УДК 624.023

Згин і стійкість склеєного криволінійного стрижня з початковими неправильностями

І. С. Зарівняк

Український державний університет водного господарства і природокористування, Рівне, Україна

Отримано диференціальне рівняння згину криволінійного склеєного стрижня з початковими прогинами його елементів. Клейові шви працюють на зсув. Досліджено плоску форму стійкості, колапс і випинання складеного стрижня та знайдено формули для визначення критичних значень параметрів його елементів. Розглянуто деякі окремі випадки і наведено приклади.

Ключові слова: криволінійний стрижень, клейові шви, плоска форма згину, початкові неправильності (прогини), колапс, випинання.

Стійкість прямолінійних складених стрижнів із детермінованими і випадковими початковими неправильностями (прогини) розлядалася в роботах [1–4], криволінійних з абсолютно жорсткими зв'язками між елементами – в [5]. Мета даної роботи – дослідження стійкості плоскої форми згину і колапса склеєного шарового криволінійного стрижня під впливом початкових прогинів його елементів.

Припустимо, що склеєний криволінійний стрижень радіуса кривизни R нейтральної лінії до його пружного збирання мав початкові прогини $w_j^0(s)$ $(j=1, \ldots, n+1)$ окремих елементів (шарів), де n – кількість клейових швів. При розгляді роботи елементів стрижня приймаються всі припущення теорії згину монолітних криволінійних стрижнів [6]. Окрім того, товщини елементів є величини вищого порядку малості в порівнянні з їх радіусами кривизни R_j, жорсткостями клейових швів при згині нехтуємо. Отже, можна вважати, що $R_j \approx R$. По аналогії з роботою [2] згинальний момент зовнішніх сил представимо у вигляді

$$M = M_1 + \sum_{j=1}^{n+1} m_j, \tag{1}$$

де M_1 – момент внутрішніх сил при згині монолітного стрижня із загальною нейтральною віссю; m_j – момент в j-у елементі, зумовлений його додатковим прогином за рахунок зсуву в клейових швах.

Аналогічно прогин стрижня представимо у вигляді суми двох прогинів:

$$w = w_1 + w_2, \tag{2}$$

де w_1 – прогин стрижня із загальною нейтральною віссю при його згині під дією моменту M_1; w_2 – додатковий прогин від згину стрижня під дією моменту $\sum_{j=1}^{n+1} m_j$.

Відносне подовження волокна, яке знаходиться на відстані z від осі j-го елемента, представимо у вигляді

$$\varepsilon_j = \varepsilon_j^{(1)} + \varepsilon_j^{(2)}. \tag{3}$$

Тут

$$\varepsilon_j^{(1)} = \varepsilon - z_j \chi - z\chi_j; \qquad \varepsilon_j^{(2)} = \frac{dv_j}{ds} - \frac{w_2}{R} - z\left(\frac{dv_j}{Rds} + \frac{d^2 w_2}{ds^2}\right), \tag{4}$$

де $\varepsilon = \dfrac{dv}{ds} - \dfrac{w_1}{R}$ – відносне подовження волокна нейтральної лінії складеного стрижня; $\chi = \dfrac{dv}{Rds} + \dfrac{d^2 w_1}{ds^2}$ – зміна кривизни нейтральної лінії монолітного стрижня; $\chi_j = \dfrac{dv}{Rds} + \dfrac{d^2(w_1 - w_j^0)}{ds^2}$ – зміна кривизни j-го елемента; v, v_j – дотичні зміщення точок нейтральної лінії складеного стрижня і кожного елемента окремо; z_j – відстань від нейтральної лінії стрижня до осі j-го елемента.

