

Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб

А. Ф. Никитенко, И. В. Любашевская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Выполнен расчет напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения толстостенной неравномерно нагретой трубы, нагруженной внутренним давлением, с использованием кинетической теории ползучести Работнова. Проанализировано влияние перепада температуры по радиусу трубы на распределение интенсивности напряжений и параметр повреждаемости материала в поперечном сечении трубы в различные моменты времени вплоть до начала разрушения. На основании сравнительного анализа отмечается, что соответствующие результаты, полученные с использованием аналогичной теории ползучести в формулировке Качанова, несопоставимы между собой.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, начало разрушения, ползучесть материала, параметр повреждаемости.

Кинетическая теория ползучести Работнова, математическая модель которой имеет вид [1, 2]

$$\dot{\rho}_{ij} = \frac{W}{\sigma_3} \frac{\partial \sigma_3}{\partial \sigma_{ij}}, \quad W = \frac{B_1 \sigma_3^{n+1}}{\varphi_1(\omega)}, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (1)$$

$$\dot{\omega} = \frac{B_2 \sigma_3^{g+1}}{\varphi_2(\omega)}, \quad \omega(x_k, 0) = 0, \quad \omega(x_k^*, t_*) = 1, \quad (2)$$

получила всестороннее экспериментальное обоснование как в условиях простого, так и сложного нагружения [3]. Из нее, как частные случаи, вытекают теория кратковременной ползучести [4], энергетический вариант ползучести и длительной прочности [5], теория упрочнения [1, 2] и, если положить $\varphi_1(\omega) = 1$, теория Качанова [6]. Следует отметить, что теория Качанова и теория Работнова, появившись практически одновременно, развивались и совершенствовались независимо друг от друга.

Кинетическая теория ползучести Работнова с привлечением уравнений равновесия, соотношений Коши, совместности скоростей деформаций ползучести и соответствующих граничных условий позволила объединить в одну две самостоятельные задачи, а именно: задачу определения напряженно-деформированного состояния элементов конструкций, нагруженных известными внешними температурно-силовыми воздействиями, и задачу вычисления времени начала их разрушения [1]. Решение перечисленной выше системы уравнений связано с существенными математическими трудностями даже применительно к самым простым элементам конструкций [1].

Поэтому следует констатировать, что кинетическая теория не нашла еще должного применения в расчетной практике, число решенных прикладных задач весьма ограничено.

На основании изложенного можно заключить, что использование кинетической теории для расчета напряженно-деформированного состояния и времени начала разрушения элементов конструкций – весьма актуальная задача.

Ниже в качестве объекта исследования выбрана толстостенная неравномерно нагретая труба, нагруженная внутренним давлением. Интерес к данной задаче вызван тем, что это одна из простых одномерных задач, в которой напряженное состояние является объемным. Поэтому случай толстостенной трубы под действием внутреннего давления является “... пробным камнем для оценки и сравнения различных теорий ползучести, начиная с простейших и кончая весьма сложными” [1].

Кроме того, необходимо отметить, что решение указанной выше задачи имеет, безусловно, прикладное значение. К настоящему времени известны многочисленные публикации, посвященные расчету толстостенных равномерно нагретых труб, в то время как аналогичные расчеты толстостенных неравномерно нагретых труб, нагруженных внутренним давлением, практически отсутствуют.

Ниже с использованием кинетической теории ползучести (1) и (2) представлены результаты таких расчетов. В частности, выполнен анализ процессов перераспределения напряжений и накопления повреждений в поперечном сечении трубы во времени вплоть до начала разрушения и построена зависимость этих процессов от перепада температуры по радиусу трубы. Соответствующие результаты, полученные с использованием кинетической теории ползучести в формулировках Работнова и Качанова, сравниваются между собой.

Получено также, что решение исходной задачи можно свести к решению этой же задачи, но в предположении установившейся ползучести материала; для получения истинного решения необходимо решение задачи установившейся ползучести умножить на некоторые функции координат и времени, для определения которых выписана соответствующая система интегродифференциальных уравнений и осуществлен анализ ее решения.

Напомним, что в (1) и (2) используются общепринятые обозначения [1–6]: p_{ij} , σ_{ij} – компоненты тензоров деформаций ползучести и напряжений; точка над соответствующим символом обозначает производную по времени; σ_{θ} , $\sigma_{*_{\theta}}$ – эквивалентные напряжения, представляющие собой однородные относительно напряжений функции первой степени; W – удельная мощность рассеяния энергии при ползучести, $W = \sigma_{ij} \dot{p}_{ij}$; ω – параметр, описывающий с феноменологических позиций накопление повреждений в материале. Для характеристик ползучести и длительной прочности материала принята простая зависимость от температуры [1, 6]: в рассматриваемом температурном диапазоне только B_1 и B_2 являются функциями температуры. Время начала разрушения трубы обозначено t_* , вычисляется оно из условия достижения параметром повреждаемости в некоторой точке с координатами x_k^* критического значения, равного единице.

Отметим, что расчет напряженно-деформированного состояния неравномерно нагретых толстостенных труб, нагруженных внутренним давлением, впервые был выполнен с использованием кинетической теории ползучести в [7]. Ниже будем придерживаться изложенной в [7] методики соответствующих расчетов.

