

## **Разработка методов расчета элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов на основе построения физико-механических моделей**

**Л. В. Кукса, Л. М. Арзамаскова, Е. Е. Евдокимов, А. В. Сергеев**

Волгоградский государственный архитектурно-строительный университет, Волгоград, Россия

*Разработаны методы расчета элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов на основе построения векториальных моделей и исследования масштабного эффекта упругих свойств. Приведены результаты расчета напряженно-деформированных состояний с учетом структурных и геометрических факторов концентрации напряжений и деформаций.*

**Ключевые слова:** элемент конструкции, структурно-неоднородные материалы, векториальная модель, масштабный эффект, напряженно-деформированное состояние, концентрация напряжений и деформаций.

В разработке методов расчета элементов конструкций большое значение имеет учет реальных свойств конструкционных материалов. Классические представления о сплошном, однородном, изотропном, линейно-упругом теле в большинстве случаев не удовлетворяют практику, так как почти все материалы, применяемые в технике (металлы и сплавы с неоднородной поликристаллической структурой, бетон, кирпич, дерево, различного рода армированные пластики и т.п.) являются композиционными материалами, обладающими неоднородностью строения и анизотропией свойств. Широкое распространение в технике структурно-неоднородных материалов требует разработки и создания механики их деформирования и разрушения, а также расчетных моделей структурно-неоднородных тел [1, 2].

В настоящей работе в качестве структурно-неоднородных материалов рассмотрены поликристаллические металлы с кубической и гексагональной решетками, а также бетон, представляющий собой композит матрица–заполнитель [3]. Матрица образована при затвердевании цементного раствора, в качестве заполнителя использован кварц, который является одним из самых распространенных породообразующих минералов земной коры, из которых получают щебень и гравий. Существуют две модификации кварца: гексагональный кварц и тригональный кварц.

Поликристаллические материалы являются наиболее типичными структурно-неоднородными материалами, широко распространенными на практике [1]. Сложность такой системы, какой является поликристаллический материал, обуславливает целесообразность ее рассмотрения на различных уровнях [2]:

1) самым нижним (микроуровень) является уровень структурной неоднородности, масштаб этого уровня равен характерному размеру, например, размеру зерна в поликристаллическом агрегате или части размера зерна;

2) следующим уровнем (мезоуровень) может служить группа зерен поликристаллического агрегата, образующих минимальный объем, который можно наделять осредненными свойствами;

3) самый высокий уровень (макроуровень) определяется характерными размерами рассчитываемого элемента конструкции.

Связь между напряжениями и деформациями анизотропного тела в тензорной форме задается зависимостями [4]:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = s_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}$ ,  $\sigma_{kl}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ ,  $\varepsilon_{kl}$  – тензоры напряжений и деформаций соответственно;  $c_{ijkl}$ ,  $s_{ijkl}$  – упругие модули и податливости.

Компоненты  $c'_{ijkl}$  и  $s'_{ijkl}$  для лабораторной системы координат определяются на основании использования закона преобразования тензора 4-го ранга:

$$c'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} c_{mnpq}, \quad s'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} s_{mnpq}. \quad (2)$$

Значения тензора 4-го ранга для кристаллографических осей координат находим на основе известных матриц упругих модулей и податливостей [5].

Матрица направляющих косинусов при исследовании масштабного эффекта рассчитывалась с помощью углов Эйлера, задаваемых случайным образом [2].

Для определения упругих свойств поликристаллов использовалось приближение Хилла [6]

$$\langle s_{ij} \rangle_H = \frac{1}{2} \left[ \langle c_{ij} \rangle_V^{-1} + \langle s_{ij} \rangle_R \right], \quad (3)$$

т.е. вычисление среднего арифметического (или среднего геометрического) из значений упругих модулей и податливостей, полученных на основе применения приближений Фойгта и Ройсса.