Припустимо, що поздовжні деформації невеликі і ними можна нехтувати [3]. Тоді $\dfrac{dv}{ds} = \dfrac{w_1}{R}$; $\dfrac{dv_j}{ds} = \dfrac{w_2}{R}$, а з (4) маємо

$$\varepsilon_j^{(1)} = -z_j\left(\frac{w_1}{R^2} + \frac{d^2 w_1}{ds^2}\right) - z\left(\frac{w_1}{R^2} + \frac{d^2(w_1 - w_j^0)}{ds^2}\right); \tag{5}$$

$$\varepsilon_j^{(2)} = -z\left(\frac{w_2}{R^2} + \frac{d^2 w_2}{ds^2}\right). \tag{6}$$

Згідно з (6) згинальний момент m_j визначається за формулою

$$m_j = -D_j\left(\frac{w_2}{R^2} + \frac{d^2 w_2}{ds^2}\right). \tag{7}$$

Згинальний момент M_1 з урахуванням початкових прогинів запишемо так:

$$M_1 = \sum_{j=1}^{n+1}(M_j + P_j z_j). \tag{8}$$

Тут

$$M_j = \iint_{\Omega_j} E_j \varepsilon_j^{(1)} d\Omega = -D_j\left[\frac{w_1}{R^2} + \frac{d^2(w_1 - w_j^0)}{ds^2}\right]; \tag{9}$$

$$P_j = \iint\limits_{\Omega_j} E_j \varepsilon_j^{(1)} d\Omega = -A_j z_j \left(\frac{w_1}{R^2} + \frac{d^2 w_1}{ds^2} \right), \tag{10}$$

де $D_j = E_j I_j$; $A_j = E_j \Omega_j$; E_j, Ω_j, I_j – відповідно модуль пружності, площа поперечного перерізу і власний момент інерції j-го елемента.

З урахуванням (9), (10) залежність (8) набуде наступного вигляду:

$$M_1 = -D \left(\frac{w_1}{R^2} + \frac{d^2 w_1}{ds^2} \right) - \sum_{j=1}^{n+1} M_j^0, \tag{11}$$

де $D = \sum\limits_{j=1}^{n+1} (D_j + A_j z_j^2)$ – монолітна жорсткість стрижня при його згині у вертикальній площині; $M_j = -D_j \dfrac{d^2 w_j^0}{ds^2}$ – фіктивний згинальний момент, що зумовлений початковим прогином j-го елемента.

Тепер рівняння (1) з урахуванням (7), (11) запишемо так:

$$D \left(\frac{w_1}{R^2} + \frac{d^2 w_1}{ds^2} \right) + \sum_{j=1}^{n+1} D_j \left(\frac{w_2}{R^2} + \frac{d^2 w_2}{ds^2} \right) = M - \sum_{j=1}^{n+1} M_j^0. \tag{12}$$

Установимо зв'язок між прогинами w_1 і w_2. Для цього кут зсуву в j-у клейовому шарі ($j = 1, \ldots, n$) виразимо через переміщення $u_j^{(\text{н})}$ j-го і $u_{j+1}^{(\text{в})}$ $(j+1)$-го елементів стрижня на поверхнях, що прилягають до клейового шару:

$$\gamma_j = \frac{u_j^{(\text{н})} - u_{j+1}^{(\text{в})}}{\eta_j}, \tag{13}$$

де η_j – товщина j-го клейового шару.

Диференціюючи (13) по s, отримаємо

$$\frac{d\gamma_j}{ds} = \frac{\varepsilon_j^{(\text{н})} - \varepsilon_{j+1}^{(\text{в})}}{\eta_j} = r_j \left(\frac{w_2}{R^2} + \frac{d^2 w_2}{ds^2} \right),$$

де r_j – відстань між осями j-го і $(j+1)$-го елементів.