1. Пусть толстостенная труба, отнесенная к прямоугольной цилиндрической системе координат r, φ, z , находится под действием стационарного температурно-силового воздействия, а именно: внутреннего давления p и плоского осесимметричного температурного поля $\theta(r)$, причем [1, 4, 6]

$$\theta(r) = \theta(a) + \bar{\theta} \ln(r/a), \quad (3)$$

где $\bar{\theta} = [\theta(b) - \theta(a)] / \ln \beta_1$; $\beta_1 = b/a$; a, b, r – соответственно внутренний, наружный и текущий радиус трубы. Необходимо рассчитать напряженно-деформированное состояние трубы в любой момент времени вплоть до начала ее разрушения.

В трубе возникают напряжения $\sigma_\varphi, \sigma_z, \sigma_r$, которые являются главными. Напряжения σ_φ, σ_r удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_\varphi - \sigma_r}{r} = 0 \quad (4)$$

и граничным условиям

$$\sigma_r(a) = -p, \quad \sigma_r(b) = 0. \quad (5)$$

Главный вектор напряжений σ_z уравнивается силой внутреннего давления на дно трубы:

$$2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = \pi a^2 p.$$

Полагаем, что в трубе реализуется плоское деформированное состояние ($\dot{p}_z = 0$), материал считаем несжимаемым ($\dot{p}_\varphi + \dot{p}_r + \dot{p}_z = 0$) и $\dot{p}_\varphi = \dot{u}/r$, $\dot{p}_r = d\dot{u}/dr$, где $u(r)$ – радиальное перемещение; p_φ, p_r, p_z – соответственно окружная, радиальная и осевая компоненты тензора деформаций.

С учетом принятого получаем

$$\dot{p}_\varphi = \frac{c_1(t)}{r^2}; \quad \dot{p}_z = 0; \quad \dot{p}_r = -\frac{c_1(t)}{r^2}, \quad (6)$$

где $c_1(t)$ – константа интегрирования.

Зависимость коэффициентов B_1 и B_2 от температуры примем в следующем виде [1, 6, 7]:

$$B_1 = B_0 \exp(c\theta); \quad B_2 = k_0 B_1,$$

где B_0, k_0, c – константы.

С учетом (3) имеем

$$B_1 = B_* \rho^{c\bar{\theta}}; \quad B_2 = k_0 B_* \rho^{c\bar{\theta}}; \quad B_* = B_0 e^{c\bar{\theta}(a)}; \quad 1 \leq \rho = r/a \leq \beta_1. \quad (7)$$

Выберем в качестве эквивалентных напряжений в (1), (2) интенсивность напряжений σ_i , тогда с использованием (7) и принятых выше предположений систему уравнений (1) применительно к рассматриваемому случаю окончательно запишем в виде

$$\dot{\rho}_\varphi = -\dot{\rho}_r = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1} \frac{B_*}{\varphi_1(\omega)} \rho^{c\bar{\theta}} (\sigma_\varphi - \sigma_r)^n, \quad \dot{\rho}_z = 0. \quad (8)$$

Полагая в (2) $\varphi_2(\omega) = (1 - \omega)^m$ [2, 3], после интегрирования получаем

$$\omega(\rho, t) = [1 - \mu(\rho, t)], \quad (9)$$

где функция $\mu(\rho, t)$, введенная для удобства дальнейших исследований, имеет вид

$$\mu(\rho, t) = \left[1 - (m+1) \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{g+1} k_0 B_* \rho^{c\bar{\theta}} \int_0^t (\sigma_\varphi - \sigma_r)^{g+1} d\tau \right]^{1/(m+1)}. \quad (10)$$

Далее будем считать, что $\varphi_1(\omega) = (1 - \omega)^{m_1}$ [2, 3]. Тогда с учетом (9) получим $\varphi_1(\mu) = \mu^{m_1}$, $\varphi_2(\mu) = \mu^m$. С помощью этой же замены (9) можно было бы сразу перейти от уравнения (2) к уравнению

$$\dot{\mu} = -B_2 \sigma_i^{g+1} / \mu^m, \quad \mu(r, 0) = 1, \quad \mu(r^*, t_*) = 0, \quad (11)$$

откуда следует (10).

Полученная система уравнений (4)–(6), (11) дает возможность рассчитать в любой момент времени вплоть до начала разрушения напряженно-деформированное состояние толстостенной неравномерно нагретой трубы, нагруженной внутренним давлением, с одновременным учетом с феноменологических позиций накопления повреждений в материале.

2. Следуя работе [7], введем функцию $t^0(\rho)$:

$$t^0 = [(m+1)B_2 \sigma_i^{0g+1}]^{-1}, \quad (12)$$

вместо $c_1(t)$ – функцию $X(t)$:

$$X(t) = \frac{k_1 P}{J_1} [c_1(t)]^{-1/n}, \quad (13)$$

где

$$J_1 = \int_1^{\beta_1} \rho^{-1-2/n_*} d\rho = \frac{n_*}{2} \frac{\beta_1^{2/n_*} - 1}{\beta_1^{2/n_*}}; \quad (14)$$

$$k_1 = (a^2 B_*)^{1/n} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{(n+1)/n}; \quad \frac{2}{n_*} = \frac{2 + c\bar{\theta}}{n}. \quad (15)$$

В (12) σ_i^0 есть интенсивность напряжений в поперечном сечении толстостенной неравномерно нагретой трубы, нагруженной внутренним давлением, в предположении, что материал ее следует закону установившейся ползучести.

