УДК 624.023

Імовірність критичного стану клейових швів пологої шарової оболонки з випадковими неправильностями

І. С. Зарівняк

Український державний університет водного господарства і природокористування, Рівне, Україна

Одержано залежності для визначення імовірності небезпечного (критичного) стану клейових швів шарової пологої оболонки при наявності випадкових початкових неправильностей пружних шарів із відомими імовірнісними характеристиками. Розглянуто приклад обчислення імовірності критичного стану клейового шва двошарової оболонки з відомим математичним сподіванням і кореляційною функцією випадкового початкового прогину верхнього шару.

Ключові слова: імовірність, критичний стан, шарова полога оболонка, початкові неправильності, клейові шви.

У ряді робіт вітчизняних [1, 2] і зарубіжних авторів підкреслюється, що початкові неправильності елементів складеної конструкції істотно впливають на її міцність і стійкість. В оглядовій статті про розвиток розрахунків тришарових пластин і оболонок [1] відмічається, що причиною руйнування в багатьох випадках є напруження, які виникають у заповнювачі або в його з'єднанні із зовнішніми шарами внаслідок початкових технологічних неправильностей. Окрім цього, початкові неправильності згідно зі своєю природою носять випадковий характер і потребують імовірнісної оцінки. Питання щодо визначення напружено-деформованого стану і стійкості шарових оболонок розглядалися в роботах [3, 4]. Але питання роботи з'єднань пружних шарів вивчено в меншій мірі. У зв'язку з вищезазначеним виникла необхідність дослідження з детерміністичної і стохастичної точки зору напружено-деформованого стану з'єднань пружних шарів оболонки.

Спочатку отримаємо диференціальні рівняння згину шарової оболонки, що складається з n склеєних між собою пружних шарів товщиною h_j $(j=1, \ldots, n)$ з детермінованими початковими прогинами $w_j^0(x, y)$. Клейовий шов між j-ю та $(j+1)$-ю тонкими оболонками характеризується товщиною η_j і модулем зсуву $G_\eta^{(j)}$, де $\eta_j << h_j$. Згинальні M_x, M_y і крутильні M_{xy} моменти, що діють у оболонці, представимо у вигляді

$$M_x = M_x^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} m_x^{(j)}; \quad M_y = M_y^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} m_y^{(j)}; \quad M_{xy} = M_{xy}^{(1)} + \sum_{j=1}^{n} m_{xy}^{(j)}, \quad (1)$$

де $M_x^{(1)}$, $M_y^{(1)}$, $M_{xy}^{(1)}$ – згинальні і крутильні моменти внутрішніх сил при прогині w_1 монолітної оболонки із загальною серединною поверхнею,

$$\begin{cases} M_x^{(1)} = -\sum_{j=1}^{n}(D_j + A_j z_j^2)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right) + \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\frac{\partial^2 w_j^0}{\partial x^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_j^0}{\partial y^2}\right); \\ M_y^{(1)} = -\sum_{j=1}^{n}(D_j + A_j z_j^2)\left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right) + \sum_{j=1}^{n} D_j \left(\frac{\partial^2 w_j^0}{\partial y^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_j^0}{\partial x^2}\right); \\ M_{xy}^{(1)} = \sum(D_j + A_j z_j^2)(1-\nu_j)\frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y} - \sum D_j (1-\nu_j)\frac{\partial^2 w_j^0}{\partial x \partial y}; \end{cases} \quad (2)$$

$m_x^{(j)}$, $m_y^{(j)}$, $m_{xy}^{(j)}$ – згинальні і крутильні моменти внутрішніх сил в j-му пружному шарі при додатковому прогині w_2 за рахунок зсуву у клейових швах,

$$m_x^{(j)} = -D_j\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}\right); \qquad m_y^{(j)} = -D_j\left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} + \nu_j \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}\right);$$
$$m_{xy}^{(j)} = D_j(1-\nu_j)\frac{\partial^2 w_2}{\partial x \partial y}; \quad (3)$$

$A_i = \dfrac{E_i h_i}{1-\nu_i^2}$; $D_i = \dfrac{E_i h_i^3}{12(1-\nu_i^2)}$ – жорсткість при розтязі і згині; E_i, ν_i, z_i – відповідно модуль пружності, коефіцієнт Пуассона і відстань від серединної поверхні оболонки до серединної поверхні i-го шару ($i = 1, ..., n$).