Приймаючи до уваги закон Гука $\gamma_j = q_j / G_j$, де q_j – зусилля зсуву в j-му клейовому шарі; G_j – модуль зсуву j-го клейового шару, отримаємо

$$\frac{dq_j}{ds} = \frac{r_j G_j}{\eta_j} \left(\frac{w_2}{R^2} + \frac{d^2 w_2}{ds^2} \right). \tag{14}$$

Погонні зусилля зсуву в клейових швах зв'язані з нормальними напруженнями σ_j в центрах ваги елементів залежностями

$$\begin{cases} q_1 = \Omega_1 \dfrac{d\sigma_1}{ds}; \\ q_2 = \Omega_1 \dfrac{d\sigma_1}{ds} + \Omega_2 \dfrac{d\sigma_2}{ds}; \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ q_n = \Omega_1 \dfrac{d\sigma_1}{ds} + \Omega_2 \dfrac{d\sigma_2}{ds} + \Lambda + \Omega_n \dfrac{d\sigma_n}{ds}. \end{cases} \qquad (15)$$

З урахуванням (5) формули (15) запишемо наступним чином:

$$\begin{cases} \dfrac{\Omega_1 E_1 z_1}{r_1}\left(\dfrac{d^2 w_1}{R^2 ds^2} + \dfrac{d^4 w}{ds^4}\right) = -\dfrac{G_1}{\eta_1}\left(\dfrac{w_2}{R^2} + \dfrac{d^2 w_2}{ds^2}\right), \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ \dfrac{\Omega_1 E_1 z_1 + \Omega_2 E_2 z_2 + \dots + \Omega_n E_n z_n}{r_n}\left(\dfrac{d^2 w_1}{R^2 ds^2} + \dfrac{d^4 w_1}{ds^4}\right) = -\dfrac{G_n}{\eta_n}\left(\dfrac{w_2}{R^2} + \dfrac{d^2 w_2}{ds^2}\right). \end{cases} \qquad (16)$$

Підсумуємо ліві і праві частини рівнянь (16) і розділимо результат додавання на кількість швів. У результаті отримаємо

$$B_k\left(\frac{d^2 w_1}{R^2 ds^2} + \frac{d^4 w_1}{ds^4}\right) = -G_k\left(\frac{w_2}{R^2} + \frac{d^2 w_2}{ds^2}\right), \qquad (17)$$

де

$$G_k = \frac{1}{n}\left(\frac{G_1}{\eta_1} + \frac{G_2}{\eta_2} + \dots + \frac{G_n}{\eta_n}\right);$$

$$B_k = \frac{1}{n}\left(\frac{F_1 E_1 z_1}{r_1} + \dots + \frac{F_1 E_1 z_1 + F_2 E_2 z_2 + \dots + F_n E_n z_n}{r_n}\right).$$

Замінимо в рівнянні (12) w_1 і w_2 на w з урахуванням (2) і (17). У результаті отримаємо диференціальне рівняння зігнутої осі криволінійного склеєного складеного стрижня з початковими прогинами:

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_j\left(\frac{d^2 w}{R^2 ds^2} + \frac{d^4 w}{ds^4}\right) - q - \sum_{j=1}^{n+1} q_j^0 = \beta\left[D\left(\frac{w}{R^2} + \frac{d^2 w}{ds^2}\right) - M - \sum_{j=1}^{n+1} M_j^0\right], \qquad (18)$$

де $q_j^0 = D_j \dfrac{d^4 w_j^0}{ds^4}$; $\beta = \dfrac{G_k}{B_k}$; q – інтенсивність нормально розподіленого навантаження.

Якщо $R = \infty$, то з (18) випливає рівняння згину прямолінійного складеного стрижня [2].

Приклад 1. Знайдемо прогин шарнірно закріпленого криволінійного складеного стрижня, що зумовлений початковим прогином j-го елемента:

$$w_j^0 = f_j \sin\frac{2\pi s}{l} \qquad (0 \le s \le l),$$

де l – довжина стрижня; f_j – амплітуда початкового прогину.

