ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2006. Том 8, N 4. С. ?? – ??

УДК 532.59

НЕЛИНЕЙНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

И. Т. СЕЛЕЗОВ*, О. В. АВРАМЕНКО, Ю. В. ГУРТОВЫЙ****

* *Институт гидромеханики НАН Украины, Киев*

** *Кировоградский государственный педагогический университет*

Получено 20.02.2006

Исследуется устойчивость волновых пакетов, распространяющихся вдоль поверхности раздела двух жидких слоев с различными плотностями с учетом сил поверхностного натяжения. Анализ проводится методом многомасштабных разложений до приближения третьего порядка. Предствлены характерные диаграммы нелинейной устойчивости при различных толщинах нижнего слоя. Обнаружено существенное перераспределение областей нелинейной устойчивости при изменении отношения толщин жидких слоев.

Досліджується стійкість хвильових пакетів, що розповсюджуються вздовж поверхні розділу двох рідких шарів з різними густинами з врахуванням сил поверхневого натягу. Аналіз проводиться методом багатомасштабних розкладень до приближення третього порядку. Наведено характерні діаграми нелінійної стійкості в залежності від товщини нижнього шару. Виявлено значний перерозподіл областей нелінійної стійкості при зміні співвідношень товщин рідких шарів.

Nonlinear stability of wave packets propagating along the interface between the two fluid layers of different densities with taking into account the surface tension is investigated. The analysis is carried out by the method of multiple scale expansions up to the third order approximation. Characteristic diagrams of nonlinear stability at different thicknesses of the lower layer are presented. The essential redistribution of nonlinear stability regions with changing fluid layer thickness ratio is discovered.

ВВЕДЕНИЕ

Исследование волновых процессов в жидкостях с поверхностями раздела, их общих свойств и особенностей представляет большой интерес во многих разделах нелинейной динамики и физики. Особый интерес представляет анализ формирования, эволюции и устойчивости больших волн [?, ?]. Распространение внутренних волн в системе, состоящей из двух жидкостей конечной глубины на основе уравнений Эйлера при условии, что толщина слоя мала по сравнению с горизонтальным масштабом, рассмотрено в [?], решения найдены в виде разложений по малому параметру толщины. В [?] на основе разложений искомых функции в ряд Фурье исследованы нелинейные внутренние волны на поверхности раздела двух полуограниченных сред с различными плотностями. Проведен анализ основных характеристик волновых движений в некоторых предельных случаях. Распространение внутренних уединенных волн в двуслойной жидкости, ограниченной сверху и снизу твердыми плоскостями без учета сил поверхностного натяжения исследовано в [?], получено решение в форме обобщенных степенных рядов по параметру, зависящему от величины, обратной числу Фруда.

В [?] применяется метод многомасштабных разложений для вывода пары дифференциальных уравнений в частных производных, которые описывают эволюцию волновых пакетов на поверхности раздела двух полуограниченных жидкостей с различными плотностями, учитывая эффект поверхностного натяжения. В результате получены два альтернативных нелинейных уравнения Шредингера, а также исследована устойчивость волновых пакетов конечной амплитуды. Метод многомасштабных разложений был также успешно применен Г. Хасимото и Г. Оно [?] для получения нелинейного уравнения Шредингера, описывающего эволюцию гравитационных волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности жидкого слоя. Существенный вклад в изучение указанной проблемы сделан Г. Сегуром и Дж. Хаммаком [?], Г. Йеном и Б. Лейком [?], М. Абловицем и Г. Сегуром [?], Дж. Уиземом [?], П. Бхатнагаром [?], Г. Ламбом [?], И.Т. Селезовым и С.В. Корсунским [?, ?].

Распространению волновых пакетов в жидких средах с учетом сил поверхностного натяжения посвящены работы [?, ?, ?].

