УДК 624.014.24.072.2.042.3:519.2

Імовірність небезпечного стану двотаврової балки при втраті плоскої форми стійкості з приклепаними полицями під дією випадкових зусиль і початкових прогинів

І. С. Зарівняк

Український державний університет водного господарства і природокористування, Рівне, Україна

Розглядається робота складеної двотаврової балки з приклепаними полицями, які навантажені випадковими зовнішніми зусиллями. Балка до пружного збирання мала випадкові початкові прогини полиць. Одержано залежності для визначення імовірності небезпечного стану балки при втраті плоскої форми згину під впливом випадкових зусиль зрізу, що виникають у зварних точках між стінкою і полицями балки. Наведено приклад визначення імовірності небезпечного стану балки під дією випадкових початкових прогинів полиць.

Ключові слова: імовірність небезпечного стану, двотаврова балка, плоска форма стійкості, випадкові початкові прогини, розподілені випадкові зусилля.

Особливістю створення сучасних конструкцій є проектування їх загальної форми разом із матеріалами. Це вимагає розробки теорії і методів розрахунку, що дозволить оцінювати напружено-деформований стан заданої геометричної форми і неоднорідної структури, а також знаходити критичні значення навантажень на дану конструкцію. Необхідно відмітити одну з особливостей деформування складених конструкцій: існування впливу випадковості прикладених навантажень і початкових неправильностей (прогинів) їх елементів. Відомо небагато публікацій (наприклад, [1–3]), де розглядається питання впливу випадкових чинників на стійкість складених конструкцій.

У даній роботі розглядається складена двотаврова балка, до полиць якої з випадковими початковими прогинами $w_k^0 = k_k f_k(x)$ прикладено нормально розподілені випадкові зусилля $q_k = q_k^0 \psi_k(x)$, де q_k^0, k_k – випадкові параметри з математичними сподіваннями m_k^0, m_k і середніми квадратичними відхиленнями σ_k^0, σ_k відповідно; $\psi_k(x), f_k(x)$ – відомі функції.

Припустимо, що в умовах експлуатації для двотаврової балки характерні поздовжні T_{kj} і вертикальні N_{kj} $(k = 1, 2;\ j = 1, \Lambda, n)$ зусилля зрізу (рисунок). Необхідно визначити імовірність небезпечного стану балки при втраті плоскої форми згину під дією випадкових сил, що виникли в зварних точках внаслідок початкових прогинів полиць і зовнішніх навантажень.

Установимо детерміністичні залежності для визначення зусиль T_{kj}, N_{kj}. Запишемо диференціальні рівняння відповідно для згину стінки, верхніх і нижніх полиць:

$$D_c w'' = -M_0 - Q_0 x - \int_0^x xq\,dx - \sum_{i=1}^{j} (x - x_i)(N_{1i} + N_{2i}); \tag{1a}$$

$$D_1(w_k - w_k^0)'' + B_1 z_1^2 w_k'' = -\int_0^x xq_k dx + \sum_{i=1}^{j}(x - x_i)N_{ki} \tag{1б}$$

або

$$\begin{cases} D_c w'' = -M_0 - Q_0 x - \int_0^x xqdx - \sum_{i=1}^{j}(x - x_i)(N_{1i} + N_{2i}); \\ E_1 I_1 w_k'' = D_1 w_k^{0''} - \int_0^x xq_k dx + \sum_{i=1}^{j}(x - x_i)N_{ki} \quad (k = 1,2), \end{cases} \tag{1в}$$

де M_0, Q_0 – статичні початкові параметри [4]; D_c, D_1 – жорсткість при згині стінки і полиць; w, w_1, w_2 – прогини стінки, верхніх і нижніх полиць відповідно; z_1 – відстань від нейтральної лінії балки до центрів ваги полиць; $E_1 I_1 = D_1 + B_1 z_1^2$; B_1 – жорсткість при розтязі верхніх (нижніх) полиць; q – вертикально розподілене зусилля на стінку.

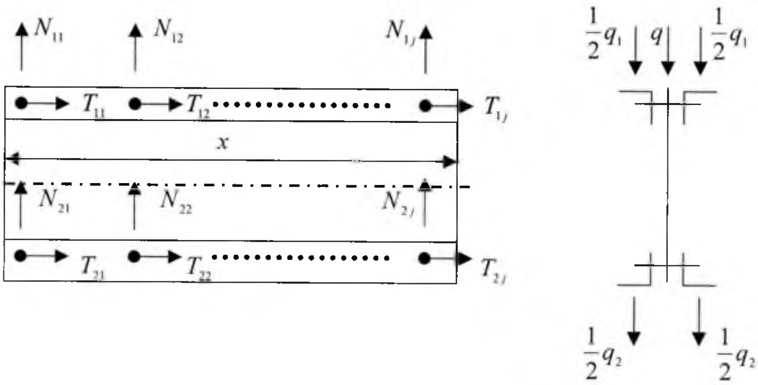

Схема навантаження двотаврової балки.