Розв’язуючи рівняння (18) за відсутності зовнішніх зусиль і задовольняючи граничні умови

$$w = \frac{d^2 w}{ds^2} = 0 \qquad \text{при} \qquad s = 0,\ s = l,$$

знайдемо

$$w = \frac{4\pi^2 R^2 (4\pi^2 + Bl^2) D_j f_j}{(4\pi^2 R^2 - l^2)\left(4\pi^2 \sum\limits_{j=1}^{n+1} D_j + \beta l^2 D\right)} \sin\frac{2\pi s}{l}. \tag{19}$$

При цьому дотичні переміщення на кінцях стрижня відсутні, оскільки згідно з [6] маємо $\int\limits_0^l w ds = 0$. У випадку прямолінійного стрижня ($R = \infty$) розв’язок (19) перепишемо наступним чином:

$$w = \frac{(4\pi^2 + \beta l^2) D_j f_j}{4\pi^2 \sum\limits_{j=1}^{n+1} D_j + \beta l^2 D} \sin\frac{2\pi x}{l}. \tag{20}$$

Якщо зв’язки на зсув не працюють ($\beta = \infty$), то з (19) і (20) відповідно отримаємо

$$w = \frac{4\pi^2 R^2 D_j f_j}{(4\pi^2 R^2 - l^2) D} \sin\frac{2\pi s}{l}; \qquad w = \frac{D_j}{D} f_j \sin\frac{2\pi s}{l}.$$

Дослідимо стійкість плоскої форми згину криволінійного склеєного складеного стрижня під дією початкових прогинів $w_j^0 = k_j f_j(s)$ на основі статичного критерію, де k_j – параметр; $f_j(s)$ – відома функція. Для цього використаємо рівняння рівноваги [5]:

$$\left\{\begin{aligned}&B_m\left(\frac{\theta}{R}-\frac{d^2u}{ds^2}\right)=\theta\left(M_j^0-\frac{1}{\beta}q_j^0\right);\\&D\left(\frac{w}{R^2}+\frac{d^2w}{ds^2}\right)-\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{n+1}D_j\left(\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{d^4w}{ds^4}\right)=M_j^0-\frac{1}{\beta}q_j^0;\\&C\left(\frac{d\vartheta}{ds}+\frac{du}{Rds}\right)=\left(M_j^0-\frac{1}{\beta}q_j^0\right)\frac{du}{ds},\end{aligned}\right. \tag{21}$$

де B_m, C – жорсткість при згині стрижня в горизонтальній площині і жорсткість при крученні; θ – кут повороту перерізу стрижня; u – прогин стрижня в площині найменшої жорсткості.

Виключимо u з першого і третього рівнянь (21), і для кута θ отримаємо залежність

$$B_mC\frac{d^2u}{ds^2}-\left(M_j^0-\frac{1}{\beta}q_j^0-\frac{C}{R}\right)\left(\frac{B_m}{R}-M_j^0+\frac{1}{\beta}q_j^0\right)\theta=0. \tag{22}$$

Апроксимуючи θ у вигляді $\theta=aF(s)$, де a – деякий невизначений параметр; $F(s)$ – змінна частина прогину, на основі методу Бубнова–Гальоркіна запишемо

$$\int_0^l\left[B_mC\frac{d^2F}{ds^2}-\left(M_j^0-\frac{1}{\beta}q_j^0-\frac{C}{R}\right)\left(\frac{B_m}{R}-M_j^0+\frac{1}{\beta}q_j^0\right)\right]Fds=0. \tag{23}$$

Представимо M_j^0, q_j^0 через початкові прогини, і для визначення критичного параметра k_{jkp} отримаємо рівняння

$$a_jk_j^2+b_jk_j+c_j=0,$$

де

$$a_j=D_j^2\int_0^l\left(\frac{d^2f_j}{ds^2}-\frac{1}{\beta}\frac{d^4f_j}{ds^4}\right)^2F^2ds;$$

$$b_j=-D_j\frac{B_m+C}{R}\int_0^l\left(\frac{d^2f_j}{ds^2}-\frac{1}{\beta}\frac{d^4f_j}{ds^4}\right)F^2ds;$$

$$c_j=B_mC\left(\int_0^lF\frac{d^2F}{ds^2}ds+\frac{1}{R^2}\int_0^lF^2ds\right).$$

Приклад 2. Розглянемо стійкість шарнірно закріпленого криволінійного складеного стрижня з початковим прогином j-го елемента $w_j^0 = k_j \sin\frac{\pi s}{l}$.