Рассчитаем с использованием (11) время начала разрушения трубы в предположении, что для материала справедлив закон установившейся ползучести. Обозначив время начала разрушения трубы t_*^0 , получим

$$t_*^0 = \{(m+1)B_2(\rho^*)[\sigma_i^0(\rho^*)]^{g+1}\}^{-1}.$$

Сравнение этого выражения с (12) показало, что $t_*^0 = t^0(\rho^*)$, где ρ^* – координата точки, в которой произведение $B_2(\sigma_i^0)^{g+1}$ достигает наибольшего значения. Кстати, t_*^0 есть время начала разрушения тела (элемента конструкции) согласно предварительной оценке [1, 8].

Применительно к нашей задаче с учетом (7) и того, что $\sigma_i^0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*}$ [6], соотношение (12) принимает вид

$$t^0 = \left[k_2 k_1^{g+1} \left(\frac{p}{J_1} \right)^{g+1} \rho^{-\kappa} \right]^{-1}, \quad (16)$$

где

$$k_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{-(g+1)/n} \frac{k_0(m+1)}{a^{2(g+1)/n}} B_*^{(n-g-1)/n}; \quad \kappa = \frac{2(g+1) - (n-g-1)c\bar{\theta}}{n}. \quad (17)$$

Время t_*^0 вычисляется из (16) с учетом (15), (17) при $\rho = \rho^* = 1$:

$$t_*^0 = \left[k_2 k_1^{g+1} \left(\frac{p}{J_1} \right)^{g+1} \right]^{-1}. \quad (18)$$

3. Сравним уравнения (6) и (8) между собой. В результате с учетом (13)–(15) получим

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r = \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*} \frac{[\varphi_1(\mu)]^{1/n}}{X(t)}. \quad (19)$$

Учитывая, что $\sigma_i = \sqrt{3}(\sigma_{\varphi} - \sigma_r)/2$, для интенсивности напряжений имеем

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*} \frac{[\varphi_1(\mu)]^{1/n}}{X(t)} = \sigma_i^0 [\varphi_1(\mu)]^{1/n} / X(t). \quad (20)$$

Подставим (19) в (4). Интегрируя с использованием первого граничного условия (5), получаем

$$\sigma_r = -p + \frac{p}{J_1} \int_1^{\rho} \frac{[\varphi_1(\mu)]^{1/n}}{X(t)} \rho^{-1-2/n_*} d\rho. \quad (21)$$

Второе граничное условие (5) позволяет записать

$$\int_1^{\beta_1} [\varphi_1(\mu)]^{1/n} \rho^{-1-2/n_*} d\rho = J_1 X(t). \quad (22)$$

Теперь подставим (20) в (11). С учетом (7) и (16) получим

$$\int_1^{\mu} \psi(z) dz = -[(m+1)t^0]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau, \quad (23)$$

$\psi(z)$ – функция,

$$\psi(z) = z^{[mn-m_1(g+1)]/n}. \quad (24)$$

Таким образом, задача расчета напряженно-деформированного состояния неравномерно нагретой трубы, нагруженной внутренним давлением, свелась, по существу, к определению функций $\mu(\rho, t)$ и $X(t)$, для чего необходимо решить систему уравнений (22), (23). Зная $\mu(\rho, t)$ и $X(t)$, из (21) вычисляем σ_r , а из (19) с использованием (21) – σ_{φ} . Напряжение σ_z находится из условия $\dot{p}_z = 0$. Получаем, что $\sigma_z = (\sigma_{\varphi} + \sigma_r)/2$. Интенсивность напряжений вычисляется из (20), гидростатическая составляющая σ_0 оказывается равной σ_z .

Обозначим $f(\rho, t) = [\varphi_1(\mu)]^{1/n} / X(t)$. Напряженное состояние трубы можно записать в виде

$$\sigma_{\varphi} = \frac{1}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*} f(\rho, t) + \sigma_0; \quad \sigma_z = \sigma_0; \quad \sigma_r = -\frac{1}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*} f(\rho, t) + \sigma_0, \quad (25)$$

где

$$\sigma_0 = -p + \frac{p}{J_1} \int_1^{\rho} f(\rho, t) \rho^{-1-2/n_*} d\rho + \frac{1}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*} f(\rho, t). \quad (26)$$

Пусть $\sigma_\varphi^0, \sigma_z^0, \sigma_r^0, \dot{\rho}_\varphi^0, \dot{\rho}_z^0, \dot{\rho}_r^0$ – решение этой же задачи в предположении установившейся ползучести, которое считается известным [1, 4, 6]. В частности, компоненты девиатора напряжений будут:

$$s_\varphi^0 = \frac{1}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*}; \quad s_z^0 = 0; \quad s_r^0 = -\frac{1}{2} \frac{p}{J_1} \rho^{-2/n_*}.$$