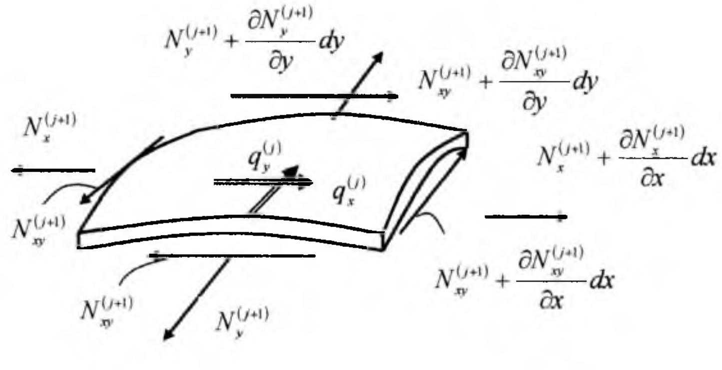

Схема дії зусиль у пружних шарах пологої оболонки.

З умов рівноваги елементарних частин вирізаного елемента (рисунок) погонні зусилля $q_x^{(j)}$, $q_y^{(j)}$ в j-му клейовому шві в напрямку осей x і y визначаються через поздовжні зусилля $N_x^{(i)}$, $N_y^{(i)}$ і зусилля зсуву $N_{xy}^{(i)}$ в пружних шарах пологої оболонки за наступними формулами:

$$q_x^{(j)} = \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial y}\right); \qquad q_y^{(j)} = \sum_{i=1}^{j}\left(\frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(i)}}{\partial y}\right). \quad (4)$$

де погонні зусилля в серединній поверхні j-го шару запишемо так:

$$
\begin{aligned}
&N_x^{(j)} = A_i((\varepsilon_x + \nu_i \varepsilon_y) + (k_x + \nu_i k_y) w_i^0);\\
&N_y^{(j)} = A_i((\varepsilon_y + \nu_i \varepsilon_x) + (k_y + \nu_i k_x) w_i^0);\\
&2N_{xy}^{(j)} = A_i(1-\nu_i)\gamma.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Для серединної поверхні зусилля N_x, N_y виражаються залежностями

$$
\begin{aligned}
N_x &= \sum_j A_j(\varepsilon_x + \nu_j \varepsilon_y) + \sum_j A_j(k_x + \nu_j k_y) w_j^0;\\
N_y &= \sum_j A_j(\varepsilon_y + \nu_j \varepsilon_x) + \sum_j A_j(k_y + \nu_j k_x) w_j^0.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Зі співвідношень (5) і (6) знаходимо

$$
\varepsilon_x = \frac{\sum_j A_j N_x - \sum_j A_j \nu_j N_y - \sum_j \sum_i A_j A_i [(1-\nu_j \nu_i) k_x + (\nu_i - \nu_j) k_y] w_j^0}{\left(\sum_j A_j\right)^2 - \left(\sum_j A_j \nu_j\right)^2};
$$

$$
\varepsilon_y = \frac{\sum_j A_j N_y - \sum_j A_j \nu_j N_x - \sum_j \sum_i A_j A_i [(1-\nu_j \nu_i) k_y + (\nu_i - \nu_j) k_x] w_j^0}{\left(\sum_j A_j\right)^2 - \left(\sum_j A_j \nu_j\right)^2};
$$

$$
\gamma = \frac{2N_{xy}}{\sum_j A_j (1-\nu_j)}.
\tag{7}
$$

Введемо функцію напружень φ:

$$
N_x = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \qquad N_y = h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \qquad N_{xy} = -h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},
\tag{8}
$$