Із рівняння (23) маємо

$$k_{jkp} = 2\beta l^3 \frac{4l(B_m + C) \pm \sqrt{16l^2(B_m + C)^2 + 27\pi^2 B_m C(\pi^2 R^2 - l^2)}}{9\pi^3 R D_j(\beta l^2 + \pi^2)}. \tag{24}$$

Для прямолінійного стрижня ($R = \infty$) з (24) отримаємо

$$k_{jkp} = \pm \frac{2\beta l^3 \sqrt{3B_m C}}{3\pi D_j(\beta l^2 + \pi^2)}. \tag{25}$$

Якщо зв'язки на зсув не працюють ($\beta = \infty$), то

$$k_{jkp} = \pm \frac{2l\sqrt{3B_m C}}{3\pi D_j}.$$

При $l = \pi R$ з (24) випливає

$$k_{jkp} = \frac{16\beta R^3(B_m + C)}{9\pi D_j(\beta R^2 + 1)},$$

при $\beta = \infty$ –

$$k_{jkp} = \frac{16R(B_m + C)}{9\pi D_j}.$$

При дослідженні форми випинання поступаємо аналогічно роботі [7]. Для цього від рівняння (18) перейдемо до рівняння

$$\sum_{j=1}^{n+1} D_j \left(\frac{d^2 w}{R^2 ds} + \frac{d^4 w}{ds^4} \right) = \beta \left[D \left(\frac{w}{R^2} + \frac{d^2 w}{ds^2} \right) + Sw \right]$$

або

$$R^2 \sum_{j=1}^{n+1} D_j \frac{d^4 w}{ds^4} + \left(\sum_{j=1}^{n+1} D_j - \beta R^2 D \right) \frac{d^2 w}{ds^2} - \beta(D + SR^2) w = 0. \tag{26}$$

У результаті розв'язку рівняння (26) отримаємо

$$w = C_1 e^{\lambda_1 s} + C_2 e^{-\lambda_2 s} + C_3 \sin\lambda_2 s + C_4 \cos\lambda_2 s,$$

де

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\frac{\beta DR^2 - \sum_{j=1}^{n+1} D_j \pm \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n+1} D_j + \beta DR^2\right)^2 + 4R^4 \beta S \sum_{j=1}^{n+1} D_j}}{2R^2 \sum_{j=1}^{n+1} D_j}}. \qquad (27)$$

Задовольняючи умови на лівому кінці ($s = 0$) арки, необхідно, щоб $C_1 = C_2 = C_3 = 0$, на правому кінці ($s = l$) – щоб $\sin \lambda_2 s = 0$. Для нерозтягнутої осі арки найменший корінь цього рівняння $\lambda_2 = \frac{2\pi}{l}$.

Враховуючи умову рівноваги арки $S \frac{l}{R} = \int_0^l q_j^0 ds$ і залежність (27), знайдемо

$$k_{jkp}^{(1)} = \frac{16\pi^4 R^3 + 4\pi^2 l^2 \left(\beta DR^2 - \sum_{j=1}^{n+1} Dj\right) - \beta Dl^4}{\beta R^3 l^3 D_j \left(\frac{d^3 f_j(l)}{ds^3} - \frac{d^3 f_j(0)}{ds^3}\right)}.$$

Для початкового прогину $w_j^0 = k_j \sin \frac{\pi s}{l}$ запишемо

$$k_{jkp}^{(1)} = \frac{16\pi 4R^3 + 4\pi^2 l^2 \left(\beta DR^2 - \sum_{j=1}^{n+1} D_j\right) - \beta Dl^4}{2\beta R^3 \pi^3 D_j}.$$

Якщо зв'язки на зсув не працюють ($\beta = \infty$), то з останніх залежностей отримаємо формулу

$$k_{jkp}^{(1)} = \frac{(4\pi^2 R^2 - l^2) l^2 D}{2\pi^3 R^3 D_j}.$$

Тепер дослідимо іншу форму втрати стійкості – колапс пологої арки. Припустимо, що тільки один j-й елемент арки до її пружного збирання мав вищезазначений початковий прогин w_j^0. Згин осі складеної арки описується диференціальним рівнянням (18), де

$$q_j^0 = k_j D_j \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi s}{l}; \qquad M_j^0 = -k_j D_j \frac{\pi^2}{l^2} \sin \frac{\pi s}{l}.$$