С учетом этого и (26) соотношения (25) преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_\varphi &= s_\varphi^0 f(\rho, t) + \sigma_0 = \sigma_\varphi^0 f(\rho, t) + c; \\ \sigma_z &= s_z^0 f(\rho, t) + \sigma_0 = \sigma_z^0 f(\rho, t) + c; \\ \sigma_r &= s_r^0 f(\rho, t) + \sigma_0 = \sigma_r^0 f(\rho, t) + c; \\ \sigma_i &= \sigma_i^0 f(\rho, t) c = \sigma_0 - \sigma_0^0 f(\rho, t); \\ \sigma_\theta^0 &= (\sigma_\varphi^0 + \sigma_z^0 + \sigma_r^0)/3. \end{aligned} \quad (27)$$

Деформированное состояние трубы определяется из (6) с использованием (13)–(15):

$$\dot{\rho}_\varphi^0 = \dot{\rho}_\varphi^0 [X(t)]^{-n}; \quad \dot{\rho}_z^0 = \dot{\rho}_z^0 [X(t)]^{-n}; \quad \dot{\rho}_r^0 = \dot{\rho}_r^0 [X(t)]^{-n}. \quad (28)$$

Из (27) и (28) следует, что решение задачи, связанной с расчетом напряженно-деформированного состояния толстостенной неравномерно нагретой трубы, нагруженной внутренним давлением, свелось к решению этой же задачи в предположении установившейся ползучести. Чтобы получить истинное решение задачи, необходимо согласно (27), (28) известное решение умножить на соответствующие функции от $\mu(\rho, t)$ и $X(t)$, которые определяются из (22) и (23). Время начала разрушения трубы вычисляется из условия $\mu(\rho^*, t_*) = 0$, где, как легко показать, $\rho^* = 1$. Разрушение начинается с внутренней поверхности трубы.

4. Остановимся на методике решения системы уравнений (22), (23). Рассмотрим случай, когда $m_1 = 0$. При этом $\varphi_1(\mu) = 1$, и система уравнений (1), (2) или, более конкретно, (8), (11) представляет собой математическую модель теории ползучести Качанова [1, 6]. Из (22) с учетом (14) и $\varphi_1(\mu) = 1$ следует $X(t) = 1$. Следовательно, $f(\rho, t) = [\varphi_1(\mu)]^{1/n} / X(t) = 1$. Из (27) и (28) получим $\sigma_0 = \sigma_0^0, c = 0; \sigma_\varphi = \sigma_\varphi^0, \sigma_z = \sigma_z^0, \sigma_r = \sigma_r^0, \dot{\rho}_\varphi = \dot{\rho}_\varphi^0, \dot{\rho}_z = \dot{\rho}_z^0, \dot{\rho}_r = \dot{\rho}_r^0$. Подставляя (24) в (23) и интегрируя, определяем $\mu(\rho, t)$. Из условия $\mu(\rho^*, t_*) = 0$ вычисляем время начала разрушения трубы, равное $t_* = t_*^0$.

Очевидно, что напряженно-деформированное состояние толстостенной трубы является установившимся.

Рассмотрим второй крайний случай, когда $m_1 = m$. При этом $\varphi_1(\mu) = \varphi_2(\mu) = \mu^m$. Функция (24) принимает вид $\psi(\mu) = \mu^{m(n-g-1)/n}$. Подставляя ее в (23) и интегрируя, получаем

$$\mu^{m/n} = \left[1 - \frac{\nu}{t^0} \int_0^t (X(\tau))^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta, \quad (29)$$

из (22) с использованием (29) следует

$$\int_1^{\beta_1} \left[1 - \frac{\nu}{t^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau \right]^\beta \rho^{-1-2/n_*} d\rho = J_1 X(t), \quad (30)$$

где

$$\beta = \frac{m}{n + m(n - g - 1)}; \quad \nu = \frac{n + m(n - g - 1)}{n(m + 1)}. \quad (31)$$

Из (30) находим $X(t)$, а затем из (29) – $\mu^{m/n}$ и таким образом определяем функцию $f(\rho, t) = [\mu(\rho, t)]^{m/n} / X(t)$. Теперь из (27) можно вычислить напряженное состояние, а из (28) – деформированное состояние.

Время начала разрушения трубы определяется из условия $\mu(\rho^*, t_*) = 0$. Именно в этом случае интеграл в левой части равенства (23), т.е. $\int_0^1 \mu^{m(n-g-1)/n} d\mu$, в зависимости от числовых значений характеристик материала может представлять собой несобственный интеграл от неограниченной функции.