де h – товщина шарової оболонки, і підставимо (8) в (7), а (7) – в рівняння сумісності деформацій:

$$
\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x \partial y} = -\Delta_k w,
\tag{9}
$$

де $\Delta_k = k_x \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + k_y \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$; k_x, k_y – кривизни серединної поверхні оболонки. У результаті отримаємо

$$\frac{\Delta\Delta\varphi}{E_{\text{пр}}} = \frac{\sum\limits_j \sum\limits_i A_j A_i [(1-\nu_j \nu_i)\Delta_k w_i^0 + (\nu_i - \nu_j)\Delta_k w_i^0]}{\left(\sum\limits_j A_j\right)^2 - \left(\sum\limits_j A_j \nu_j\right)^2} - \Delta_k w, \tag{10}$$

де

$$E_{\text{пр}} = \frac{\left(\sum\limits_j A_j\right)^2 - \left(\sum\limits_j A_j \nu_j\right)^2}{h \sum\limits_j A_j}.$$

Тепер підставимо вирази (5) з урахуванням (6)–(8) у формули (4):

$$q_x^{(j)} = \frac{1}{E_{\text{пр}} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k} \sum_{i=1}^{j} A_i \left\{ \left(\nu_i \sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{k=1}^{n} A_k \nu_k \right) \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_r A_k [(1-\nu_r \nu_k)(k_x + \nu_i k_y) + (\nu_k - \nu_r)(k_y + \nu_i k_x)] \frac{\partial w_r^0}{\partial x} \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} A_i (k_x + \nu_i k_y) \frac{\partial w_i^0}{\partial x}; \tag{11a}$$

$$q_y^{(j)} = \frac{1}{E_{\text{пр}} \sum\limits_{k=1}^{n} A_k} \sum_{i=1}^{j} A_i \left\{ \left(\nu_i \sum_{k=1}^{n} A_k - \sum_{k=1}^{n} A_k \nu_k \right) \frac{\partial(\Delta\varphi)}{\partial y} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{h} \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_r A_k [(1-\nu_r \nu_k)(k_y + \nu_i k_x) + (\nu_k - \nu_r)(k_x + \nu_i k_y)] \frac{\partial w_r^0}{\partial y} \right\} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{j} A_i (k_y + \nu_i k_x) \frac{\partial w_i^0}{\partial y}. \tag{11б}$$

Кути зсуву в j-му клейовому шві в напрямку осей x, y можуть бути виражені через переміщення j-го й $(j+1)$-го пружних шарів на поверхнях, що прилягають до клейового шва:

$$\gamma_x^{(j)} = \frac{u_j^{\text{н}} - u_{j+1}^{\text{в}}}{\eta_j}; \qquad \gamma_y^{(j)} = \frac{v_j^{\text{н}} - v_{j+1}^{\text{в}}}{\eta_j} \qquad (j = 1, \ldots, n-1), \tag{12}$$

де $u_j^{\text{н}}$, $v_j^{\text{н}}$, $u_{j+1}^{\text{в}}$, $v_{j+1}^{\text{в}}$ – відповідно переміщення нижньої поверхні j-го і верхньої поверхні $(j+1)$-го пружних шарів, що залежать від зсуву в клейових швах.