При розв'язуванні диференціальних рівнянь (1) отримаємо

$$w = \frac{1}{D_c}\left[-M_0\frac{x^2}{2} - Q_0\frac{x^3}{6} - \int dx \int dx \int_0^x xqdx - \sum_{i=1}^{j}\frac{(x - x_i)^3}{6}(N_{1i} + N_{2i})\right] +$$

$$+ C_1 x + C_2; \tag{2}$$

$$w_k = \frac{1}{E_1 I_1}\left[D_1 w_k^0 - \int dx \int dx \int_0^x xq_k dx + \sum\frac{(x - x_i)^3}{6}N_{ki} + C_1^{(k)}x + C_2^{(k)}\right], \tag{3}$$

де C_1, C_2, $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ – сталі інтегрування.

Тепер вертикальні зусилля зрізу N_{kj} $(k = 1, 2;\ j = 1, \Lambda, n)$ в зварних точках визначимо за формулою

$$N_{kj} = G_з(w - w_k)\Big|_{x=x_j}, \tag{4}$$

де $G_з$ – модуль зсуву кожної зварної точки, що визначається експериментально (Н/м^2).

Невідомі сталі C_1, C_2 знайдемо з умови

$$w(0) = w(l) = 0,$$

в результаті отримаємо

$$C_2 = 0;$$

$$C_1 = \frac{M_0 l}{2} + \frac{Q_0 l^2}{6} + \frac{1}{l}\int dx \int dx \int_0^x xq dx \Bigg|_{x=l} + \sum_{i=1}^{n} \frac{(l - x_i)^3}{6l}(N_{1i} + N_{2i}).$$

Для знаходження сталих інтегрування $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ використаємо умови рівноваги полиць:

$$\sum_{j=1}^{n} N_{kj} = \int_0^l q_k dx; \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j N_{kj} = \int_0^l xq_k dx. \tag{5}$$

Якщо вертикальні зусилля N_{kj} визначаються зі співвідношень (4), то горизонтальні зусилля зрізу T_{kj} – з рівнянь, що витікають з умов сумісності деформацій:

$$\Delta_{kj} - \Delta_{kj+1} + u_j - u_{kj} = 0 \qquad (j = 1, \Lambda, n-1) \tag{6}$$

і рівнянь рівноваги

$$\sum_{j=1}^{n} T_{kj} = 0 \qquad (k = 1, 2), \tag{7}$$

де

$$\Delta_{kj} = \frac{T_{kj}}{G_з}; \qquad u_j = -z_1 \int_{x_j}^{x_{j+1}} w'' dx; \qquad u_{kj} = -z_1 \int_{x_j}^{x_{j+1}} w_k'' dx. \tag{8}$$

Розглянемо окремий випадок, коли стінка шарнірно закріплена, зовнішні навантаження відсутні, початкові прогини полиць $w_1^0(x) = -w_2^0(x)$. Тоді $w = 0$, $Q_0 = 0$, $M_0 = 0$, а системи рівнянь (4)–(7) з урахуванням залежностей (8) для визначення невідомих $C_1^{(k)}$, $C_2^{(k)}$, T_{kj}, N_{kj} набудуть наступного вигляду:

$$\frac{G_з}{6E_1 I_1} \sum_{i=1}^{j-1} (x_j - x_i)^3 N_{ki} + N_{kj} + \frac{G_з}{E_1 I_1}(x_j C_1^{(k)} + C_2^{(k)}) = -\frac{G_з D_1}{E_1 I_1} w_k^0(x_j); \tag{9а}$$

$$\sum_{i=1}^{n} N_{ki} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i N_{ki} = 0 \qquad (k = 1, 2;\ j = 1, \Lambda, n); \tag{9б}$$

$$\begin{cases} T_{kj+1} - T_{kj} = \dfrac{G_3 z_1}{E_1 I_1} \left[\displaystyle\sum_{i=1}^{j} \dfrac{(x_{j+1} - x_i)^2 - (x_j - x_i)^2}{2} N_{ki} + \right. \\ \qquad \left. + D_1 (w_k^{0'}(x_{j+1}) - w_k^{0'}(x_j)) \right]; \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} T_{ki} = 0 \quad (k = 1, 2;\ j = 1, \Lambda, n-1). \end{cases} \tag{10}$$

Якщо зусилля зрізу T_{kj}, N_{kj} визначене, то групу горизонтальних складових зусиль, що виникли у зварних точках k-ї полиці, замінимо однією еквівалентною силою [5]:

$$\sum_{j=1}^{n} T_{kj} \frac{\eta_j^{(1)}}{\eta_n^{(1)}},$$

групу вертикальних – силою [6]:

$$\sum_{j=1}^{n} N_{kj} \frac{\eta_j^{(2)}}{\eta_n^{(2)}}.$$

Указані сили прикладені у тому ж перерізі, що і сили T_{kn}, N_{kn} $(k = 1, 2)$.