По известным значениям членов матрицы (3) можно определить модуль Юнга  $E_H$ , модуль сдвига  $G_H$  и коэффициент Пуассона  $\nu_H$  [2]:

$$E_H = \frac{1}{\langle s'_{11} \rangle_H}; \quad G_H = \frac{1}{2[\langle s'_{11} \rangle_H - \langle s'_{12} \rangle_H]}; \quad \nu_H = \frac{\langle s'_{12} \rangle_H}{\langle s'_{11} \rangle_H}. \quad (4)$$

Исследование масштабного эффекта требует применения осреднения для конечного числа зерен, причем если рассматривать задачу в статистической постановке, то процесс осреднения для объема поликристалла с различным числом случайно ориентированных зерен должен выполняться достаточно большое число раз.

Разработанный метод оценки масштабного эффекта упругих свойств однофазных и двухфазных поликристаллических материалов основан на осреднении упругих свойств отдельных объемов поликристалла с различным количеством зерен и соотношением объемов фаз. Оценку масштабного

эффекта упругих свойств можно выполнить по изменению коэффициента вариации в зависимости от числа осредняемых зерен  $n$ . Предварительно определяются средние квадратические отклонения модуля Юнга  $\sigma_{E(n)}$  и модуля сдвига  $\sigma_{G(n)}$  для различных значений  $n$ , которое принимается равным 1, 2, 3, ... и т.д. При этом число случаев различных зерен со случайно ориентированными включениями для принятого значения  $n$ , в настоящих расчетах принималось равным 100. Затем вычислялись значения коэффициентов вариации  $V_E$  как отношение среднего квадратического отклонения  $\sigma_{E(n)}$  к среднему значению  $E$  для модуля Юнга и аналогично  $V_G$  для модуля сдвига.

Для построения векториальных моделей использовалась сферическая система координат. Длина радиуса-вектора вычислялась в зависимости от долготы  $\varphi$  и широты  $\theta$ , задаваемых с определенными интервалами [7]. Векториальные модели модуля Юнга кристаллов с различными типами решеток (кубической, гексагональной и тригональной) показаны на рис. 1, из рассмотрения которых можно судить о высокой анизотропии упругих свойств. Для изотропного материала векториальные модели представляют собой сферическую поверхность, так как упругие свойства не зависят от направления. Для анизотропных материалов векториальные модели позволяют определить направления по отношению к кристаллографическим осям, для которых значения модуля Юнга являются экстремальными.

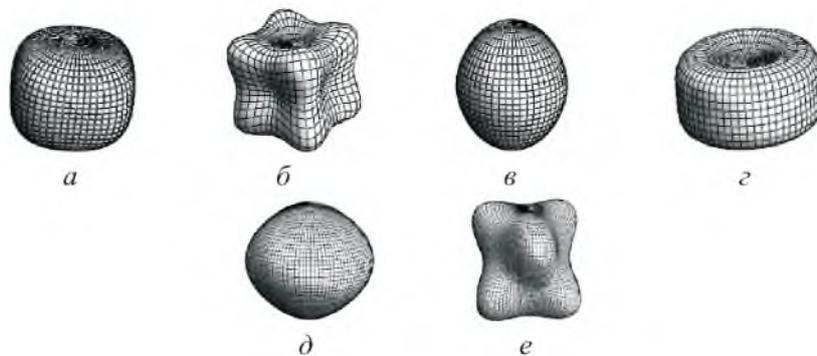


Рис. 1. Векториальные модели модуля упругости  $E$  для кубических кристаллов:  $a$  – алюминия;  $b$  – железа, гексагональных кристаллов;  $v$  – титана;  $z$  – цинка;  $d$  – кварца;  $e$  – тригонального кристалла кварца.

Кривые изменения коэффициентов вариации модуля Юнга  $V_E$  от возрастания  $n$  (увеличение числа зерен) для однофазных поликристаллических материалов железа, титана, цинка алюминия и двухфазных поликристаллических материалов, составленных из зерен железа и титана, цинка и алюминия показаны на рис. 2. Аналогичные кривые были построены для изменения коэффициентов вариации модуля сдвига  $V_G$  от  $n$ .