У результаті диференціювання виразів (12) отримаємо

$$\frac{\partial \gamma_x^{(j)}}{\partial x} = \frac{\varepsilon_{j,x}^{\text{н}} - \varepsilon_{j+1,x}^{\text{в}}}{\eta_j}; \qquad \frac{\partial \gamma_x^{(j)}}{\partial y} = \frac{\varepsilon_{j,y}^{\text{н}} - \varepsilon_{j+1,y}^{\text{в}}}{\eta_j},$$

де

$$\varepsilon_{j,x}^{\text{н}} = \frac{1}{2} h_j \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{j+1,x}^{\text{в}} = -\frac{1}{2} h_{j+1} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2};$$

$$\varepsilon_{j,y}^{\text{н}} = \frac{1}{2} h_j \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}; \qquad \varepsilon_{j+1,y}^{\text{в}} = -\frac{1}{2} h_{j+1} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}.$$

З іншої сторони,

$$\gamma_x^{(j)} = \frac{q_x^{(j)}}{G_\eta^{(j)}}; \qquad \gamma_y^{(j)} = \frac{q_y^{(j)}}{G_\eta^{(j)}}.$$

Тепер з урахуванням залежностей

$$q_x^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{\partial N_x^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial y} \right); \qquad q_y^{(j)} = \sum_{i=1}^{j} \left(\frac{\partial N_{xy}^{(i)}}{\partial x} + \frac{\partial N_y^{(i)}}{\partial y} \right);$$

$$N_x^{(i)} = -A_i z_i \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \nu_i \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} \right); \qquad N_y^{(i)} = -A_i z_i \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} + \nu_i \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right),$$

де

$$N_{xy}^{(i)} = -A_i z_i (1 - \nu_i) \frac{\partial^2 w_1}{\partial x \partial y},$$

отримаємо наступні рівняння:

$$\frac{G_\eta^{(j)}}{\eta_j} \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} = -\frac{\sum_{i=1}^{j} A_i z_i}{r_j} \left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} \right);$$

$$\frac{G_\eta^{(j)}}{\eta_j}\frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2} = -\frac{\sum\limits_{i=1}^{j} A_i z_i}{r_j}\left(\frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2}\right).$$

Підсумовування лівих і правих частин попередніх рівностей і поділ на кількість клейових швів $n-1$ дозволяє отримати друге рівняння для визначення прогинів w_1, w_2:

$$G_\eta \Delta w_2 = -B_\eta \Delta\Delta w_1, \tag{13}$$

де

$$G_\eta = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{G_\eta^{(j)}}{\eta_j}; \qquad B_\eta = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{1}{r_j}\sum_{i=1}^{j} A_i z_i;$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \qquad r_j = \frac{h_j + h_{j+1}}{2}; \qquad q_j^0 = D_j \Delta\Delta w_j^0.$$

Третє рівняння для визначення цих прогинів і функції напружень отримаємо з умови рівноваги зусиль на нормаль до серединної поверхні оболонки:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + k_x N_x + k_y N_y + q = 0, \tag{14}$$

де

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}; \qquad Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}.$$

Підставимо в (14) вирази для моментів (1) і зусиль (8). У результаті отримаємо

$$D\Delta\Delta w_1 + \sum_{j=1}^{n} D_j \Delta\Delta w_2 - h\Delta_k \varphi = \sum_{j=1}^{n} q_j^0. \tag{15}$$

Для визначення функцій w_1, φ отримаємо систему диференціальних рівнянь, виключивши з рівняння (15) з урахуванням (13) прогин w_2:

$$\begin{cases} D\Delta\Delta w_1 - \dfrac{B_\eta}{G_\eta}\sum\limits_{j=1}^{n} D_j \Delta\Delta\Delta w_1 - h\Delta_k \varphi = \sum\limits_{j=1}^{n} q_j^0; \\ \dfrac{\Delta\Delta\varphi}{E_{\text{пр}}} + \Delta_k w_1 = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{i=1}^{n} A_j A_i \left[(1-\nu_j \nu_i)\Delta_k w_i^0 + (\nu_i - \nu_j)\left(k_x \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right) w_i^0\right]}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} A_j\right)^2 - \left(\sum\limits_{j=1}^{n} A_j \nu_j\right)^2}. \end{cases} \tag{16}$$