Тоді ступінь вичерпування несучої здатності балки (величина, обернена до запасу стійкості) при втраті плоскої форми стійкості у випадку дії горизонтальних складових зусиль визначиться залежністю

$$c_{1k} = \frac{\left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} T_{kj} \frac{\eta_j^{(1)}}{\eta_n^{(1)}} \right|}{\dfrac{B}{\eta_n^{(1)} l^2}} = \frac{l^2 \left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(1)} T_{kj} \right|}{B}, \tag{11}$$

у випадку дії вертикальних зусиль –

$$c_{2k} = \frac{\left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} N_{kj} \frac{\eta_j^{(2)}}{\eta_n^{(2)}} \right|}{\beta \dfrac{\sqrt{BGI_k}}{\eta_n^{(2)} l^2}} = \frac{l^2 \left| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(2)} N_{kj} \right|}{\beta \sqrt{BGI_k}}, \tag{12}$$

де $\eta_j^{(1)}$, $\eta_j^{(2)}$, β – параметри, значення яких наведено в роботах [5, 6]; B – жорсткість при згині у площині найменшої жорсткості; GI_k – жорсткість при крутінні.

Оскільки зусилля T_{kj}, N_{kj} лінійно залежать від параметрів q_k^0, k_k $(k=1, 2)$, замість виразів (11), (12) можна записати

$$c_{ik} = A_{ik}^{(1)} q_1^0 + A_{ik}^{(2)} q_2^0 + A_{ik}^{(3)} k_1 + A_{ik}^{(4)} k_2 \qquad (i=1, 2), \tag{13}$$

де коефіцієнти $A_{ik}^{(m)}$ $(m=1, \Lambda, 4)$ обчислюються через відомі функції $\psi_k(x)$, $f_k(x)$ у зварних точках, параметри стінки, полиць балки і величини $\eta_j^{(1)}$, $\eta_j^{(2)}$.

Математичні сподівання m_{ik} і дисперсії σ_{ik}^2 ступенів вичерпування несучої здатності c_{ik} виразимо на основі формул (13) через відповідні числові характеристики незалежних параметрів q_k^0, k_k:

$$m_{ik} = A_{ik}^{(1)} m_1^0 + A_{ik}^{(2)} m_2^0 + A_{ik}^{(3)} m_1 + A_{ik}^{(4)} m_2;$$

$$\sigma_{ik}^2 = A_{ik}^{(1)^2} \sigma_1^{0^2} + A_{ik}^{(2)^2} \sigma_2^{0^2} + A_{ik}^{(3)^2} \sigma_1^2 + A_{ik}^{(4)^2} \sigma_2^2.$$

Якщо густини розподілів імовірностей $p(c_{ik})$ величин c_{ik} відомі, то можна визначити імовірність небезпечного стану балки при втраті плоскої форми згину від відповідної групи зусиль за формулою

$$P_{ik}(-) = \int_1^\infty p(c_{ik}) dc_{ik} \qquad (i=1, k;\ k=1, 2).$$

Імовірність того, що балка не втратить плоскої форми згину від відповідної групи зусиль, складає

$$P_{ik}(+) = 1 - P_{ik}(-) = \int_0^1 p(c_{ik}) dc_{ik} \qquad (i=1, 2).$$

Тепер імовірність того, що балка втратить стійкість при дії хоча б однієї з груп горизонтальних або вертикальних складових зусиль, запишемо так:

$$P(-) = 1 - \prod_{i,k=1}^{2} P_{ik}(+).$$

Якщо густини розподілу імовірностей $p(c_{ik})$ є нормально розподіленими

$$p(c_{ik}) = \frac{1}{\sigma_{ik}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(c_{ik} - m_{ik})^2}{2\sigma_{ik}^2}\right],$$

то

$$P_{ik}(-) = \frac{1}{\sigma_{ik}\sqrt{2\pi}} \int_1^\infty \exp\left[-\frac{(c_{ik} - m_{ik})^2}{2\sigma_{ik}^2}\right] dc_{ik} = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{1 - m_{ik}}{\sigma_{ik}}\right),$$

а

$$P_{ik}(+) = 0{,}5 + \Phi\left(\frac{1 - m_{ik}}{\sigma_{ik}}\right).$$

Тоді

$$P(-) = 1 - \prod_{i,k=1}^{2}\left[0{,}5 + \Phi\left(\frac{1 - m_{ik}}{\sigma_{ik}}\right)\right]. \qquad (14)$$