Если в случае больших океанских волн поверхностным натяжением можно пренебречь, то при рассмотрении капиллярных волн в лабораторных исследованиях гидродинамических систем влияние сил поверхностного натяжения может быть весьма существенным. В последнее время проблемам нелинейных внутренних волновых движений посвящено много работ, например, [?, ?, ?, ?].

Последовательному исследованию распространения волновых пакетов на свободной поверхности и на поверхности контакта двух жидких сред посвящены работы, краткая характеристика которых представлена ниже. В [?] представлен обстоятельный анализ волновых движений на поверхности контакта двух полубесконечных жидкостей с учетом поверхностного натяжения. Аналогичная задача о распространении волновых пакетов на поверхности контакта жидкого полупространства и жидкого слоя над ним изучалась в [?] методом многомасштабных разложений до третьего порядка, где обсуждалась проблема устойчивости волновых пакетов в системе "слой–полупространство". Аналогичная задача анализировалась в [?] для случая малых частот. В статьях, опубликованных в последнее время, рассмотрены различные аспекты четвертого приближения проблемы эволюции нелинейных волновых пакетов, такие как эволюционное уравнение при околокритических волновых числах [?, ?], эволюционное уравнение при волновых числах, далеких от критического [?, ?, ?], исследование устойчивости решений указанных уравнений [?, ?], где построены диаграммы устойчивости в зависимости от толщины верхнего слоя в системе "слой–полупространство". В [?] рассмотрена структура волнового пакета, его форма, а также условия резонанса второй гармоники для случая жидкости, состоящей из двух слоев конечной глубины.

В предыдущей статье авторов [?] исследовалась форма волнового пакета в различных областях устойчивости, границы областей с различной формой и резонанс второй гармоники, когда амплитуда второй гармоники возрастает по сравнению с амплитудой первого приближения. Установлены области резонанса второй гармоники.

В настоящей статье рассматривается проблема нелинейной устойчивости волновых пакетов, распространяющихся вдоль границы раздела в системе "слой–слой", и анализируется их устойчивость в зависимости от отношений толщин и плотностей верхней и нижней жидкостей.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим задачу о распространении волновых пакетов конечной амплитуды на поверхности контакта двух жидких слоев $\Omega_1 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, -h_1 \le z < 0\}$ и $\Omega_2 = \{(x, y, z) : |x| < \infty, |y| < \infty, 0 \le z \le h_2\}$ с плотностями ρ_1 и ρ_2 соответственно. Учитывается сила поверхностного натяжения. Сила тяжести направлена перпендикулярно к поверхности контакта в направлении, противоположном к вертикальной оси z (рис. 1). Жидкости считаются несжимаемыми.

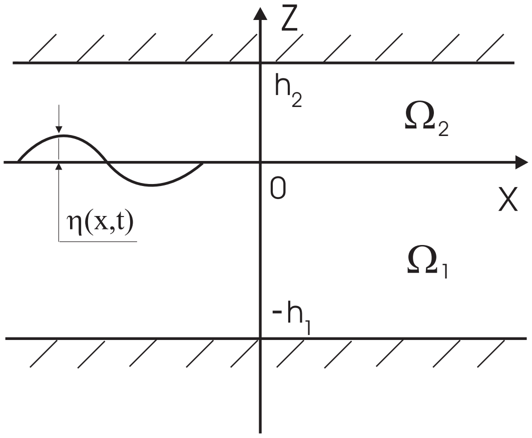

Рис. 1. Схема постановки задачи

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\nabla^2 \varphi_j = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_j, \tag{1}$$

$$\eta_{,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x}\eta_{,x} \quad \text{на} \quad z = \eta(x, t), \tag{2}$$

$$\varphi_{1,t} - \rho\varphi_{2,t} + (1-\rho)\eta + \frac{1}{2}\left[(\nabla\varphi_1)^2 - \rho(\nabla\varphi_2)^2\right] - -T\left(1+\eta_{,x}^2\right)^{-3/2}\eta_{,xx} = 0 \quad \text{на} \quad z = \eta(x, t), \tag{3}$$

$$\varphi_{1,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = -h_1, \tag{4}$$

$$\varphi_{2,z} = 0 \quad \text{при} \quad z = h_2, \tag{5}$$

где $j = 1, 2$; $\rho = \rho_2/\rho_1$ – отношение плотностей; $\eta(x, t)$ – отклонение поверхности от ее невозмущенного состояния $z = 0$.