Действительно, если $n \geq g + 1$, то показатель степени $k = m(n - g - 1)/n$ положительный, подинтегральная функция (24) не имеет особенностей, исследуемый интеграл вычисляется и имеет конечное значение. Поскольку $m \geq 0$, то из (31) следует, что $\beta \geq 0$. Легко показать, что при $n > g + 1$ получим

$$\begin{aligned} 0 < \beta \leq 1, & \text{ если } m \leq n / [(g + 2) - n]; \\ \beta > 1, & \text{ если } m > n / [(g + 2) - n]. \end{aligned} \quad (32)$$

Если $m > 0$, то следует ограничение $n < g + 2$. Если $n = g + 1$, то

$$\begin{aligned} 0 < \beta \leq 1 & \text{ при } m \leq n; \\ \beta > 1 & \text{ при } m > n. \end{aligned} \quad (33)$$

Пусть теперь $n < g + 1$. В этом случае подинтегральная функция является неограниченной при $\mu = 0$. Для сходимости исследуемого интеграла необходимо, чтобы $k = m[(g + 1) - n]/n < 1$. Легко показать, что

$$\begin{aligned} 0 < \beta \leq 1, & \text{ если } m \leq n / [(g + 2) - n]; \\ \beta > 1, & \text{ если } n / [(g + 2) - n] < m < n / [(g + 1) - n]. \end{aligned} \quad (34)$$

Если же показатель степени $k = m[(g + 1) - n] / n \geq 1$, то исследуемый интеграл расходится, при этом согласно (31) имеем $\beta < 0$.

Данные ограничения на характеристики материала не являются жесткими, их необходимо согласовывать с имеющимися экспериментальными данными [3].

Проанализируем достаточно общий случай, когда $0 < m_1 < m$, $\varphi_1(\mu) = \mu^{m_1}$ и $\varphi_2(\mu) = \mu^m$.

Подставляя (24) в (23) и интегрируя, получаем

$$\mu^{m_1/n} = \left[1 - \frac{\bar{v}}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau \right]^{\bar{\beta}}, \quad (35)$$

из (22) с использованием (35) следует

$$\int_1^{\beta_1} \left[1 - \frac{\bar{v}}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau \right]^{\bar{\beta}} \rho^{-1-2/n_*} d\rho = J_1 X(t), \quad (36)$$

где

$$\bar{\beta} = \frac{m_1}{n + mn - m_1(g + 1)}; \quad \bar{v} = \frac{n + mn - m_1(g + 1)}{n(m + 1)}. \quad (37)$$

Уравнение (36) допускает численное решение, за исключением случая, когда $\bar{\beta} = 1$. При $\bar{\beta} = 1$ с учетом (14) уравнение (36) принимает вид

$$1 - \frac{\bar{v}}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau = X(t)$$

и имеет решение:

$$X(t) = (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+2)}, \quad (38)$$

где \bar{t}^0 – результат использования теоремы о среднем:

$$\int_1^{\beta_1} (\rho^{-1-2/n_*} / \bar{t}^0) d\rho = (1/\bar{t}^0) \int_1^{\beta_1} \rho^{-1-2/n_*} d\rho.$$

Если координату “средней” точки в интервале $1 \leq \rho \leq \beta_1$ обозначить $\bar{\rho}$, то $\bar{t}^0 = t^0(\bar{\rho})$.

Подставляя (38) в (35) и учитывая, что $\bar{\nu}(g+2)=1$ при $\bar{\beta}=1$, после простейших операций получаем:

$$\mu^{m_1/n} = 1 - \frac{\bar{t}^0}{t^0} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0} \right)^{1/(g+2)} \right]. \quad (39)$$

Время начала разрушения вычисляем из условия $\mu(\rho^*, t_*)=0$. При $\rho^*=1$ из (39) следует

$$t_* = \bar{t}^0 [1 - (1 - t_*^0/\bar{t}^0)^{(g+2)}]. \quad (40)$$

С использованием (38) и (39) определяем $f(\rho, t) = [\varphi_1(\mu)]^{1/n} / X(t)$ и тем самым находим согласно (27) напряженное состояние трубы, из (28) с помощью (38) – деформированное состояние.

Из (38) и (39) получим, что $f(\rho, 0)=1$. На основании этого из (27) следует, что напряженное состояние в поперечном сечении трубы при $t=0$ совпадает с тем, которое получено из решения этой же задачи в предположении установившейся ползучести материала, т.е. с решением Качанова.

Из (38) и (39) получим, что $f(\bar{\rho}, t)=1$. С учетом этого из (27) следует, что $\sigma_i(\bar{\rho}, t) = \sigma_i^0(\bar{\rho})$, а именно: эпюра интенсивности напряжений пересекается с аналогичной эпюрой в предположении установившейся ползучести материала в любой момент времени в единственной точке с координатой $\rho = \bar{\rho}$.

Вычислим отношение t_*/t_*^0 . Из (40) имеем

$$\frac{t_*}{t_*^0} = \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{t_*^0}{\bar{t}^0}.$$

Выше отмечалось, что время t_*^0 совпадает со временем начала разрушения, полученным из соответствующего решения Качанова. Из вышепредставленного отношения видно, что t_* и t_*^0 существенно отличаются друг от друга.

В случае $\bar{\beta} \neq 1$ одним из известных численных методов решаем уравнение (36) и тем самым вычисляем $X(t)$, затем из (35) – $\mu^{m_1/n}$ и функцию $f(\rho, t) = [\mu(\rho, t)]^{m_1/n} / X(t)$, далее из (27) определяем напряженное состояние, из (28) – деформированное состояние.