Нехай випадкові прогини w_j^0 характеризуються математичними сподіваннями $m_j(x,y)$ і кореляційними функціями $\left\langle w_j^0(x,y)w_j^0(x',y')\right\rangle$, для яких спектральні густини будуть $\Phi_{w_j^0}(\omega_x,\omega_y)$. Задача заключається у визначенні імовірності небезпечного стану в клейових швах, за якого починається руйнування хоча б одного з них. Для цього спочатку виразимо математичні сподівання і кореляційні функції зусиль $q_x^{(j)}$, $q_y^{(j)}$ через відповідні характеристики випадкових початкових прогинів з урахуванням залежностей (16) і відповідних граничних умов. Кореляційні функції $\left\langle w_1(x,y)w_1(x',y')\right\rangle$, $\left\langle \varphi(x,y)\varphi(x',y')\right\rangle$ визначимо за допомогою методу канонічних розкладів для системи диференціальних рівнянь (16) із граничними умовами стохастичного змісту:

$$\langle w_1\rangle=\left\langle\frac{\partial w_1}{\partial x}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial w_1}{\partial y}\right\rangle=$$

$$=\left\langle\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^2 w_1}{\partial x\partial y}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^3 w_1}{\partial y^3}\right\rangle=0;$$

$$\langle\varphi\rangle=\left\langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right\rangle=0.$$

Припустимо, що випадкові функції w_j^0 допускають представлення

$$w_j^0(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_j^0(\omega_x,\omega_y)\exp[i(\omega_x x+\omega_y y)]d\omega_x d\omega_y. \qquad (17)$$

Відшукуємо прогин w_1 і функцію напружень у вигляді

$$\begin{bmatrix} w_1(x,y)\\ \varphi(x,y)\end{bmatrix}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\begin{bmatrix} W_1(\omega_x,\omega_y)\\ N_\varphi(\omega_x,\omega_y)\end{bmatrix}\exp[i(\omega_x x+\omega_y y)]d\omega_x d\omega_y, \qquad (18)$$

де W_j^0, W_1, N_φ – спектральні густини функцій w_j^0, w_1, φ.

Підставимо (17) і (18) у систему рівнянь (16):

$$W_1(\omega_x,\omega_y)=\frac{1}{B}\sum_{j=1}^{n}D_j(\omega_y^2+\omega_x^2)^4W_j^0+(k_x\omega_y^2+k_y\omega_x^2)A; \qquad (19а)$$

$$N_\varphi(\omega_x,\omega_y)=-\frac{1}{B}\left[E_{\text{пр}}(k_x\omega_y^2+k_y\omega_x^2)\sum_{j=1}^{n}D_jW_j^0+\right.$$

$$+\left(D+\frac{B_\eta}{G_\eta}\sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_x^2+\omega_y^2)\right)A\Bigg](\omega_x^2+\omega_y^2)^2, \tag{19б}$$

де

$$A=\sum_{j=1}^{n} A_j \sum_{r=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} A_r A_k\left[(1-\nu_r\nu_k)\Delta_k+(\nu_k-\nu_r)\left(k_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}+k_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]W_r^0;$$

$$B=\left[D+\frac{B_\eta}{G_\eta}\sum_{j=1}^{n} D_j(\omega_x^2+\omega_y^2)\right](\omega_x^2+\omega_y^2)^4+hE_{\text{пр}}(k_x\omega_y^2+k_y\omega_x^2).$$

Тепер на основі (19) отримаємо формули для спектральних густин [3] $\Phi_{w_1}(\omega_x,\omega_y)$, $\Phi_\varphi(\omega_x,\omega_y)$, за допомогою яких знайдемо кореляційні функції:

$$\begin{bmatrix} w_1(x,y)w_1(x',y') \\ \varphi(x,y)\varphi(x',y') \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-8}^{\infty}\begin{bmatrix}\Phi_{w_1}(\omega_x,\omega_y)\\ \Phi_\varphi(\omega_x,\omega_y)\end{bmatrix}\exp\{i[\omega_x(x-x')+\omega_y(y-y')]\}d\omega_x d\omega_y.$$

На основі формул (11) отримаємо кореляційні функції $\left\langle q_x^{(j)}(x,y)q_x^{(j)}(x',y')\right\rangle$, $\left\langle q_y^{(j)}(x,y)q_y^{(j)}(x',y')\right\rangle$.