Безразмерные величины введены с помощью характерной длины L, характерного времени $(L/g)^{1/2}$, плотности нижней жидкости ρ_1 и ускорения свободного падения g. Безразмерный коэффициент поверхностного натяжения при этом имеет вид $T^* = T/(L^2\rho g)$ (звездочка опущена).

Для определения приближенного решения задачи (1)–(5) для малых, но конечных амплитуд, применим метод многомасштабных разложений [?]:

$$\eta(x, t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \eta_n(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\varepsilon^4), \tag{6}$$

$$\phi_j(x, z, t) = \sum_{n=1}^{3} \varepsilon^n \phi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\varepsilon^4), \tag{7}$$

где ε – малый безразмерный параметр; $x_n = \varepsilon^n x$; $t_n = \varepsilon^n t$ – масштабные переменные.

Подстановка выражений (6)–(7) в (1)–(5) приводит к трем линейным задачам относительно неизвестных функций η_1, ϕ_{11}, ϕ_{21}, η_2, ϕ_{12}, ϕ_{22}, η_3, ϕ_{13}, ϕ_{23}, которые являются слагаемыми в многомасштабных разложениях потенциалов ϕ_1, ϕ_2 (7) и в разложении отклонения поверхности контакта жидкостей с различными свойствами η (6).

Представим основные соотношения:
дисперсионное уравнение

$$\omega^2 = \frac{k(1-\rho+Tk^2)}{\mathrm{cth}kh_1+\rho\mathrm{cth}kh_2}, \qquad (8)$$

решение первого приближения

$$\eta_1 = A\exp i\theta + \overline{A}\exp(-i\theta), \qquad (9)$$

$$\phi_{11} = -i\frac{\omega}{k}\left[A\exp i\theta - \overline{A}\exp(-i\theta)\right]\frac{\mathrm{ch}k(h_1+z)}{\mathrm{sh}kh_1}, \qquad (10)$$

$$\phi_{21} = i\frac{\omega}{k}\left[A\exp i\theta - \overline{A}\exp(-i\theta)\right]\frac{\mathrm{ch}k(h_2-z)}{\mathrm{sh}kh_2}, \qquad (11)$$

где $\overline{A}$ – величина, сопряженная комплексной огибающей волнового пакета A; $\theta = kx_0 - \omega t_0$; k – волновое число и ω – частота центра волнового пакета. Итак, как и в случае распространения волн вдоль поверхности контакта двух полупространств [?], а также в системе “слой–полупространство” [?], в рассматриваемой системе “слой–слой” поверхность контакта линейно устойчива или неустойчива в зависимости от того, является k больше или меньше критического волнового числа $k_c = [(\rho-1)/T]^{1/2}$.

Частное решение задачи второго порядка можно записать в виде

$$\eta_2 = \frac{\omega^2\left(1-\mathrm{cth}^2kh_1-\rho(1-\mathrm{cth}^2kh_2)\right)}{1-\rho}A\overline{A} + \Lambda A^2\exp 2i\theta + cc, \qquad (12)$$