Время начала разрушения трубы находим из условия $\mu(\rho^*, t_*)=0$. Именно в этом случае, как и выше, на характеристики материала необходимо наложить ограничения, чтобы интеграл, стоящий в левой части равенства (23), т.е. $\int_1^0 \mu^k d\mu$, где согласно (24) $k = [mn - m_1(g+1)]/n$, имел конечное значение.

Действительно, если $k \geq 0$, то подынтегральная функция без особенностей, интеграл вычисляется и имеет конечное значение. Тривиальный анализ показывает:

1) при $m_1 < mn/(g+1)$ и условии $g+1 < n < g+2$, $m > g+1$ получим

$$\begin{cases} 0 \leq \bar{\beta} < 1, & \text{если } m_1 < (m+1)n/(g+2), \\ \bar{\beta} = 1, & \text{если } m_1 = (m+1)n/(g+2), \\ \bar{\beta} > 1, & \text{если } (m+1)n/(g+2) < m_1 < mn/(g+1); \end{cases} \quad (41)$$

2) при $m_1 = mn/(g+1)$ и условии $n = g+1$, $m = g+1$ имеем

$$\begin{cases} 0 \leq \bar{\beta} < 1, & \text{если } m_1 < (m+1)n/(g+2), \\ \bar{\beta} = 1, & \text{если } m_1 = (m+1)n/(g+2), \\ \bar{\beta} > 1, & \text{если } m_1 > (m+1)n/(g+1). \end{cases} \quad (42)$$

Если $k < 0$, то подынтегральная функция в исследуемом интеграле будет неограниченной при $\mu = 0$. Для сходимости интеграла необходимо, чтобы $|k| < 1$. При выполнении этих требований и $n < g+1$, $m < g+1$ параметр $\bar{\beta}$ будет:

$$\begin{cases} 0 < \bar{\beta} < 1, & \text{если } mn/(g+1) < m_1 < (m+1)n/(g+2), \\ \bar{\beta} = 1, & \text{если } m_1 = (m+1)n/(g+2), \\ \bar{\beta} > 1, & \text{если } (m+1)n/(g+2) < m_1 < (m+1)n/(g+1). \end{cases} \quad (43)$$

В случае $k < 0$ и $|k| \geq 1$ исследуемый интеграл расходится, при этом, как нетрудно показать, $\bar{\beta} < 0$.

Если $m_1 = m$, то, как следует из (31) и (37), $\bar{\beta} = \beta$, $\bar{\nu} = \nu$, равенства (35) и (36) совпадают с (29) и (30), а области изменения $\bar{\beta}$ с соответствующими ограничениями на характеристики материала (41)–(43) – с описанными выше (32)–(34). Иными словами, для математической модели кинетической теории ползучести (1), (2) вариант модели, когда $\varphi_1(\mu) = \varphi_2(\mu)$, представляет собой предельный случай.

Выше отмечалось, что из математической модели кинетической теории (1) и (2) следует вариант теории Качанова, когда $\varphi_1(\mu) = 1$, что равносильно $m_1 = 0$. Очевидно, что приближение к модели Качанова из (1), (2) осуществляется при $m_1 \rightarrow 0$. Как следует из (41)–(43), это возможно только в случае $0 \leq \bar{\beta} < 1$, при этом $m_1 < (m+1)n/(g+2)$ и $g+1 \leq n < g+2$, $m \geq g+1$.

Именно этот результат определяет те области изменения характеристик материала, где возможно сопоставление соответствующих результатов по модели Качанова и модели (1) и (2). Очевидно, что области изменения параметра $\bar{\beta}$ с соответствующими ограничениями на характеристики мате-

риала, представленные равенствами (43) и (41), (42), когда $\bar{\beta} \geq 1$, не укладываются в рамки математической модели Качанова, что свидетельствует об ограниченной области ее использования.

Ниже в качестве примера представлены результаты соответствующих расчетов с использованием изложенной выше методики, при этом было принято: $B_1 = 3,5 \cdot 10^{-15} (\text{МПа})^{-n} \cdot \text{ч}^{-1}$; $B_2 = 2,8 \cdot 10^{-15} (\text{МПа})^{-(g+1)} \cdot \text{ч}^{-1}$; $n = 6$; $g = 4,75$; $m = 14$; $m_1 = 10$; $\beta_1 = 2$; $p = 40 \text{ атм}$; $\theta(a) = 250^\circ\text{C}$; $c = 0,025 \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$. Именно при $\theta = 250^\circ\text{C}$ определены перечисленные выше характеристики применительно к сплаву Д16Т.

На рис. 1,а представлены графики изменения приведенного напряжения $\sigma_i(\rho, t) / \sigma_i^0(\rho)$ в зависимости от приведенного времени $\tau = t / t_*^0$ в поперечном сечении трубы для различных значений текущего радиуса $\rho = r/a$. Заметим, что здесь $\sigma_i^0(\rho)$ – распределение интенсивности напряжений в поперечном сечении трубы в начальный момент времени, т.е. при $\tau = 0$, совпадающее, как отмечалось выше, с аналогичным распределением, которое следует из соответствующего решения по теории Качанова (на рис. 1,а штриховая линия); t_*^0 – время начала разрушения по теории Качанова, стационарное решение $\sigma_i^0(\rho)$, соответствующее этой теории, существует и остается справедливым в интервале $0 \leq \tau \leq 1$.