Приклад. Розглянемо шарнірно закріплену симетричну балку з однорідного матеріалу з відсутніми зовнішніми навантаженнями і випадковими початковими прогинами полиць $w_1^0 = -w_2^0 = k_1 x(l - x)$. Для зварних точок $2n = 10$ із наступними параметрами для стінки і полиць: $t = 0{,}04$ м; $G_3 = 7{,}84 \cdot 10^{10}$ Па; $E = 19{,}6 \cdot 10^{10}$ Па; $B = 2 \cdot 10^{-8} E$; $I_1 = 57{,}3 \cdot 10^{-8}$ м^4; $D_1 = 0{,}8 \cdot 10^{-8} E$; $GI_k = 0{,}8 \cdot 10^{-8} E$; $l = 0{,}2$ м; $z_1 = 0{,}02$ м знайдемо [5, 6] $\beta = 1{,}12$; $\eta_1^{(2)} = \eta_5^{(2)} = 0{,}012$; $\eta_2^{(2)} = \eta_4^{(2)} = 0{,}048$; $\eta_3^{(2)} = 0{,}058$; $\eta_1^{(1)} = 0{,}024$; $\eta_2^{(1)} = 0{,}052$; $\eta_3^{(1)} = 0{,}054$; $\eta_4^{(1)} = 0{,}061$; $\eta_5^{(1)} = 0{,}084$.

Тепер на основі формул (11), (12) отримаємо

$$c_{11} = c_{12} = 39644\frac{l^2 k_1}{B} = 1{,}62k_1; \qquad c_{21} = c_{22} = \frac{5124 l^2}{\beta\sqrt{BGI_k}} k_1 = 0{,}072k_1. \qquad (15)$$

Для математичного сподівання $m_1 = 0{,}5$ м$^{-1}$ і середнього квадратичного відхилення $\sigma_1 = 0{,}1$ м$^{-1}$ випадкового параметра k_1 на основі залежностей (15) маємо $m_{11} = m_{12} = 0{,}81$; $m_{21} = m_{22} = 0{,}036$; $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0{,}162$; $\sigma_{21} = \sigma_{22} = 0{,}0072$.

Якщо випадкові величини c_{ik} нормально розподілені, то з використанням формули (14) знайдемо імовірність небезпечного стану балки:

$$P(-) = 1 - (0{,}5 + \Phi(1{,}17))^2 \cdot 1^2 = 0{,}227.$$

Відмітимо, що при цьому повинна мати місце розрахункова умова

$$P(-) \le [P(-)],$$

де $[P(-)]$ – нормативне значення імовірності досягнення небезпечного стану складеної двотаврової балки, що встановлюється на основі техніко-економічних міркувань та досвіду виготовлення двотаврових балок.

Результати роботи можуть використовуватися при визначенні критичних параметрів випадкових навантажень, що прикладені до складеної двотаврової балки в процесі її експлуатації, та параметрів балки при її виготовленні методами пружного складання.

Р е з ю м е

Рассматривается работа составной двутавровой балки с приклепанными полками, к которым приложены случайные внешние усилия. Балка до ее упругого собирания имела случайные начальные прогибы полок. Получены зависимости для определения вероятности критического состояния балки при потере плоской формы изгиба под влиянием случайных усилий среза, возникающих в сварных точках между стенкой и полками балки. Приведен пример определения вероятности критического состояния балки под воздействием случайных начальных прогибов полок.

1. *Заривняк И. С.* Вероятность достижения предельного состояния двутавровой балки с приклепанными полками под воздействием случайных нагрузок и начальных неправильностей // Изв. вузов. Стр-во и архитектура. – 1990. – № 9. – С. 22 – 26.
2. *Заривняк И. С.* Изгиб составной балки двутаврового сечения с начальными прогибами полок // Изв. вузов. Машиностроение. – 1987. – № 1. – С. 15 – 18.
3. *Заривняк И. С.* Расчет составных конструкций с начальными неправильностями. – Львов: Світ, 1991. – 142 с.
4. *Писаренко Г. С. и др.* Сопротивление материалов. – М.: Высш. шк., 1986. – 775 с.
5. *Муллагулов М. Х.* Новый приближенный метод расчета прямых стержней постоянного и ступенчато-переменного сечений на устойчивость при сложной комбинации нагрузок // Прикл. механика. – 1979. – **15**, № 11. – С. 108 – 115.
6. *Муллагулов М. Х.* Практический метод расчета устойчивости плоской формы изгиба балок при произвольных нагрузках и условиях опирания // Там же. – 1981. – **17**, № 1. – С. 99 – 105.

Поступила 12. 06. 2003