$$\phi_{12} = \frac{1}{k}\left[\left(\frac{\omega}{k}(1+kh_1\mathrm{cth}kh_1)A_{,x_1}\right)\frac{\mathrm{ch}k(h_1+z)}{\mathrm{sh}kh_1} + A_{,t_1} - \omega(z+h_1)A_{,x_1}\frac{\mathrm{sh}k(h_1+z)}{\mathrm{sh}kh_1}\right]\exp i\theta + i\frac{\omega}{k}\left[k\mathrm{cth}kh_1 - \Lambda\right]A^2\frac{\mathrm{ch}2k(h_1+z)}{\mathrm{sh}2kh_1}\exp 2i\theta + cc, \qquad (13)$$

$$\phi_{22} = -\frac{1}{k}\left[\left(\frac{\omega}{k}(1+kh_2\mathrm{cth}kh_2)A_{,x_1}\right)\frac{\mathrm{ch}k(h_2-z)}{\mathrm{sh}kh_2} + A_{,t_1} + \omega(z-h_2)A_{,x_1}\frac{\mathrm{sh}k(h_2-z)}{\mathrm{sh}kh_2}\right]\exp i\theta + i\frac{\omega}{k}\left[k\mathrm{cth}kh_2 + \Lambda\right]A^2\frac{\mathrm{ch}2k(h_2-z)}{\mathrm{sh}2kh_2}\exp 2i\theta + cc, \qquad (14)$$

где

$$\Lambda = \frac{(1.5\mathrm{cth}^2kh_1 - 0.5 - \rho(1.5\mathrm{cth}^2kh_2 - 0.5))\omega^2}{2\omega^2(\mathrm{cth}2kh_1+\rho\mathrm{cth}2kh_2) - k(1-\rho+4Tk^2)}. \qquad (15)$$

Условие разрешимости третьего порядка будет

$$A_{,t_2} + \omega' A_{,x_2} - 0.5i\omega'' A_{,x_1x_1} = -ik\omega^{-1}(\mathrm{cth}kh_1+\rho\mathrm{cth}kh_2)^{-1}IA^2\overline{A}, \qquad (16)$$

где

$$I = 0.5\{\Lambda\omega^2[3\mathrm{cth}^2kh_2 - 1 - \rho(3\mathrm{cth}^2kh_2-1)] - 1.5Tk^4 + 2k\omega^2[2\mathrm{cth}kh_1 - \mathrm{cth}^3kh_1) + \rho(2\mathrm{cth}kh_2 - \mathrm{cth}^3kh_2)] - \frac{\omega^4}{(1-\rho)}(1-\mathrm{cth}^2kh_1 - \rho(1-\mathrm{cth}^2kh_2))^2\}. \qquad (17)$$

2. АНАЛИТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

После замены независимых переменных x и t на

$$\xi = x - \omega' t, \quad \zeta = t, \qquad (18)$$

запишем эволюционное уравнение (16) в виде

$$A_{,\zeta} - 0.5i\omega'' A_{,\xi\xi} = i\varepsilon^2\omega^{-1}I_0A^2\overline{A}, \qquad (19)$$

где $I_0 = -k(\mathrm{cth}kh_1+\rho\mathrm{cth}kh_2)^{-1}I$.

Уравнение (19) дает такие решения, которые изменяются только с течением времени:

$$A = a\exp(i\varepsilon^2\omega^{-1}I_0a^2\zeta), \qquad (20)$$

где a – постоянная.

Дадим решению (20) возмущение

$$A = (a+\alpha)\exp(i\varepsilon^2\omega^{-1}I_0a^2\zeta + i\beta),$$

где $\alpha(\zeta,\xi)$ и $\beta(\zeta,\xi)$ являются действительными. Подставим возмущенное решение в эволюционное уравнение (19) и придем к системе уравнений относительно α и β:

$$\alpha_{,\zeta} + 0.5\omega''\alpha\beta_{,\xi\xi} = 0,$$
$$\alpha\beta_{,\zeta} - 0.5\omega''\alpha_{,\xi\xi} = 2\alpha\varepsilon^2\omega^{-1}I_0a^2. \qquad (21)$$