Умови недопустимості критичного стану в клейових швах у напрямку осей x, y виразимо нерівностями

$$\psi_x^{(j)}(x,y)=q_0-\left|q_x^{(j)}(x,y)\right|\geq 0;\qquad \psi_y^{(j)}(x,y)=q_0-\left|q_y^{(j)}(x,y)\right|\geq 0, \tag{20}$$

де q_0 – нормативно допустиме погонне зусилля в клеї.

Якщо випадкові функції $\psi_x^{(j)}$, $\psi_y^{(j)}$ мають густини розподілу імовірностей $p(\psi_x^{(j)})$, $p(\psi_y^{(j)})$, то небезпечні стани клейових швів у кожній точці x, y в напрямку осей x і y наступають при $\psi_x^{(j)}\leq 0$ або $\psi_y^{(j)}\leq 0$ і визначаються згідно з формулами

$$P_{jx}^-(x,y)=\int_{-\infty}^{0} p(\psi_x^{(j)})d\psi_x^{(j)};\qquad P_{jy}^-(x,y)=\int_{-\infty}^{0} p(\psi_y^{(j)})d\psi_y^{(j)}. \tag{21}$$

Тепер імовірність небезпечного стану в кожній точці клейового j-го шва хоча б в одному з напрямків осей Ox і Oy буде

$$P_j^-(x,y)=1-(1-P_{jx}^-(x,y))(1-P_{jy}^-(x,y))=$$

$$= P_{jx}^{-}(x,y) + P_{jy}^{-}(x,y) - P_{ix}^{-}(x,y)P_{jy}^{-}(x,y). \qquad (22)$$

Надалі використаємо наступні величини: $P_{jx}^{+}(x,y) = 1 - P_{jx}^{-}(x,y)$, $P_{jy}^{+}(x,y) = 1 - P_{jy}^{-}(x,y)$ – імовірності безпечного стану клейових швів,

$$P_{jx}^{+}(x,y) = \int_0^\infty p(\psi_x^{(j)})d\psi_x^{(j)}, \qquad P_{jy}^{+}(x,y) = \int_0^\infty p(\psi_y^{(j)})d\psi_y^{(j)}. \qquad (23)$$

Якщо густини розподілу імовірностей $p(\psi_x^{(j)})$, $p(\psi_y^{(j)})$ є нормально розподіленими з математичними сподіваннями $m_{\psi_x^{(j)}}(x,y)$, $m_{\psi_y^{(j)}}(x,y)$ і середніми квадратичними відхиленнями $\sigma_{\psi_x^{(j)}}(x,y)$, $\sigma_{\psi_y^{(j)}}(x,y)$, то формули (21) набудуть вигляду:

$$P_{jx}^{-}(x,y) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{m_{\psi_x^{(j)}}(x,y)}{\sigma_{\psi_x^{(j)}}(x,y)}\right), \qquad P_{jy}^{-}(x,y) = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{m_{\psi_y^{(j)}}(x,y)}{\sigma_{\psi_y^{(j)}}(x,y)}\right), \qquad (24)$$

а співвідношення (22) –

$$P_j^{-}(x,y) = 0{,}75 - 0{,}5\left[\Phi\left(\frac{m_{\psi_x^{(j)}}(x,y)}{\sigma_{\psi_x^{(j)}}(x,y)}\right) + \Phi\left(\frac{m_{\psi_y^{(j)}}(x,y)}{\sigma_{\psi_y^{(j)}}(x,y)}\right)\right] -$$

$$- \Phi\left(\frac{m_{\psi_x^{(j)}}(x,y)}{\sigma_{\psi_x^{(j)}}(x,y)}\right)\Phi\left(\frac{m_{\psi_y^{(j)}}(x,y)}{\sigma_{\psi_y^{(j)}}(x,y)}\right), \qquad (25)$$

де $\Phi(t)$ – функція Лапласа.