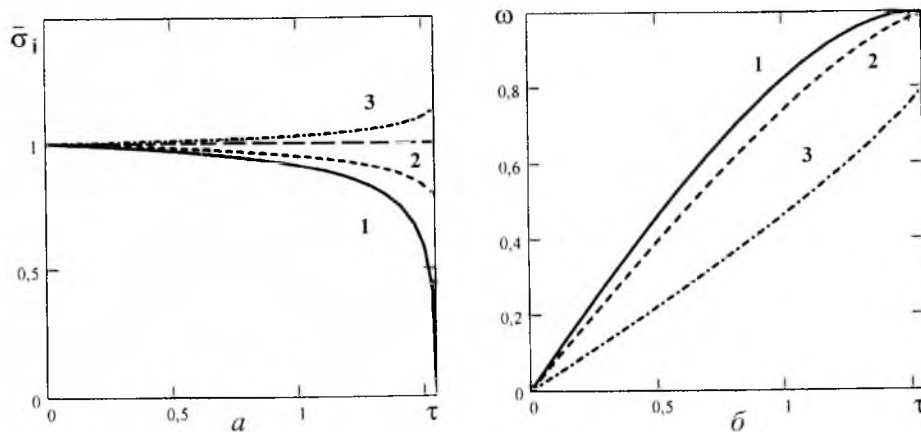


Рис. 1. Изменение в процессе ползучести приведенного напряжения (а) и параметра повреждаемости (б) в поперечном сечении трубы для различных значений текущего радиуса в зависимости от приведенного времени: 1 – $\rho = 1$; 2 – $\rho = 1,2$; 3 – $\rho = \beta_1$ ($p = \text{const}$, $\theta(b) - \theta(a) = 20^\circ\text{C}$).

На рис. 1,б показаны диаграммы, свидетельствующие о накоплении повреждений во времени в поперечном сечении трубы. В рассматриваемом примере перепад температуры по радиусу трубы принят равным 20°C .

Как видно, впервые параметр повреждаемости достигает критического значения, равного единице, на внутреннем радиусе трубы. Следовательно, разрушение начинается с внутренней поверхности, на что также указывает уменьшение $\bar{\sigma}_i(1, \tau)$ во времени вплоть до нуля в момент начала разруше-

ния. В сечении трубы происходит непрерывное перераспределение поля напряжений, чего не следует из теории Качанова. Время начала разрушения существенно (в данном примере несколько больше, чем 1,5) превышает таковое, следующее из решения Качанова. Этот факт свидетельствует о неоправданно заниженной долговечности изделия, если при соответствующих расчетах пользоваться теорией Качанова.

На рис. 2 представлены эпюры распределения приведенного напряжения $\sigma_i(\rho, t_*)/\sigma_i^0(\rho)$ и параметра повреждаемости $\mu(\rho, t_*) = 1 - \omega(\rho, t_*)$ по сечению трубы в момент начала разрушения в зависимости от перепада температуры по радиусу трубы. Видно, что повышение температуры на внешнем радиусе трубы приводит к более равномерному распределению повреждений по сечению, при $\theta(b) - \theta(a) = 50^\circ\text{C}$ оно является практически равнопрочным.

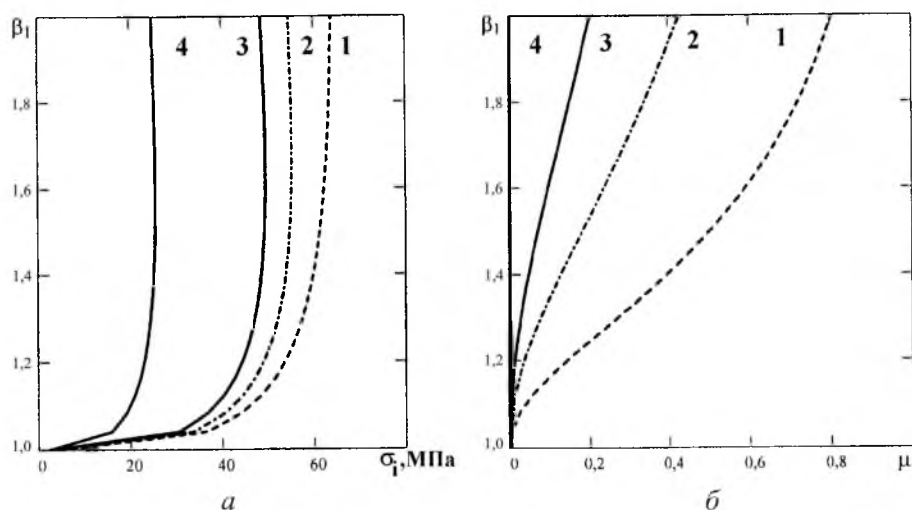


Рис. 2. Эпюры распределения приведенного напряжения (а) и параметра повреждаемости (б) по сечению трубы в момент начала разрушения ($p = \text{const}$): 1 – $\theta(b) - \theta(a) = -50^\circ\text{C}$; 2 – $\theta(b) - \theta(a) = 0^\circ\text{C}$; 3 – $\theta(b) - \theta(a) = 20^\circ\text{C}$; 4 – $\theta(b) - \theta(a) = 50^\circ\text{C}$.