Решение линейной системы (21) можно представить в виде

$$\alpha = \alpha_1\exp i(k_1\xi - \omega_1\zeta),$$

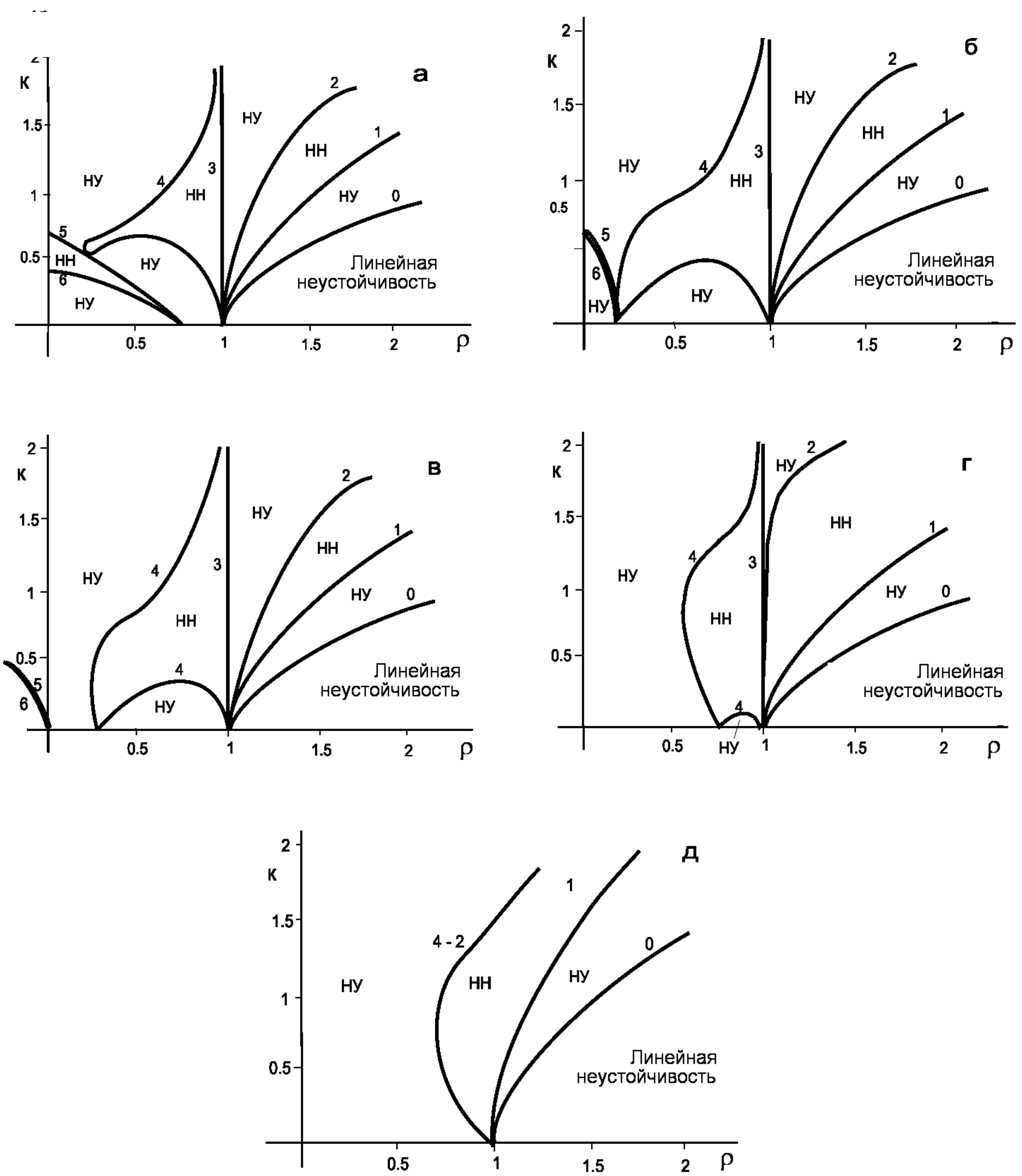

Рис. 2. Диаграммы устойчивости при $h_2 = 1$ и при толщине нижнего слоя: *а* – $h_1 = 10$; *б* – $h_1 = 2.23$; *в* – $h_1 = 1.73$; *г* – $h_1 = 1.1$; *д* – $h_1 = 1$