У результаті розв'язку цього рівняння отримаємо

$$w = \frac{\pi^2 R^2 (\pi^2 + \beta l^2) k_j D_j}{(\pi^2 R^2 - l^2)\left(\beta l^2 D + \pi^2 \sum_{j=1}^{n+1} D_j\right)} \sin\frac{\pi s}{l}.$$

Для нерухомих шарнірів у випадку виникнення розпору H рівняння для осі арки буде

$$w^{(1)} = \frac{\pi^2 R^2 (\pi^2 + \beta l^2) k_j D_j}{(\pi R^2 - l^2)\left(\beta l^2 D + \pi^2 \sum_{j=1}^{n+1} D_j\right)} \frac{1}{1-\alpha} \sin\frac{\pi s}{l}.$$

Аналогічно, як і в роботі [3], визначимо

$$k_j = 2(1-\alpha)\sqrt{\frac{D}{B(\alpha-2)}} \frac{(\pi^2 R - l^2)\left(\beta l^2 D + \pi^2 \sum_{j=1}^{n+1} D_j\right)}{\pi R^2 (\pi^2 + \beta l^2) D_j},$$

звідки при $\alpha = 3$ отримаємо

$$k_{jkp}^{(2)} = -\frac{4(\pi^2 R^2 - l^2)\left(\beta l^2 D + \pi^2 \sum_{j=1}^{n+1} D_j\right)}{\pi^2 R^2 (\pi^2 + \beta l^2) D_j}. \qquad (28)$$

Якщо зв'язки на зсув не працюють ($\beta = \infty$), то з (28) випливає формула

$$k_{jkp}^{(2)} = -\frac{4(\pi^2 R^2 - l^2) D}{\pi^2 R^2 D_j} \sqrt{\frac{D}{B}}.$$

Отже, отримані залежності можуть використовуватися для визначення критичних значень параметрів конструктивних початкових прогинів елементів криволінійного складеного стрижня, що виготовляється методом пружного збирання, а також для оцінки допустимих технологічних неправильностей цих елементів.

Резюме

Получено дифференциальное уравнение изгиба криволинейного склеенного стержня с начальными прогибами его элементов. Клеевые швы работают на сдвиг. Исследовано плоскую форму устойчивости, прощелкивание и выпучивание составного стержня и получены формулы для определения критических значений параметров его элементов. Рассмотрены некоторые частные случаи и приведены примеры.

1. *Заривняк И. С.* Устойчивость плоской формы изгиба составного стержня со случайными начальными неправильностями // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1988. – № 5. – С. 32 – 35.
2. *Заривняк И. С.* Изгиб склеенного составного стержня со случайными неправильностями // Вопр. механики деформируемого твердого тела. – 1982. – Вып. 3. – С. 99 – 106.
3. *Заривняк И. С.*, *Минчук А. И.* К определению опасного состояния составного стержня со случайными неправильностями // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1990. – № 4. – С. 26 – 30.
4. *Шеломов Н. А.*, *Заривняк И. С.* Устойчивость плоской формы изгиба составного стержня под воздействием начальных неправильностей // Пробл. прочности. – 1983. – № 4. – С. 43 – 47.
5. *Заривняк И. С.*, *Заривняк Г. Р.* Устойчивость плоской формы изгиба криволинейного составного стержня с учетом начальных неправильностей // Там же. – 1986. – № 2. – С. 42 – 44.
6. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. – М.: Госиздат, 1955. – 567 с.
7. *Заривняк И. С.* Устойчивость составной круговой пологой арки с учетом начальных прогибов // Изв. вузов. Стр-во. – 1992. – № 9-10. – С. 23 – 25.

Поступила 07. 07. 2003