опису пошкоджень мате-

ріалів при непружному деформуванні. Одержано явні кінцеві критеріальні залежності для визначення залишкового ресурсу, що узагальнюють відомі співвідношення на більш широкий випадок процесів навантажень.

1. *Михалевич В. М.* Тензорні моделі накопичення пошкоджень. – Вінниця: “Універсум-Вінниця”, 1998. – 195 с.
2. *Лебедев А. О., Михалевич В. М.* До теорії тривалої міцності // Доп. НАН України. – 1998. – № 5. – С. 57 – 62.
3. *Лебедев А. А., Михалевич В. М.* О выборе инвариантов напряженного состояния при решении задач механики материалов // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 5 – 14.
4. *Дель Г. Д., Томилов Ф. К., Богомолов Ю. С.* Пластичность металлов при немонотонном деформировании // Изв. вузов. Черная металлургия. – 1982. – № 6. – С. 34 – 37.
5. *Красневский С. М., Макушок Е. М., Щукин В. Я.* Разрушение металлов при пластическом деформировании. – Минск: Наука и техника, 1983. – 176 с.
6. *Гомюк Р., Бюи-Куок Т., Бирон А., Бернард М.* Изучение поведения нержавеющей стали 427 при нагружении по схемам усталости, ползучести и совместного действия ползучести и усталости // Совр. машиностроение. – Сер. Б. – 1991. – № 1. – С. 14 – 23.
7. *Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник / Под общ. ред. С. А. Шестерикова.* – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.

Поступила 04. 11. 2005