$$\beta = \beta_1 \exp i(k_1\xi - \omega_1\zeta). \qquad (22)$$

Подстановка решения (22) в (21) дает систему относительно амплитуд α_1 и β_1:

$$-i\omega_1\alpha_1 - 0.5a\omega'' k_1^2\beta_1 = 0,$$
$$\left(0.5\omega'' k_1^2 - 2\varepsilon^2\omega^{-1}I_0 a^2\right)\alpha_1 - ia\omega_1\beta_1 = 0. \qquad (23)$$

Из полученной системы следует дисперсионное соотношение

$$\omega_1^2 = 0.25\omega''^2 k_1^2\left(k_1^2 - 4\varepsilon^2\omega^{-1}\omega''^{-1}I_0a^2\right). \qquad (24)$$

Таким образом, условие устойчивости имеет вид

$$I_0\omega'' < 0. \qquad (25)$$

Далее уравнения

$$I_0\omega'' = 0, \qquad I_0\omega'' \to \infty,$$

определяющие кривые, вдоль которых меняется знак неравенства (25), были решены численно, а результаты и их анализ представлены ниже.

3. ДИАГРАММА УСТОЙЧИВОСТИ И ЕЕ АНАЛИЗ

На рис. 2 построены кривые, соответствующие уравнениям

$$I_0\omega'' = 0 \quad \text{и} \quad I_0\omega'' \to \infty.$$

Эти кривые определяют границы областей нелинейной устойчивости и неустойчивости при фиксированном значении $h_2 = 1$ и различных значениях параметра $h_1 \epsilon \{10; 2.23; 1,73; 1,1; 1\}$ соответственно на рис. 2. Область линейной неустойчивости отделена кривой с индексом "0". Области нелинейной устойчивости (НУ) и нелинейной неустойчивости (НН) чередуются.

При $h_1 = 10$ (рис. 2, *а*) построены шесть кривых, разделяющих области нелинейной устойчивости от областей нелинейной неустойчивости. В данном случае при $\rho < 1$ имеем две области устойчивости как для гравитационных, так и для капиллярных волн. При уменьшении h_1 до значения 2.23 кривые "*5*" и "*6*" смыкаются, а острый конец кривой "*4*" опускается на ось ρ (рис. 2,*б*). Можно сказать, что нелинейная устойчивость заполняет значительную часть плоскости (ρ, k), в частности, гравитационные волны устойчивы почти для всех отношений плотностей жидких сред, при этом область устойчивости капиллярных волн также значительно расширяется.

При $h_1 = 1.73$ (рис. 2, *в*) количество кривых, попадающих в первый квадрант плоскости (ρ, k), уменьшается (кривые "*5*" и "*6*" смещаются влево).

При этом острый конец кривой "*4*" постепенно двигается вправо по оси ρ, что, в свою очередь, приводит к увеличению области нелинейной устойчивости, ограниченной координатными осями. Другая область (кривая "*4*" и ось ρ) смещается к вертикальной прямой $\rho = 1$.

Процесс сужения областей неустойчивости и расширения областей устойчивости хорошо виден при $h_1 = 1.1$ (рис. 2, *г*).