На основі формул (20) отримаємо

$$\begin{aligned} m_{\psi_x^{(j)}}(x,y) &= q_0 - \left| m_{q_x^{(j)}} \right|; \qquad \sigma^2_{\psi_x^{(j)}}(x,y) = \left\langle q_x^{(j)}(x,y) q_x^{(j)}(x',y') \right\rangle \Big|_{\substack{x=x' \\ y=y'}}; \\ m_{\psi_y^{(j)}}(x,y) &= q_0 - \left| m_{q_y^{(j)}} \right|; \qquad \sigma^2_{\psi_y^{(j)}}(x,y) = \left\langle q_y^{(j)}(x,y) q_y^{(j)}(x',y') \right\rangle \Big|_{\substack{x=x' \\ y=y'}}. \end{aligned} \qquad (26)$$

Небезпечний стан всього клейового шару визначимо за формулую

$$P_j(-) = \max_{(x,y)\in\Omega} P_j^-(x,y), \tag{27}$$

де Ω – площа оболонки.

Тоді імовірність небезпечного стану $P(-)$ оболонки в цілому виразиться як імовірність небезпечного стану хоча б одного клеєвого шару:

$$P(-) = 1 - \prod_{j=1}^{n} (1 - P_j(-)). \tag{28}$$

Приклад. Визначимо імовірність небезпечного стану шарнірно закріпленої двошарової пологої в плані оболонки з однаковими характеристиками шарів і початковим прогином верхнього шару з математичним сподіванням

$$m_1(x,y) = A_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b},$$

кореляційною функцією

$$\left\langle w_1^0(x,y) w_1^0(x',y') \right\rangle = K_0 \exp\left[-\gamma \frac{(x-x')^2 + (y-y')^2}{4} \right]$$

і кривизнами $k_x = k_y$.

У цьому випадку система рівнянь (16) для математичних сподівань функцій w_1, φ набуде вигляду

$$\begin{cases} D\Delta\Delta m_{w_1} - \dfrac{B_\eta}{G_\eta} \sum D_j \Delta\Delta\Delta m_{w_1} - hk_x \Delta m_\varphi = 2D_1 \Delta\Delta m_1; \\ \Delta\Delta m_\varphi + Ek_x \Delta m_{w_1} = 2Ek_x \Delta m_1. \end{cases}$$

У результаті розв'язку цієї системи рівнянь для шарнірно закріпленої оболонки отримаємо

$$m_\varphi(x,y) = \frac{\left[1 + 2\dfrac{B_\eta}{G_\eta}\left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2} \right) D_1 - D \right] 2Ek_x \left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2} \right) A_0 \sin\dfrac{\pi x}{a} \sin\dfrac{\pi y}{b}}{\left[D + 2\dfrac{B_\eta}{G_\eta}\left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2} \right) D_1 \right] \left(\dfrac{\pi^2}{a^2} + \dfrac{\pi^2}{b^2} \right)^2 + hEk_x^2};$$

$$m_{w_1}(x,y)=\frac{2\left[\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)D_1+hEk_x^2\right]A_0\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}}{\left[D+2\frac{B_\eta}{G_\eta}\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)D_1\right]\left(\frac{\pi^2}{a^2}+\frac{\pi^2}{b^2}\right)^2+hEk_x^2}.$$