На рис. 3 показаны эпюры распределения приведенного напряжения и параметра повреждаемости по сечению трубы в момент начала разрушения в зависимости от характеристики материала m_1 . Видно, что разрушение начинается с внутренней поверхности трубы, т.е. $\mu(1, t_*) = 0$, независимо от значений m_1 . Если остаточный ресурс по долговечности оценивать с помощью параметра μ , то очевидно, что стремление m_1 к нулю сопровождается увеличением остаточного ресурса, что приводит, как отмечалось выше, к неоправданно заниженной долговечности изделия.

В процессе ползучести на поверхности разрушения ($\rho = 1$) происходит постепенное снижение приведенного напряжения (рис. 1,а) вплоть до нуля в момент разрушения (на рис. 1,а и 3,а кривые 1). Стремление m_1 к нулю сопровождается ростом приведенного напряжения от нуля до единицы при $m_1 = 0$, что соответствует решению Качанова.

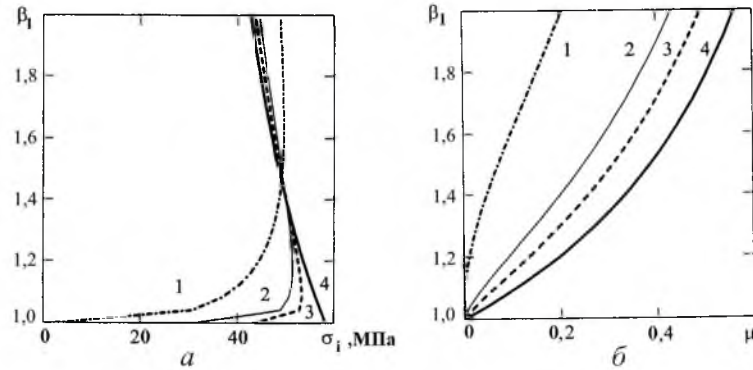


Рис. 3. Эпюры распределения приведенного напряжения (*a*) и параметра повреждаемости (*б*) по сечению трубы в момент начала разрушения в зависимости от значений m_1 ($p = \text{const}$, $\theta(b) - \theta(a) = 20^\circ\text{C}$): 1 – $m_1 = 10$; 2 – $m_1 = 5$; 3 – $m_1 = 3$; 4 – $m_1 = 0$.

Из рис. 3,*a* также следует, что эпюры приведенного напряжения пересекаются с аналогичной эпюрой, соответствующей установившейся ползучести материала (решение Качанова), практически в одной точке, координаты которой несущественно зависят от значений m_1 . Именно через напряженное состояние в этой точке вычисляется (см., например, (40)) время начала разрушения трубы. Можно показать, что это остается справедливым для любого тела (элемента конструкции).

Таким образом, следует отметить, что соответствующие результаты, полученные с использованием кинетической теории ползучести Работнова и аналогичной теории Качанова, совершенно несопоставимы между собой, что отмечалось неоднократно. Например, в [1] установлено, что теория Качанова не учитывает того, что разрушению предшествует накопление повреждений в материале, которые влияют на скорость ползучести и приводят к непрерывному перераспределению поля напряжений. Теория Работнова учитывает все эти обстоятельства, что видно из представленного решения (27), (28) и соответствующих графиков (рис. 1–3). Будем надеяться, что и при решении других задач по кинетической теории ползучести Работнова не возникнет трудностей математического плана, поэтому ее целесообразно использовать в расчетной практике.

Работа выполнена в рамках программы INTAS, грант № 03-51-6046.

Резюме

Виконано розрахунок напружено-деформованого стану та часу початку руйнування товстостінної нерівномірно нагрітої труби, що навантажена внутрішнім тиском, із використанням кінетичної теорії повзучості Работнова. Проаналізовано вплив перепаду температур по радіусу труби на розподіл інтенсивності напружень і параметр пошкодженості матеріалу в поперечному перерізі труби в різні моменти часу аж до початку руйнування. На основі порівняльного аналізу відмічається, що відповідні результати, отримані з використанням аналогічної теорії повзучості Качанова, неузгоджуються між собою.

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Никитенко А. Ф.* Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. – Новосибирск: Новосиб. гос. архит.-строит. ун-т, 1997. – 278 с.
3. *Закономерности ползучести и длительной прочности: Справочник /* Под ред. С. А. Шестерикова. – М.: Машиностроение, 1983. – 101 с.
4. *Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.* Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
5. *Соснин О. В., Горев Б. В., Никитенко А. Ф.* Энергетический вариант теории ползучести. – Новосибирск: Ин-т гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 1986. – 96 с.
6. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
7. *Никитенко А. Ф.* Расчет напряженно-деформированного состояния и длительности до разрушения неравномерно нагретых толстостенных труб при ползучести их материала // Изв. вузов. Стр-во. – 2003. – № 11. – С. 24 – 29.
8. *Работнов Ю. Н.* Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 36 – 41.

Поступила 06. 04. 2005