В данных композициях железо и цинк являются более анизотропными, чем титан и алюминий. Соответственно и кривые изменения коэффициентов вариации модуля Юнга для однофазных железа (кривая 1) и цинка (кривая 6) располагаются выше. По мере уменьшения содержания железа (кривые 2–4)

и цинка (кривые 7–9) наблюдается снижение значений коэффициентов вариации. Для однофазных титана (кривая 5) и алюминия (кривая 10) зависимости коэффициентов вариации от  $n$  располагаются наиболее низко (ниже других зависимостей, см. на рис 2 кривые 1–4, 6–9). Для слабоанизотропных материалов алюминия и титана уже при  $n = 4–5$  (что соответствует количеству зерен 20...25 в квадратной элементарной ячейки поликристалла) значения упругих постоянных мало отличаются от средних значений. Для железа, цинка (кривые 1, 6)  $n = 6–8$ , что соответствует количеству зерен в элементарном объеме 36–64. Для двухфазных поликристаллов  $n$  принимает промежуточное значение.

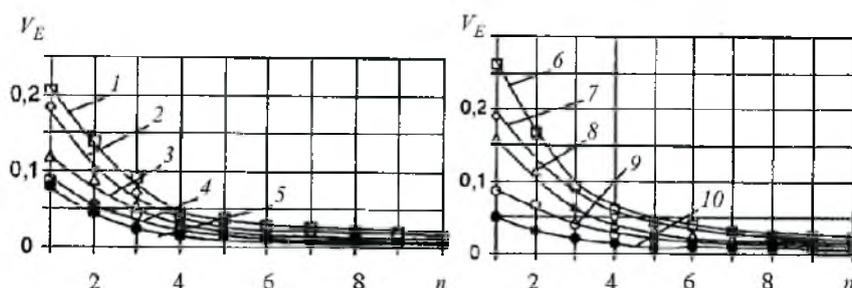


Рис. 2. Масштабный эффект упругих свойств однофазных и двухфазных поликристаллических материалов: изменение коэффициента вариации модуля Юнга  $V_E$  (1 – для железа, 2–4 – для двухфазного поликристалла железо–титан с объемным содержанием железа  $\psi = 0,75$ ;  $\psi = 0,5$  и  $\psi = 0,25$  соответственно; 5 – для титана; 6 – для цинка; 7–9 – для двухфазного поликристалла цинк–алюминий с содержанием цинка  $\psi = 0,75$ ;  $\psi = 0,5$  и  $\psi = 0,25$  соответственно; 10 – для алюминия).

Число включений кварца в минимальном объеме бетона, который можно наделить осредненными свойствами макрообъема, можно определить, исследуя масштабный эффект упругих свойств кварца.

Из рис. 3 видно, что, начиная с числа  $n \approx 12$  включений кварца коэффициент вариации не превышает 0,05, т.е. такой объем можно наделить осредненными свойствами макрообъема. Используя разработанные методы осреднения упругих свойств для композита, состоящего из изотропной матрицы и анизотропных включений, рассчитаны средние квадратические отклонения и коэффициенты вариации для модуля Юнга бетона. Здесь значения  $n = 8–10$ , начиная с которых коэффициент вариации не превышает 0,05.

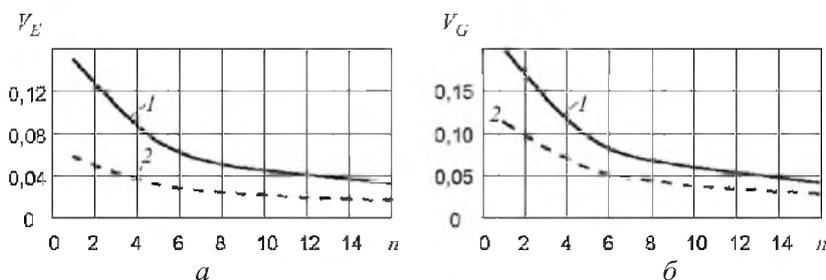


Рис. 3. Масштабный эффект модуля Юнга  $E$  (а) и модуля сдвига  $G$  (б): 1 – для тригонального кварца; 2 – для гексагонального кварца.