В предельном случае, когда толщины жидких слоев равны (рис. 2, *д*), т. е. при $h_1 = 1$, нижняя дуга кривой "*4*" вырождается в точку $(1, 0)$. Вертикальная прямая $\rho = 1$ в предельном случае отсутствует, поскольку на нее накладываются нижняя часть кривой "*2*" и верхняя часть кривой "*4*", при этом оставшиеся части этих кривых образуют новую границу раздела областей нелинейной устойчивости и нелинейной неустойчивости. Отметим также, что эти области попадают в те участки диаграмм, которые имеют физический смысл в гидродинамике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследуется устойчивость распространения волновых пакетов на поверхности контакта гидродинамической системы "слой-слой". Построены характерные диаграммы для нелинейной устойчивости для различных толщин нижнего слоя. Обнаружено наличие достаточно больших областей нелинейной устойчивости для различных типов волн (капиллярных и гравитационных) для разных отношений плотностей и толщин двух жидких слоев.

1. *Ioualalen M., Kharif C., Roberts A.J.* Stability regimes of finite depth short-crested water waves // J. Phys. Okeanography.– 1999.– 29.– P. 2318–2331.
2. *Trulsen K.* Wave kinematics computed with the nonlinear Schroedinger method for deep water// Trans. ASME. – 1999. – 121. – p. 126–130.
3. *Choi W., Camassa R.* Weakly nonlinear internal waves in a two-fluid system // J. Fluid Mech.– 1996.– 313.– P. 83–103.
4. *Holyer I.Y.* Large amplitude progresive interfacial waves // J. Fluid Mech.– 1979. – 118(3). – p. 433 - 448.
5. *Bourtos Y. Z., Al-el-Malex M. B., Tewfich A. H.* A format expansion procedure for the internal solitary wave problem in a two-fluids system of constant topography // Acta Mechanica. – 1991. – 88 – p. 172–197.
6. *Nayfeh A.* Nonlinear propagation of wave-packets on fluid interface // Trans. ASME J. Appl. Mech.– 1976.– Ser. E, 43, N 4.– P. 584–588.
7. *Hasimoto H., Ono H.* Nonlinear modulation of gravity waves // J. of the Phys. Soc. of Japen.– 1972.– 33.– P. 805–811.
8. *Segur H., Hammack J.L.* Soliton models of long internal waves // J. Fluid Mech.– 1982.– 118.– P. 285–304.
9. *Yuen H.C., Lake B.M.* Nonlinear dynamics of deep-water gravity waves // Advances in Appl. Mech.– New York, London.– 1982.– 22.– P. 33–45.
10. *Ablowitz M.J., Segur H.* Solutions and the inverse scattering transform.– SIAM: Philadelphia, 1981.– 210 p.
11. *Whitham G.B.* Linear and nonlinear waves.– New York: John Wiley, 1974. // Русский перевод *Уизем Дж.Б.* Линейные и нелинейные волны.– М.: Мир, 1977.- 622 с.
12. *Bhatnagar P.L.* Nonlinear waves in one-dimensional dispersive systems.- Oxford: Clarendon Press, 1979.- 199 p.

Русский перевод: *Бхатнагар П.* Нелинейные волны в одномерных дисперсных системах.- М.: Мир, 1983.– 136 с.