Тепер на основі (11) запишемо

$$m_{q_x^{(1)}}=\frac{Eh_1(1+\nu)k_x\pi}{2a}\cos\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b};\qquad m_{q_y^{(1)}}=\frac{Eh_1(1+\nu)k_x\pi}{2b}\cos\frac{\pi x}{b}\sin\frac{\pi y}{a};$$

$$\left\langle q_x^{(1)}(x,y)q_x^{(1)}(x',y')\right\rangle=$$

$$=\frac{E^2h_1^2(1+\nu)^2k_x^2\gamma K_0}{8a^2}\left(1+\frac{\gamma(x-x')^2}{2}\right)\exp\left[-\gamma\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4}\right];$$

$$\left\langle q_y^{(1)}(x,y)q_y^{(1)}(x',y')\right\rangle=$$

$$=\frac{E^2h_1^2(1+\nu)^2k_x^2\gamma K_0}{8b^2}\left(1+\frac{\gamma(y-y')^2}{2}\right)\exp\left[-\gamma\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{4}\right].$$

Із використанням попередніх рівностей отримаємо

$$m_{\psi_x^{(1)}}=q_0-\left|m_{q_x^{(1)}}\right|;\qquad m_{\psi_y^{(1)}}=q_0-\left|m_{q_y^{(1)}}\right|;$$

$$\sigma^2_{\psi_x^{(1)}}=\left\langle q_x^{(1)}(x,y)q_x^{(1)}(x',y')\right\rangle\Big|_{\substack{x=x'\\y=y'}}=\frac{E^2h_1^2(1+\nu)^2k_x^2\gamma K_0}{8a^2};$$

$$\sigma^2_{\psi_y^{(1)}}=\left\langle q_y^{(1)}(x,y)q_y^{(1)}(x',y')\right\rangle\Big|_{\substack{x=x'\\y=y'}}=\frac{E^2h_1^2(1+\nu)^2k_x^2\gamma K_0}{8b^2}.$$

Для $\eta_1=0{,}0001$ м, $h_1=h_2=0{,}01$ м, $G_\eta^{(1)}=0{,}105\cdot10^{10}$ Па, $E_1=E_2=$ $=2\cdot10^{10}$ Па, $k_x=k_y=2{,}5\cdot10^{-3}$ м$^{-1}$, $\nu_1=\nu_2=0{,}3$, $a=b=1$ м, $A_0=0{,}01$ м, $K_0=0{,}4\cdot10^{-5}$ м^2, $q_0=10^4$ Н/м^2, $\gamma=0{,}5$ і нормально розподіленого початкового прогину маємо

$$P_{1,x}^-(x,y)=0{,}5-\Phi(30{,}77-31{,}40\left|\sin\pi x\cos\pi y\right|);$$

$$P_{1.y}^-(x,y)=0{,}5-\Phi(30{,}77-31{,}40\left|\sin\pi y\cos\pi x\right|).$$

Згідно із залежностями (25), (27) запишемо

$$P_1(-) = P_1^-(0,5;\ 0) = P_1^-(0,5;\ 1) = P_1^-(1;\ 0,5) = P_1^-(0;\ 0,5) = 0,736.$$

Р е з ю м е

Получены зависимости для определения вероятности опасного (критического) состояния клеевых швов слоистой пологой оболочки при наличии случайных начальных неправильностей упругих слоев с известными вероятностными характеристиками. Рассмотрен пример вычисления вероятности критического состояния клеевого шва двухслойной оболочки с известным математическим ожиданием и корреляционной функцией случайного начального прогиба верхнего слоя.

1. *Александров А. Я.* О расчете трехслойных пластин и оболочек // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1965. – № 5. – С. 44 – 49.
2. *Гавриленко Г. Д.* Об устойчивости цилиндрических оболочек с локализованными несовершенствами // Прикл. механика. – 2002. – **38**, № 12. – С. 98 – 102.
3. *Болотин В. В.* Слоистые упругие и вязкоупругие среды с малыми начальными неправильностями // Механика твердого тела. – 1966. – № 3. – С. 59 – 66.
4. *Заривняк И. С.* Расчет составных конструкций с начальными неправильностями. – Львов: Світ, 1991. – 142 с.

Поступила 24. 03. 2003