Модель структурно-неоднородного тела рассчитывали с использованием метода конечных элементов. Формирование системы уравнений (5) включает вычисление матрицы жесткости [3] для группы зерен, образующих элементарный объем (6) как сумму соответствующих  $n$  членов матрицы жесткости отдельных элементов (7)

$$[K]\{\delta\} = \{F\}; \quad (5)$$

$$K_{sl} = \sum_1^n k_{ij}; \quad (6)$$

$$[k] = [D]^T [E_\varepsilon] [D] V, \quad (7)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости элементарной ячейки минимального объема;  $\{\delta\}$  – вектор перемещений;  $\{F\}$  – вектор нагрузок;  $[k]$  – матрица жесткости отдельного элемента;  $[D]$  – некоторая прямоугольная матрица, элементы которой зависят от вида конечного элемента и координат рассматриваемой точки;  $[E_\varepsilon]$  – матрица упругих свойств;  $V$  – объем элемента.

Решение системы уравнений (5) позволяет вычислить вектор деформаций  $\{\varepsilon\}$  и напряжений  $\{\sigma\}$  по формулам

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\delta\}; \quad (8)$$

$$\{\sigma\} = [E_\varepsilon]\{\varepsilon\}. \quad (9)$$

Ниже приведены результаты, полученные с применением разработанного метода расчета для поликристаллических материалов и бетона, показывающие необходимость учета реальных свойств конструкционных материалов. В элементах конструкций из анизотропных, структурно-неоднородных материалов значения коэффициентов концентрации напряжений могут существенно отличаться от значений, полученных для изотропных материалов [8]. На рис. 4 приведены значения коэффициентов концентрации нормальных напряжений, полученных по результатам расчета пластины, ослабленной эллиптическим отверстием с соотношением полуосей  $a/b = 2$ , для изотропной пластины и с учетом анизотропии упругих свойств. Для изотропного тела коэффициент концентрации нормальных напряжений  $\alpha_\sigma = 5$ . С учетом анизотропии упругих свойств коэффициенты концентрации нормальных напряжений  $\alpha_\sigma = 6,74$  и  $\alpha_\sigma = 8,96$  для титана и железа соответственно.

На рис. 5 приведены результаты расчета модели бетона с различными по форме заполнителями. Как видно из рис. 5, распределение напряжений имеет неоднородный характер. Из этих графиков видно, что напряжения, возникающие в зернах заполнителя, значительно превышают средние значения. В местах, прилегающих к включению, наблюдается зона разгрузки в матрице цементно-песчаного раствора. Напряжения, возникающие в зернах

заполнителя, зависят от формы заполнителя. Наименьшими они оказываются в зернах сферической формы (рис. 5,а,б), а наибольшими – в зернах, имеющих форму тетраэдра (рис. 5,в,г). Различие в распределении напряжений в зернах заполнителя также должно быть связано с различием в упругих свойствах матрицы и заполнителя. В данной модели, например, модуль упругости  $E$  изотропной матрицы, равен 9,8 ГПа, а заполнителя кварца – 98,3 ГПа.

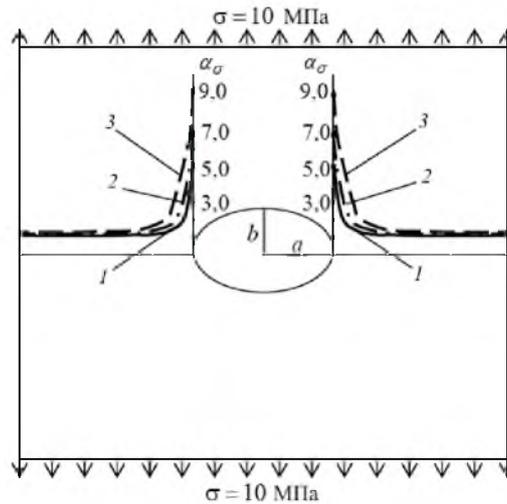


Рис. 4. Эпюры нормальных напряжений для пластины, ослабленной эллиптическим отверстием с соотношением полуосей  $a/b = 2$ : 1 – без учета анизотропии упругих свойств; 2, 3 – с учетом анизотропии упругих свойств для титана и железа соответственно.