13. *Lamb G.L.* Elements of soliton theory.– A Wiley: Interscience Publications, 1980.– 213 p.
14. *Selezov I.T., Korsunsky S.V.* Wave propagation along the interface between the liquid metal and electrolyte // Proc. International Conference “MHD Processes to Protection of Environment”. Part 1.– Kiev-Odessa, 1992.– P. 111–117.
15. *Selezov I.T., Huq P.* Interfacial solitary waves in a three-fluid medium with sourth // 2nd Eur. Fluid Mech. Conf., Warsaw, 20–24 Sept., 1994, Abstr. Pap.– Warsaw, 1994.– P. 250.
16. *Bontozoglou V.* Weakly nonlinear Kelvin-Helmholz waters between fluids of finite depth // Int. J. Multiphase Flow.– 1991.– 17, N 4.– P. 509-518.
17. *Dias F., Kharif Ch.* Nonlinear gravity and capillary-gravity waves. Part 7. Importance of surface tension effects // Annu. Rev. Fluid Mech.– 1999.– 31.– P. 301–346.
18. *Duncan J.H.* Spilling breakers // Annu. Rev. Fluid Mech.– 2001.– 33.– P. 519-547.
19. *Baker G.R. Meiron D.I., Orszag S.A.* Generalized vortex methods for free-surface flow problems // J.Fluid Mech.– 1982.– 123.– P. 477–501.
20. *Bourtos Y.Z., Abl-el-Malex M.B., Tewfick A.H.* A format expansion procedure for the internal solitary wave problem in a two-fluid system of constant topography // Acta Mechanica.– 1991.– 88.– P. 172–197.
21. *Chen Y., Liu P.L.-F.* The unified Kadomtsev - Petviashvily equation for interfacial waves // J.Fluid Mech.– 1995.– 228.– P. 383–408.
22. *Stamp A.P., Jacka M.* Deep-water internal solitary waves // J. Fluid Mech.– 1995.– 305.– P. 347–371.
23. *Avramenko O. V., Selezov I. T.* Nonlinear wave propagation in a fluid layer based on semi-infinite fluid // Доповіді НАНУ.– 1997.– N 10.– P. 61–66.
24. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Нелинейное распространение волновых пакетов при малых частотах // Теорет. и прикл. механика.– 2000.– Вып. 31.– С. 151–157.
25. *Селезов И.Т., Авраменко О.В.* Эволюционное уравнение третьего порядка для нелинейных волновых пакетов при околокритических волновых числах // Динамические системы.– 2001.– Вып. 17.– С. 58–67.
26. *Selezov I., Avramenko O.* Some features of nonlinear wave trains propagating in two-layer fluid // Geophysical Research Abstracts, The 26^th General Assembly of the European Geophys. Soc., Nice, France, 25–30 March, 2001.– 2001.– 3.– P. 8102.
27. *Селезов И. Т., Авраменко О. В.* Эволюция нелинейных волновых пакетов в гидродинамической системе "слой-полупространство"с учетом поверхностного натяжения // Мат. методи та фіз.-мех. поля.– 2001.– 44, №2.– С. 113–122.
28. *Selezov I., Avramenko O., Kharif C., Trulsen K.* Higher asymptotic approximations for nonlinear internal waves in fluid // Int. Conf. "Nonlinear Partial differential equations"Book of abstracts, Kyiv. 22–28 Aug, 2001.– Donetsk, 2001.– P. 105–106.
29. *Selezov I., Avramenko O., Mironchuk M., Morozova L.* On application of the potential theory in the problems of surface gravity waves // Ukrainian Math. Congress. Abstracts. Int. Conf. on Complex Analysis and Potential Theory, Ukraine, Kyiv, 7–12 Aug. 2001.– Kyiv, 2001.– P. 50-51.
30. *Авраменко О.В., Селезов И.Т* Устойчивость волновых пакетов в слоистых гидродинамических системах с учетом поверхностного натяжения // Прикладная гидромеханика.– 2001.– N 4.– С. 38–46.
31. *Selezov I., Avramenko O.* Stability analysis of nonlinear wave trains propagating in two-fluid system // Abstracts, Int. Conf. "Dynamical Systems Modelling and Stability Investigation", Kyiv, 2001, May 22–25.– Kyiv, 2001.– P. 356.
32. *Селезов И.Т., Авраменко О.В., Гуртовый Ю.В.* Особенности распространения волновых пакетов в двухслойной гидродинамической системе // Прикладна гідромеханіка.– 2005.– Т. 7(79), №1.– P. 80-89.
33. *Nayfeh A.H.* Perturbation methods.– Wiley – Interscience Publication, 1973.
Русский перевод: *Найфэ А.* Методы возмущений.– М.: Мир, – 1976.– 242 с.