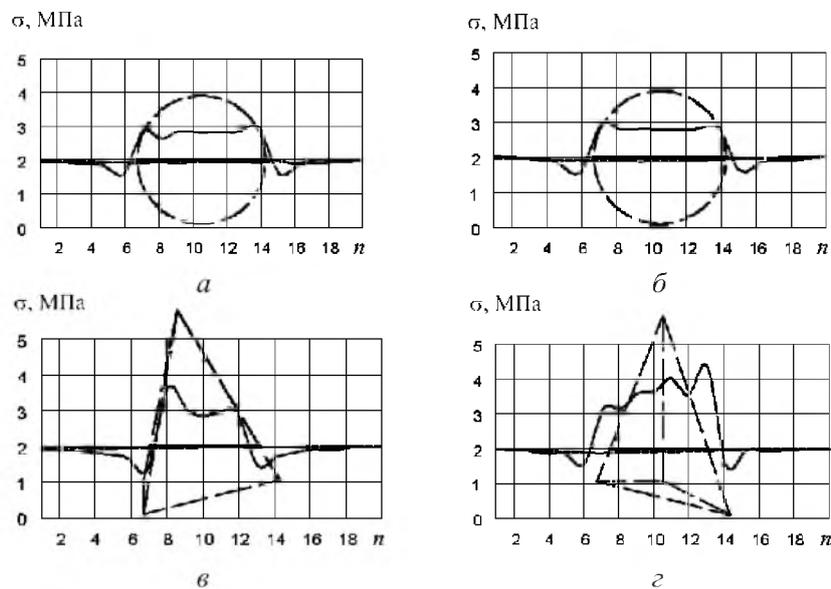


Рис. 5. Графики зависимости напряжений по линиям, проходящим через различные включения: а, б – по двум взаимно перпендикулярным линиям, проходящим через сферические включения; в, г – то же, через включения в виде тетраэдра.

**Заключение.** Разработка методов расчета элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов на основе построения физико-механических моделей, позволяет рассчитывать напряженно-деформированные состояния в элементах конструкций с учетом анизотропии упругих свойств, структурной неоднородности и геометрических факторов концентрации напряжений.

### **Резюме**

Розроблено методи розрахунку елементів конструкцій із структурно-неоднорідних матеріалів на основі побудови векторіальних моделей та досліджень масштабного ефекту пружних властивостей. Наведено результати розрахунку напружено-деформованих станів з врахуванням структурних і геометричних факторів концентрації напружень і деформацій.

1. *Болотин В. В., Новичков Ю. Н.* Механика многослойных конструкций. – М.: Машиностроение, 1980. – 375 с.
2. *Ломакин В. А., Кукса Л. В., Бахтин Ю. А.* Масштабный эффект упругих свойств поликристаллических материалов // Прикл. механика. – 1982. **18**, № 9. – С. 10 – 15.
3. *Кукса Л. В., Сергеев А. В.* Расчет напряженно-деформированных состояний в элементах конструкций на основе разработки конечноэлементной модели бетона // Надежность и долговечность строительных материалов, конструкций и оснований фундаментов: Тр. IV Междунар. науч.-техн. конф. – Волгоград, 2005. – С. 46 – 51.
4. *Най Дж.* Физические свойства кристаллов – М.: Мир, 1967. – 385 с.
5. *Хантингтон Г.* Упругие постоянные кристаллов // Усп. физ. наук. – 1961. – **74**. – Вып. 2. – С. 302; Вып. 3. – С. 464.
6. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронееднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 399 с.
7. *Кукса Л. В., Арзамасова Л. М.* Оценка упругой, пластической и прочностной анизотропии в исследованиях физико-механических свойств конструкционных материалов // Завод. лаб. – 2003. – **69**, № 4. – С. 26 – 32.
8. *Кукса Л. В., Евдокимов Е. Е.* Разработка конечноэлементной модели и метода расчета элементов конструкций из структурно-неоднородных материалов с факторами концентраций напряжений // Изв. вузов. Строительство. – 2002. – № 5. – С.16 – 21.

Поступила 04. 11. 2005